ЛЕКЦИОННЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

О математических методах, используемых при работе с опционами[1)]

Шведов А.С.

Оценка различных опционов имеет большое прикладное значение при разработке стратегий на мировых финансовых и фондовых рынках. Для оценки опционов создана сложная математическая теория, которой посвящены десятки книг и тысячи журнальных статей. Лауреатами нобелевских премий по экономике стали Самуэльсон, Мертон, Шоулс, внесшие основополагающий вклад в создание этой математической теории. Данная математическая теория является уникальным инструментом для расчета цен опционов. В настоящей работе дается обзор основных методов оценки опционов. Изложение ведется на примере опционов на акции, но аналогичные методы используются и для расчетов цен других опционов, а также для расчетов цен фьючерсов, свопов, облигаций с правом выкупа и ряда других ценных бумаг.

1. Введение

Практическая задача, при решении которой применяются, и весьма серьезно, описываемые математические методы, - это поиск арбитража на финансовых и фондовых рынках. Арбитражем (или чистым арбитражем) называется возможность извлечения без риска прибыли, большей, чем безрисковый банковский процент.

Для решения этой задачи, то есть для поиска арбитража, строится «математический мир», математическая модель реального рынка. В «математическом мире» для описания того, как меняются со временем цены фондовых активов, используются случайные процессы (в вероятностном смысле этого слова), строящиеся на основе имеющейся статистической информации из реального мира. Делаются также некоторые предположения относительно условий продажи и покупки фондовых активов в «математическом мире», например, абсолютная ликвидность всех активов. Кроме того, считается, что в «математическом мире» отсутствует арбитраж. Исходя из того, какие случайные процессы выбраны, из сделанных предположений относительно возможностей продажи и покупки фондовых активов и из условия отсутствия арбитража для «математического мира»

[1)] Доклад на научном семинаре кафедры математики, статистики и эконометрики ГУ-ВШЭ 16 марта 1998 г.

Шведов А.С. - доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, статистики и эконометрики ГУ-ВШЭ.

рассчитываются цены различных финансовых инструментов, например опционов. Но в реальном мире те же финансовые инструменты имеют свои цены. Существенное отличие цен реального мира от цен тех же финансовых инструментов из «математического мира» может указывать на наличие арбитража на практике. При этом «математический мир» показывает также способ извлечения прибыли.

Отметим, что при изменении выбранных случайных процессов или предположений относительно возможностей продажи и покупки фондовых активов «математический мир» меняется. Меняются и цены финансовых инструментов в этом мире. Правильный выбор математической модели - это вопрос очень важный. Но этот вопрос остается за рамками настоящей работы. Поскольку нашей целью является обзор основных методов расчета цен опционов, мы ограничиваемся рассмотрением относительно простых «математических миров».

Слова «математическая теория опционов» или «математические методы для работы с опционами» обозначают скорее тему доклада, чем дают точное название этому кругу вопросов. Математическая теория, о которой идет речь, используется при работе не только с опционами, но и со многими другими финансовыми инструментами, например со свопами, фьючерсами, облигациями. Она является большой и сложной математической теорией, возникшей на стыке теории краевых задач для уравнений с частными производными, вычислительной математики и теории случайных процессов. Но все же опционы играют в этой теории несколько особую роль. Это связано и с тем, что многие направления данной теории были созданы именно при решении задач об оценке опционов, и с тем, что вопросы оценки других финансовых инструментов часто сводятся к вопросам оценки опционов.

Опцион - это ценная бумага, дающая право ее владельцу купить определенное имущество у лица, выпустившего опцион, (или продать определенное имущество лицу, выпустившему опцион) по установленной цене в течение некоторого времени. Опцион, дающий право купить имущество, называется опционом колл; опцион, дающий право продать имущество, называется опционом пут[2)]. При заключении такого договора та сторона, которая приобретает право купить или продать имущество, должна заплатить другой стороне определенную сумму, независимо от того, воспользуется она этим правом или нет. (Этот платеж может быть произведен и в рассрочку, но мы для простоты будем считать, что он производится за один прием.) Обычно, если срок действия опциона еще не истек, владелец может продать опцион, то есть уступить свое право третьей стороне. Та сумма, которую он получает при этом, может быть как значительно больше, так и значительно меньше той суммы, которая была заплачена им при заключении договора. Относительно небольшие колебания цены покупаемого или продаваемого имущества в течение срока действия опциона могут вызвать весьма существенные изменения цены опциона. Это означает, что его доходность может быть очень большой.

В настоящее время получили распространение многие виды опционов. Только по видам имущества могут быть названы следующие. Валютные опционы, когда имуществом является иностранная валюта. Процентные опционы, позволяющие дать или взять взаймы под конкретную ставку процента в течение определенного периода, то есть продать или купить соответствующую облигацию. Оп-

[2)] Названия происходят от английских слов «call» и «put».

ционы на реально существующие облигации. Свопционы, дающие право на заключение операции своп на определенных условиях, а также опционы прекращения свопа. Опционы на акции. Опционы на товар. Опционы на фьючерсы. Индексные опционы, дающие право получить сумму пропорциональную приросту сверх определенного уровня (или, наоборот, уменьшению) некоторого биржевого индекса, если такой прирост (уменьшение) произойдет в течение оговоренного времени. Опционы на опционы.

По правилу исполнения опционы делятся на американские, европейские и бермудские. Опцион называется американским, если имущество может быть куплено или продано в любой момент времени между датой заключения договора и датой его окончания, то есть в течение всего срока действия опциона. Опцион называется европейским, если имущество может быть куплено или продано только в момент окончания договора. Опцион называется бермудским, если период, в течение которого он может быть исполнен, больше, чем для европейского, но меньше, чем для американского опционов с теми же датами начала и окончания договора. Данные названия являются условными, они не означают, что опционы с такими правилами исполнения существуют только в указанных местах.

Опционы бывают биржевые и внебиржевые. Ликвидность биржевых опционов обеспечивается стандартным характером договоров.

Литература, посвященная опционам и математической теории, разработанной для их оценки, огромна. В списке литературы в конце статьи названо несколько известных книг [2] - [5], [7] - [12], [14] - [21], которые, в свою очередь, содержат большую библиографию.

В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением европейских и американских опционов на акции и даем краткое описание основных существующих методов их оценки. В параграфе 2 формулируются предположения относительно возможностей продажи и покупки активов в «математическом мире», приводятся примеры договоров, составляющих портфель участника рынка, обсуждается, от каких факторов зависит цена опциона. В этом параграфе также выводится соотношение между ценами европейских опционов колл и пут, показывающее на конкретном примере, как условие отсутствия арбитража позволяет делать заключения о ценах опционов, и как может возникать арбитраж в реальном мире. Параграф 3 посвящен методу оценки опционов, когда для моделирования цен фондовых активов используются случайные процессы с дискретным временем. Здесь обсуждается оценка опционов при помощи биномиальной модели и при помощи метода Монте-Карло. Параграф 4 посвящен случаю, когда для моделирования цен фондовых активов используются случайные процессы с непрерывным временем. Оценка опционов при этом производится путем решения краевых задач для уравнений с частными производными.

2. Свойства «математического мира», не связанные с тем, какие случайные процессы выбраны для моделирования цен фондовых активов

2.1. Условия идеального рынка

Пусть в «математическом мире» присутствуют безрисковые облигации, акции и опционы на акции. Эти ценные бумаги участники рынка могут покупать и продавать. Относительно условий покупки и продажи ценных бумаг делаются следующие предположения.

Предполагается, что все ценные бумаги являются абсолютно ликвидными. Это значит, что в любой момент времени можно купить или продать любое количество ценных бумаг любого вида. Цена покупки совпадает с ценой продажи.

Предполагается также, что все ценные бумаги являются бесконечно делимыми. То есть можно продать и купить, например, не только акцию, но и любую долю акции. Издержки, связанные с покупкой и продажей ценных бумаг, отсутствуют. Отсутствуют и налоги.

Еще одно предположение состоит в том, что ни один из участников рынка своими действиями не может повлиять на цены активов. Но совместные действия всех участников рынка определяют процесс изменения цен активов.

2.2. Примеры договоров, составляющих портфель участника рынка

Пусть S_t - цена некоторой акции в момент времени t , S_T - цена той же акции в момент времени T. Пусть $t < t_1 < \ldots < t_k < T$ и в моменты времени $t_1, \ldots, t_k$ по акции выплачиваются дивиденды $d_1, \ldots, d_k$.

Пусть два участника рынка *А* и *Б* заключили между собой следующий договор. В момент времени t участник *А* получает от участника *Б* сумму S_t. В моменты $t_1, \ldots, t_k$ участник *А* платит участнику *Б* суммы $d_1, \ldots, d_k$, и, наконец, в момент T участник *А* платит участнику *Б* сумму S_T. Схематически это можно представить следующим образом.

	t	t_1	...	t_k	T
А					
	$\uparrow S_t$	$\downarrow d_1$	...	$\downarrow d_k$	$\downarrow S_T$
Б					

Это традиционная сделка покупки-продажи акции, в которой участник *А* является «медведем», а участник *Б* - «быком». Участник *А* играет на понижение цены акции, считая, что его будущие расходы уступят полученной им в момент t сумме. Участник *Б*, напротив, играет на повышение, считая, что рост цены акции вместе с дивидендами позволят ему остаться в выигрыше. В этой сделке позиция участника *А* называется короткой, а позиция участника *Б* - длинной. По-другому говорят, что участник *А* продал или выпустил акцию, а участник *Б* купил акцию. Отметим, что в принятых нами условиях идеального рынка не имеет значения, была ли произведена реальная передача акции или была передана соответствующая сумма денег.

Набор подобных договоров составляет портфель участника рынка. Средства, полученные участником от выпуска одних акций, могут быть направлены им на покупку других акций.

Однако с целью улучшения характеристик портфеля может быть целесообразно включить в него договора и другого вида.

Например, *А* и *Б* могут заключить форвардную сделку. Они определяют при заключении договора цену K, и в момент времени T участник *А* платит участнику *Б* сумму $S_T - K$, если $S_T > K$, или участник *Б* платит участнику *А* сумму $K - S_T$, если $S_T < K$. Никаких других платежей этот договор не предусматривает. При $S_T = K$ никаких платежей не происходит и в момент времени T. Схематически форвардную сделку можно представить следующим образом.

$$\begin{array}{lcc} & t & \\ А & & \\ & \updownarrow 0 & \overbrace{\downarrow S_T - K \ (\text{если } \ S_T > K) \qquad \uparrow K - S_T \ (\text{если } \ S_T < K)}^{T} \\ Б & & \end{array}$$

Участники *А* и *Б* могут заключить и сделку, несколько отличающуюся от форвардной. Цена K опять является заранее определенной, и в момент T участник *А* платит участнику *Б* сумму $S_T - K$, если $S_T > K$. Если же $S_T \le K$, то никаких платежей в момент T не происходит. Ясно, что при заключении такой сделки участник *Б* должен был заплатить участнику *А* некоторую сумму C_t. Схематически это можно представить следующим образом.

$$\begin{array}{lcc} & t & \\ А & & \\ & \uparrow C_t & \overbrace{\downarrow S_T - K \ (\text{если } \ S_T > K) \qquad \updownarrow 0 \ (\text{если } \ S_T \le K)}^{T} \\ Б & & \end{array}$$

Нетрудно понять, что эта сделка является европейским опционом колл, то есть опционом на покупку акции. В момент времени t участник *Б* покупает у участника *А* право купить у того в момент времени T данную акцию по цене K. Если в момент времени T рыночная цена акции S_T меньше K, то нет никакого смысла покупать акцию за K, так как ее можно купить за меньшую цену, и опцион остается неисполненным. Если же в момент времени T рыночная цена акции S_T больше K, то участник *Б* может купить у участника *А* акцию за K и сейчас же продать ее за S_T, то есть получить доход $S_T - K$. В условиях идеального рынка это все равно, что участник *Б* получает от участника *А* сумму $S_T - K$.

Европейский опцион пут - это сделка следующего вида. В момент времени T участник *А* платит участнику *Б* сумму $K - S_T$, если $S_T < K$. Если же $S_T \ge K$, то никаких платежей в момент времени T не происходит. При заключении такой сделки участник *Б* должен был заплатить участнику *А* некоторую сумму P_t. Схематически это можно представить следующим образом.

$$\begin{array}{llcc} & t & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hspace{20em}}^{T}} \\ A & & & \\ & \uparrow P_t & \downarrow K - S_T \text{ (если } S_T < K) & \updownarrow 0 \text{ (если } S_T \ge K) \\ Б & & & \end{array}$$

В рассмотренных примерах позиции участника *А* по опционам являются короткими, а позиции участника *Б* - длинными. Участник *А* выпустил опционы, а участник *Б* купил. C_t и P_t являются ценами данных опционов в момент времени t.

Основные идеи методов оценки могут быть показаны на примерах европейских и американских опционов на покупку и на продажу акций, и в дальнейшем мы будем рассматривать только эти опционы. Но отметим еще раз, что даже если говорить только об опционах на акции, характер опционного договора может быть значительно более сложным. Например, размер выплаты может зависеть не только от цены акции в момент исполнения опциона, но и от того, какой была цена акции в какие-то предшествующие моменты времени.

2.3. Простейшие портфели, содержащие опционы

Чтобы показать еще одно приложение задачи об оценке опционов, кроме поиска арбитража, рассмотрим некоторые простейшие портфели. Покажем, в чем заключаются преимущества портфелей, состоящих из акции и из опциона на эту акцию перед портфелем, состоящим из одной акции. Считаем, что между моментами времени t и T дивиденды по акции не выплачиваются.

«Длинная акция». (То есть по акции занята длинная позиция.) Доход от такого портфеля, состоящего из одной акции, за период от t до T составляет

$$S_T - S_t.$$

Разумеется, это число может быть как положительным, так и отрицательным.

«Длинная акция - длинный пут». Имея акцию и защищаясь от возможности большого падения цены акции, инвестор купил европейский пут с ценой исполнения K, то есть купил право продать акцию за K в момент времени T. Доход от такого портфеля составляет

$$\max(S_T - S_t - P_t, K - S_t - P_t).$$

«Длинная акция - короткий колл». Имея акцию и желая получить дополнительный доход, инвестор выпустил европейский колл с ценой исполнения K. Хотя это и уменьшит его доход, если к моменту времени T цена акции будет выше определенного уровня, инвестор идет на это ради получения большего дохода в случае, если цена акции к моменту времени T будет ниже этого уровня. Доход от такого портфеля составляет

$$\min(S_T - S_t + \frac{C_t}{P(t,T)}, K - S_t + \frac{C_t}{P(t,T)}).$$

При $t < T$ через $P(t,T)$ мы обозначаем цену в момент t облигации, по которой в момент T гарантированно выплачивается 1. Справедливы неравенства $0 < P(t,T) < 1$.

2.4. Факторы, от которых зависит цена опциона

От каких величин должна зависеть цена опциона колл или цена опциона пут в момент времени t ?

Цена опциона должна зависеть от самого момента времени t и от срока истечения опциона T.

Цена опциона должна зависеть от текущей цены акции S_t и от цены исполнения K, а также от выплачиваемых дивидендов.

Цена опциона должна зависеть от срочной структуры процентной ставки в момент времени t [3)].

Цена опциона должна зависеть от характера изменения цены акции с течением времени. Нетрудно понять, что чем больше колебания, которые испытывает цена акции, тем выше цена опциона.

Цена опциона может зависеть от того, является этот опцион европейским или американским.

Сколько должны стоить различные опционы на идеальном рынке, где отсутствует арбитраж? На этот вопрос отвечает математическая теория, которой посвящен данный доклад.

2.5. Соотношение цен европейских опционов колл и пут

Пусть европейский опцион колл и европейский опцион пут на некоторую акцию имеют одинаковую цену исполнения K и один и тот же срок истечения T. Пусть между моментами времени t и T дивиденды по акции не выплачиваются. Тогда должно выполняться следующее соотношение между ценой европейского опциона колл C_t, ценой европейского опциона пут P_t и ценой акции S_t:

$$C_t - P_t - S_t + K \cdot P(t,T) = 0. \tag{1}$$

Мы покажем, что если соотношение (1) не выполняется, то в «математическом мире» возникает арбитраж, чего быть по условию не может. Приводимая

[3)] При фиксированном t срочной структурой процентной ставки называется набор чисел $r(t,T) = -\dfrac{\ln P(t,T)}{T-t}$ при всевозможных $T > t$.

ниже схема рассуждений является очень распространенной и используется при доказательстве многих утверждений о ценах опционов. В последующем мы будем считать такую схему рассуждений саму собой разумеющейся, но один раз проведем доказательство подробно. В момент времени t составим следующий портфель.

1. Куплен европейский опцион колл с ценой исполнения K и со сроком истечения T.

2. Выпущен европейский опцион пут с ценой исполнения K и со сроком истечения T.

3. Выпущена акция.

4. Куплено K облигаций с погашением в момент времени T.

Никаких изменений в состав портфеля до момента времени T вносить не будем. Мы покажем, что стоимость данного портфеля в момент времени T всегда равна 0. Тогда и стоимость этого портфеля в момент времени t должна быть равна нулю, иначе возникает арбитраж. Действительно, если стоимость портфеля в момент времени t положительна, то инвестор может продать этот портфель (продав или купив по отдельности опционы, акцию и облигации), получить некоторую сумму денег и затем закрыть все позиции в момент времени T, когда суммарные платежи по портфелю равны 0. Таким образом, инвестор из ничего получает некоторую сумму денег, что, конечно, больше, чем безрисковый банковский процент на нулевой начальный капитал инвестора, то есть является арбитражем. Аналогично, если стоимость данного портфеля в момент времени t отрицательна, то инвестор может купить этот портфель и из ничего получить некоторую сумму денег. Поскольку арбитраж в «математическом мире» отсутствует, стоимость данного портфеля в момент времени t должна быть равна 0.

Притоки средств по каждой из позиций портфеля в моменты времени t и T показаны в следующей таблице.

	t	T	
		При $S_T \le K$	При $S_T \ge K$
Длинный колл	$-C_t$	0	$S_T - K$
Короткий пут	P_t	$S_T - K$	0
Короткая акция	S_t	$-S_T$	$-S_T$
K длинных облигаций	$-K \cdot P(t,T)$	K	K
Суммарный приток средств		0	0

Соотношение (1) и выражает тот факт, что стоимость рассматриваемого портфеля в момент времени t равна 0.

Показано, что портфель, состоящий из длинного европейского колла и короткого европейского пута, дает тот же приток средств, что и портфель, состоящий из длинной акции и K коротких облигаций. Поэтому в «математическом мире» цены этих портфелей, $C_t - P_t$ и $S_t - K \cdot P(t,T)$, должны совпадать.

Если разница цен европейских опционов колл и пут в реальном мире какая-то другая, не равная $S_t - K \cdot P(t,T)$, это может указывать на наличие арбитража на практике. Хотя на хорошо функционирующих финансовых рынках такого простого арбитража, как правило, не существует.

3. Оценка опционов при помощи биномиальной модели и при помощи метода Монте-Карло

3.1. Биномиальная модель для цены акции

При выводе соотношения (1) мы не делали никаких предположений о том, каким образом меняется цена акции с течением времени. В «математическом мире» соотношение (1) остается справедливым, какой бы случайный процесс ни использовался для моделирования процесса изменения цены акции. Все другие соотношения для цен опционов, о которых мы будем говорить, этим свойством не обладают. Вывод о цене опциона в тот или иной момент времени всегда будет зависеть от того, какой случайный процесс используется для моделирования процесса изменения цены акции.

Ради упрощения изложения мы будем считать, что в рассматриваемый период времени по акции не выплачиваются дивиденды.

Как и раньше, через T мы будем обозначать срок истечения опциона, но использовать букву t для обозначения того момента, для которого определяется цена опциона, мы не будем. Мы будем считать, что $T > 0$, и что цена опциона определяется для момента времени 0, а через t будем обозначать произвольный момент времени между 0 и T. Пусть M - некоторое целое положительное число и $\Delta t = T/M$. Мы будем считать, что случайные величины, моделирующие цены акций и опционов, относятся к моментам времени $m \cdot \Delta t$, где $m = 0,1,\dots, M$. То есть для моделирования цен акций и опционов мы используем случайные процессы с дискретным временем. Для каждого из моментов времени $m \cdot \Delta t$ цена акции в «математическом мире» является случайной величиной (в смысле теории вероятностей). Цена акции для момента времени 0, для того момента, для которого мы хотим рассчитать цену опциона, известна. Ограничимся рассмотрением случая, когда при любом $m = 1,2,\dots, M$ цена акции в момент времени $m \cdot \Delta t$ может принимать не больше, чем 2^m различных значений. Если в момент времени $m \cdot \Delta t$ цена акции приняла значение S, то в момент времени $(m+1) \cdot \Delta t$ цена акции может принять значение либо $S' = S \cdot d$, либо $S'' = S \cdot u$, где d и u некоторые положительные числа, $d < u$. Отсутствие арбитража приводит к условию:

$$S' < \frac{S}{P(m \cdot \Delta t, (m+1) \cdot \Delta t)} < S''.$$

Процесс изменения цены акции может быть представлен в виде следующего биномиального дерева (см. рис.1)[4]. Каждому узлу биномиального дерева соответствует свое значение цены акции. Узлы, лежащие на одной вертикальной прямой, отвечают одному моменту времени. На рис.1 представлены узлы, отвечающие моментам времени 0, Δt и $2\Delta t$.

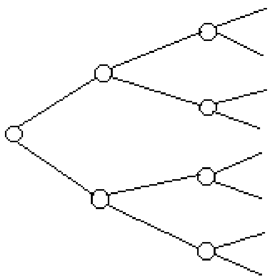

Рис.1

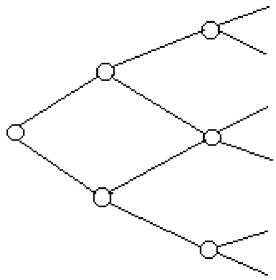

Рис.2

Если числа d и u не зависят ни от момента времени $m \cdot \Delta t$, ни от достигнутой к этому моменту времени цены акции S, то есть являются одними и теми же для всех узлов, то биномиальное дерево превращается в решетку, показанную на рис.2. Число различных значений, которые может принимать цена акции в момент времени $m \cdot \Delta t$, для решетки оказывается равным уже не 2^m, как для биномиального дерева, а всего $(m+1)$, и это позволяет проводить расчеты со значительно большими значениями M. Слабым местом использования решетки вместо биномиального дерева является то, что такой подход неприменим в тех случаях, когда характер опционного договора достаточно сложный, и согласно его условиям цена опциона в момент времени $m \cdot \Delta t$ зависит от цены акции не только в этот, но и в некоторые предшествующие моменты времени.

Отметим, что описанный процесс изменения цены акции еще не является случайным процессом в строгом смысле слова: мы определили только какие значения может принимать цена акции в каждый момент времени $m \cdot \Delta t, \ m = 0,1,\ldots M$, но не определили вероятности этих значений. К этому вопросу мы возвратимся позже.

3.2. Оценка европейских опционов при помощи биномиальной модели

После того, как процесс изменения цены акции от момента времени 0 до момента времени T определен, можно переходить к расчету цены опциона в момент времени 0. Процесс определения цены акции велся в направлении возрастания времени. Зная цены акции для всех узлов, отвечающих моменту времени $m \cdot \Delta t$, мы переходили к определению цен акции для узлов, отвечающих моменту

[4] При решении задач об оценке опционов часто используют также триномиальные деревья. Могут быть использованы и деревья с большим числом ветвей, выходящих из одной вершины.

времени $(m+1)\cdot\Delta t$. Процесс определения цены опциона ведется в противоположном направлении по времени. Зная цены опциона для всех узлов, отвечающих моменту времени $(m+1)\cdot\Delta t$, а также зная для всех узлов цены акции и цены безрисковых облигаций, мы определяем цены опциона для узлов, отвечающих моменту времени $m\cdot\Delta t$. Начинается этот процесс с определения цен опциона для узлов, отвечающих моменту времени $M\cdot\Delta t$, и заканчивается определением цены опциона в момент времени 0.

Сначала рассмотрим случай европейского опциона. На рис.3 показаны узлы *A* и *B*, отвечающие моменту времени T, узлы *C* и *D*, отвечающие моменту времени $T-\Delta t$, узел *E*, отвечающий моменту времени $T-2\Delta t$. Пусть S - цена акции для узла *C*, S' - цена акции для узла *B*, S'' - цена акции для узла *A*, V' - цена опциона для узла *B*, V'' - цена опциона для узла *A*.

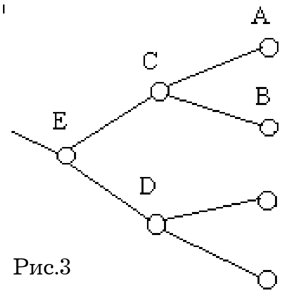

Рис.3

Цены опциона для всех узлов, отвечающих моменту времени T, определяются однозначно. Например, если мы рассматриваем опцион колл, то его цена для узлов *B* и *A* определяется по следующим формулам:

$$V' = \max(S'-K,0), \qquad V'' = \max(S''-K,0).$$

Если мы рассматриваем опцион пут, то

$$V' = \max(K-S',0), \qquad V'' = \max(K-S'',0).$$

Можно рассмотреть и другие виды опционов, например, для опциона «доллар или ничего»

$$V' = \begin{cases} 1, & \text{если } S' \ge K, \\ 0, & \text{если } S' < K, \end{cases} \qquad V'' = \begin{cases} 1, & \text{если } S'' \ge K, \\ 0, & \text{если } S'' < K. \end{cases}$$

От конкретного способа определения цен опциона для узлов, отвечающих моменту времени T, последующие этапы алгоритма не зависят. Важно, что для момента времени T для всех узлов цена опциона известна.

Нашей ближайшей задачей является определение цены опциона V для узла *C*. В момент времени $T-\Delta t$, находясь в узле *C*, мы хотим попытаться составить портфель из акций и безрисковых облигаций (с погашением в момент времени T) так, чтобы при любом возможном для узла *C* исходе (то есть при переходе либо в узел *A*, либо в узел *B*) цена этого портфеля в момент времени T совпала бы с ценой опциона. То есть цена этого портфеля должна быть равна V' в узле *B* и равна V'' в узле *A*. Портфель с таким свойством, если он существует, называется синтетическим опционом. Если нам удастся построить такой портфель, то его цена в момент времени $T-\Delta t$ и должна быть принята за цену опциона для узла *C*. Противное означало бы наличие арбитража.

Итак, постараемся построить для момента времени $T-\Delta t$ и цены акции S

(то есть для узла *C*) синтетический опцион из δ акций и ν безрисковых облигаций (с погашением в момент времени T). Должны выполняться условия

$$\delta S' + \nu = V',$$
$$\delta S'' + \nu = V''.$$

Эта система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение

(2) $$\delta = \frac{V'' - V'}{S'' - S'}, \qquad \nu = \frac{V'S'' - V''S'}{S'' - S'}.$$

Таким образом,

(3) $$V = \delta S + \nu P(T - \Delta t, T).$$

Формулы (2) и (3) определяют цену опциона для узла *C*. Аналогично может быть определена цена опциона для узла *D*, а также для всех остальных узлов, отвечающих моменту времени $T - \Delta t$.

Обозначим через V' цену опциона для узла *D* и через V'' - цену опциона для узла *C*. Тогда цена опциона для узла *E* может быть рассчитана по формулам (2) и (3); только вместо $P(T - \Delta t, T)$ в формуле (3) должно стоять $P(T - 2\Delta t, T - \Delta t)$.

Тем же способом цену опциона можно определить и для всех остальных узлов биномиального дерева, в том числе и для узла, отвечающего моменту времени 0. Это и есть искомая цена опциона, которую мы обозначим через $V_0^{(M)}$. Верхний индекс M показывает, что эта цена получена при разбиении промежутка времени от 0 до T на M частей.

Полученный результат может показаться парадоксальным. Цена опциона, например, посчитанная по формулам (2) и (3) для узла *C*, не зависит от ожидаемой доходности акции. И в том случае, когда вероятность перехода в узел *A* равна 0,9, и в том случае, когда эта вероятность равна 0,5, цена опциона V для узла *C* оказывается одной и той же. Но это является следствием того, что в «математическом мире» наложен полный запрет на арбитраж. В связи с этим широкое распространение получил следующий принцип. При расчетах цен финансовых инструментов можно ограничиться рассмотрением риск-нейтральных «математических миров», то есть таких «математических миров», где ожидаемая доходность любого фондового актива совпадает с доходностью безрисковой облигации. Под ожидаемой доходностью понимается математическое ожидание доходности, рассматриваемой как случайная величина. Найдем выражения для вероятностей перехода в верхнее и в нижнее состояния в таком риск-нейтральном «математическом мире» и с их помощью получим еще одно выражение для цены европейского опциона.

Снова, как и при конструировании синтетического опциона, будем считать, что мы находимся в узле *C*, и можем перейти либо в узел *A*, либо в узел *B* (см. рис.3). Введем обозначение

$$P = P(T - \Delta t, T)$$

и положим

$$\phi = \frac{S \cdot P^{-1} - S'}{S'' - S'}.$$

Из условия отсутствия арбитража следует, что $0 < \phi < 1$. Будем считать, что ϕ - это вероятность перехода из узла *C* в узел *A*, а $(1 - \phi)$ - это вероятность перехода из узла *C* в узел *B*. Тогда легко увидеть, что ожидаемая в момент T цена акции

$$S'' \cdot \phi + S' \cdot (1 - \phi)$$

равна $S \cdot P^{-1}$. То есть ϕ и $(1 - \phi)$ являются риск-нейтральными вероятностями.

Из формул (2) и (3) получаем, что

$$V = P \cdot (V'' \cdot \phi + V' \cdot (1 - \phi)). \tag{4}$$

Это означает, что цена опциона для узла *C* есть дисконтированное математическое ожидание цены опциона в момент времени T относительно риск-нейтральных вероятностей.

Заметим, что на практике попытка реализовать описанный алгоритм определения величины $V_0^{(M)}$ наталкивается на одну серьезную трудность. Даже если ограничиться рассмотрением случая, когда числа d и u одинаковы для всех узлов графа, расчеты показывают, что найденная цена опциона $V_0^{(M)}$ зависит очень существенно от выбора этих чисел. Обычно практическая ценность таких алгоритмов, в которых «что заложишь, то и получишь», невелика. Но в данном случае дело удается спасти. Для этого необходимо рассмотреть еще одну вспомогательную математическую модель для цены акции - случайный процесс с непрерывным временем. А затем выбрать числа d и u так, чтобы некоторые характеристики случайного процесса с дискретным временем совпадали с соответствующими характеристиками случайного процесса с непрерывным временем.

3.3. Оценка европейских опционов при помощи биномиальной модели (продолжение)

Для того, чтобы яснее представить ключевые идеи использования случайных процессов с непрерывным временем, мы ограничимся рассмотрением случая, когда существует число $r > 0$ такое, что для любых двух моментов времени t' и t'' таких, что $t' \le t''$,

$$P(t', t'') = \exp(r(t' - t'')). \tag{5}$$

Из условия (5) следует, что при любом фиксированном T цена безрисковой облигации $P(t, T)$, как функция от t, является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$dP(t,T) = r\ P(t,T)\ dt.$$

Идея попытаться написать похожее уравнение для цены акции оказалась весьма продуктивной.

Рассмотрим случайный процесс с непрерывным временем X_t, $t \geq 0$, который является решением стохастического дифференциального уравнения:

$$dX_t = a(X_t, t)\,dt + b(X_t, t)\,dW_t.$$ [5)]

Здесь W_t, $t \geq 0$, - это винеровский случайный процесс, называемый также процессом броуновского движения. Винеровский случайный процесс - это непрерывный случайный процесс с независимыми нормальными приращениями $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$ (t и Δt здесь могут быть любыми неотрицательными действительными числами). Математическое ожидание любого приращения $E(\Delta W_t) = 0$, дисперсия $D(\Delta W_t) = \Delta t$.[6)]

Лемма Ито состоит в том, что если случайный процесс X_t является решением приведенного стохастического дифференциального уравнения, то для любой достаточно гладкой функции $H(x,t)$ случайный процесс $H(X_t, t)$ является решением стохастического дифференциального уравнения:

$$dH = (\frac{\partial H}{\partial x} \cdot a + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \cdot b^2)\ dt + \frac{\partial H}{\partial x} \cdot b\ dW_t.$$

В качестве вспомогательной математической модели для цены акции можно использовать случайный процесс S_t, $t \geq 0$, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения:

[5)] Мы не будем давать здесь полное и строгое описание того, какая математическая конструкция называется случайным процессом с непрерывным временем, что означает утверждение, что такой случайный процесс является решением некоторого стохастического дифференциального уравнения, и какие условия должны быть наложены на функции a и b. Описание этой математической теории можно найти, например в [6] или в [13].

[6)] Сделаем все же одно пояснение, относящееся к простейшему случаю. Пусть случайный процесс X_t является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = a\,dt + b\,dW_t,$$

где a и b константы. Это означает, что

$$X_{t+\Delta t} - X_t = a \cdot \Delta t + b\varepsilon\,\sqrt{\Delta t},$$

где случайная величина ε нормальна с математическим ожиданием 0 и со стандартным отклонением 1. Важное значение имеет то, что в этой формуле стоит $\sqrt{\Delta t}$, стандартное отклонение случайной величины ΔW_t, имеющей дисперсию Δt. То, что дисперсия случайной величины ΔW_t пропорциональна Δt, является следствием требования о независимости приращений, поскольку дисперсия суммы независимых случайных величин должна быть равна сумме дисперсий.

$$dS_t = \mu\, S_t\ dt + \sigma\, S_t\ dW_t,$$

где μ и $\sigma > 0$ - константы. μ - это ожидаемая доходность акции, σ называется волатильностью цены акции.

Рассмотрим функцию $H(S,t) = \ln S$. Поскольку

$$\frac{\partial H}{\partial S} = \frac{1}{S}, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

применение леммы Ито дает следующее стохастическое дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет случайный процесс $\ln S_t$.

$$d\ln S_t = (\mu - \sigma^2/2)\ dt + \sigma\ dW_t.$$

Это стохастическое дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Следовательно, для любого $\Delta t > 0$ случайная величина

$$\ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t$$

нормальна с математическим ожиданием $(\mu - \sigma^2/2)\Delta t$ и со стандартным отклонением $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Этого результата оказывается достаточно для того, чтобы дать такое определение чисел d и u, которое приводит к работоспособному алгоритму нахождения величины $V_0^{(M)}$.

Будем считать S_t детерминированной величиной. Тогда $S_{t+\Delta t}$ является логарифмически нормальной случайной величиной. Из свойств логарифмически нормальных случайных величин известно, что

$$E(S_{t+\Delta t}) = S_t \exp(\mu\,\Delta t), \qquad D(S_{t+\Delta t}) = S_t^2 \exp(2\mu\,\Delta t)\cdot[\exp(\sigma^2 \Delta t) - 1].$$

Воспользуемся принципом риск-нейтральности и будем считать $\mu = r$.

Рассмотрим случайную величину Q, которая принимает значение $S_t u$ с вероятностью ϕ и значение $S_t d$ с вероятностью $1-\phi$. Для определения чисел d и u мы используем два уравнения:

$$E(S_{t+\Delta t}) = E(Q), \qquad D(S_{t+\Delta t}) = D(Q).$$

К этим уравнениям, которые утверждают, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины Q должны совпадать с математическим ожиданием и дисперсией случайной величины $S_{t+\Delta t}$, добавим условие $u = 1/d$. Введем обозначение $a = \exp(r\cdot\Delta t)$. Первое из используемых уравнений приводит к соотношению

$$a = \phi\, u + (1-\phi\,)d,$$

которое совпадает с условием, что ϕ и $1-\phi$ являются риск-нейтральными вероятностями. Чтобы записать второе уравнение, воспользуемся соотношением $D(Q) = E(Q^2) - E(Q)^2$. Имеем

$$S_t^2 \cdot a^2 \cdot [\exp(\sigma^2 \Delta t) - 1] = \phi S_t^2 u^2 + (1-\phi) S_t^2 d^2 - S_t^2 (\phi u + (1-\phi) d)^2.$$

Подставляя в правую часть второго уравнения выражение для a из первого уравнения, получаем

$$a^2 \cdot \exp(\sigma^2 \Delta t) = \phi u^2 + (1-\phi) d^2$$

или

$$a^2 \cdot \exp(\sigma^2 \Delta t) = \frac{a-d}{u-d} u^2 + \frac{u-a}{u-d} d^2.$$

Используя условие $u = 1/d$, приводим данное уравнение к виду

$$(u - \frac{1}{u})\, a^2 \cdot \exp(\sigma^2 \Delta t) = a(u - \frac{1}{u})(u + \frac{1}{u}) - (u - \frac{1}{u}),$$

что равносильно квадратному уравнению

$$au^2 - (a^2 \cdot \exp(\sigma^2 \Delta t) + 1)u + a = 0.$$

Дальнейший анализ носит технический характер. Нетрудно убедиться, что у этого квадратного уравнения есть два действительных корня, из которых только один обладает свойством $u > 1$. Раскладывая экспоненты, входящие в выражение для этого корня, в ряды Тейлора и пренебрегая членами порядка Δt и более высокого, мы получаем, что

$$u = \exp(\sigma \sqrt{\Delta t}), \qquad d = \exp(-\sigma \sqrt{\Delta t}).$$

Таким образом, весь произвол при расчете цены опциона по биномиальной модели сводится к выбору одного параметра σ, волатильности цены акции. Но этот параметр действительно необходимо принимать в расчет, так как цена опциона обязана зависеть от размаха колебаний в цене акции.

Только теперь можно считать, что алгоритм расчета цены опциона $V_0^{(M)}$ по биномиальной модели описан полностью. Примеры расчетов величин $V_0^{(M)}$ будут приведены в разделе 3.4, где дано сопоставление цен европейских и американских опционов.

Можно показать, что при описанном выборе чисел d и u и при выполнении условия (5) для европейских опционов колл и пут существует $\lim\limits_{M\to\infty} V_0^{(M)}$.

Мы использовали случайный процесс с непрерывным временем для того, чтобы корректно построить случайный процесс с дискретным временем. Но случайные процессы с непрерывным временем, как математические модели для цен акций, можно применять для оценки опционов и другим путем, строя с их помощью не случайные процессы с дискретным временем, а уравнения с частными производными. Об этом подходе мы будем говорить в параграфе 4.

3.4. Оценка американских опционов при помощи биномиальной модели

Биномиальная модель может быть использована и для расчетов цен американских опционов. Рассмотрим, например, американский пут. Обратимся к формуле (4), по которой рассчитывалась цена европейского опциона для узла *C* (см. рис.3). Напомним, что K - это цена исполнения опциона, S - цена акции для узла *C*, V' и V'' - цены опциона соответственно для узлов *B* и *A*. Цена американского опциона пут для узла *C* рассчитывается по формуле:

$$V = \max(K - S, P\,(V''\phi + V'(1-\phi\,))).$$

Причем пут должен быть исполнен в узле *C*, если

$$K - S > P(V''\phi + V'(1-\phi\,)),$$

и не должен быть исполнен в противном случае. Естественно, что при расчете цены опциона для узла *E* в качестве цены опциона в узле *C* должна быть принята именно так найденная цена V. Поэтому цена опциона в узле *E* включает в себя возможность раннего исполнения не только в этом узле, но и возможность раннего исполнения в узлах *C* и *D*.

Биномиальная модель может быть использована и для расчетов цен опционов на акции, по которым выплачиваются дивиденды. Но мы не будем останавливаться на этих вопросах.

Приведем несколько рассчитанных по биномиальной модели цен опционов. Выбраны следующие значения. В момент времени 0 цена акции $S_0 = 40$. Цена исполнения опциона $K = 40$. Используемая в формуле (5) годовая процентная ставка $r = 0{,}1$. Срок истечения опциона наступает через 3 месяца, то есть $T = 0{,}25$. Рассматриваются два значения волатильности $\sigma = 0{,}04$ и $\sigma = 0{,}2$ [7]. Считается, что дивиденды по акции в этот период не выплачиваются. Результаты расчетов приведены в следующей таблице.

	$\sigma = 0{,}04$	$\sigma = 0{,}2$	$\sigma = 0{,}04$	$\sigma = 0{,}2$	$\sigma = 0{,}04$	$\sigma = 0{,}2$
$M = 8$	1,016	2,068	0,029	1,081	0,104	1,205
$M = 32$	1,025	2,106	0,037	1,118	0,109	1,223
$M = 128$	1,027	2,115	0,039	1,127	0,111	1,227
	Цены европейского опциона колл		*Цены европейского опциона пут*		*Цены американского опциона пут*	

Результаты, полученные при расчетах с $M = 128$ и с $M = 32$, достаточно близки между собой. Результаты, полученные при расчетах с $M = 8$, отличаются от них сильнее.

---

[7] Для реального мира значение волатильности $\sigma = 0{,}04$ является очень низким. Однако в «математическом мире» такая волатильность может быть рассмотрена.

Цены американского опциона колл нами не приведены, поскольку цена американского опциона колл совпадает с ценой европейского опциона колл, если по акции не выплачиваются дивиденды. Для опционов пут положение совсем другое. Например, при $\sigma = 0{,}04$ цена американского пута почти втрое выше, чем цена европейского пута.

Обратим также внимание на высокую зависимость цены опциона от волатильности. Например, для европейского опциона пут увеличение волатильности в 5 раз приводит к увеличению цены опциона более чем в 25 раз. Это обстоятельство является очень важным, поскольку волатильность цены акции - это тот параметр, при выборе которого имеется произвол, и довольно большой. При более аккуратных расчетах волатильность считают не числом, а случайным процессом. Существуют стратегии вложения средств в опционы, направленные на извлечение прибыли именно из изменения волатильности цены акции.

3.5. Оценка опционов при помощи метода Монте-Карло

Для расчетов цен опционов может использоваться также метод Монте-Карло. Мы ограничимся рассмотрением метода Монте-Карло в рамках биномиальной модели и применительно к европейским опционам. Пусть для цен безрисковых облигаций выполняется соотношение (5). Цена акции S_T в момент времени T рассматривается как случайная величина относительно риск-нейтральных вероятностей. Цена опциона V_T в момент времени T также является случайной величиной, значения которой однозначно определяются по значениям случайной величины S_T. Из формулы (4) нетрудно увидеть, что

$$V_0^{(M)} = \exp(-rT) \cdot E(V_T),$$

где математическое ожидание случайной величины V_T берется относительно риск-нейтральных вероятностей.

При помощи M случайных чисел с учетом риск-нейтральных вероятностей строится траектория изменения цены акции от момента времени 0 до момента времени T, определяется цена акции в момент времени T и по ней - цена опциона в момент времени T. Проведя несколько тысяч таких испытаний, в качестве $E(V_T)$ можно взять среднее арифметическое найденных цен опциона в момент времени T.

4. Оценка опционов путем решения краевых задач для уравнений с частными производными

4.1. Вывод фундаментального уравнения с частными производными

Ради упрощения изложения мы будем считать, что в рассматриваемый нами период времени по акции не выплачиваются дивиденды, и что цены безрисковых облигаций определяются по формуле (5). Пусть математической моделью для цены акции служит случайный процесс $S_t, t \geq 0$, который является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dS_t = \mu (S_t, t)\, S_t\, dt + \sigma (S_t, t)\, S_t\, dW_t.$$

Пусть $V(S_t, t)$ - это цена некоторого опциона, связанного с данной акцией (или какого-то другого финансового инструмента). По лемме Ито

$$dV(S_t, t) = X \cdot V(S_t, t)\, dt + Y \cdot V(S_t, t)\, dW_t,$$

где

$$X = \frac{1}{V}(\mu\, S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^{\,2} S^2 \frac{\partial^{\,2} V}{\partial S^2}), \qquad Y = \frac{1}{V}\sigma\, S \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Рассмотрим портфель, состоящий из акций, опционов и безрисковых облигаций с погашением в момент времени T. При любом $t, 0 \leq t \leq T,$ обозначим через $w_1(t)$ средства, вложенные в акции, через $w_2(t)$ - средства, вложенные в опционы, через $w_3(t)$ - средства, вложенные в облигации. Если $w_i(t) > 0$, то по соответствующей ценной бумаге занята длинная позиция, если $w_i(t) < 0$, то по соответствующей ценной бумаге занята короткая позиция. Будем считать, что при любом $t, 0 \leq t \leq T,$ выполняется условие:

$$w_1(t) + w_2(t) + w_3(t) = 0.$$

Из этого условия следует, что

$$w_1 \frac{dS}{S} + w_2 \frac{dV}{V} + w_3 r\, dt = 0.$$

Раскрывая выражения для dS и для dV и пользуясь тем, что $w_3 = -w_1 - w_2$, получаем

$$(w_1(\mu - r) + w_2(X - r))\, dt + (w_1\sigma + w_2 Y)\, dW_t = 0.$$

Это равенство приводит нас к системе линейных алгебраических уравнений для w_1 и w_2:

$$(\mu - r)w_1 + (X - r)w_2 = 0,$$
$$\sigma w_1 + Y w_2 = 0.$$

Данная система имеет ненулевое решение только при выполнении условия:

$$(\mu - r) \cdot Y = \sigma\, (X - r).$$

Подставляя выражения для X и Y, получаем, что это условие равносильно тому, что функция $V(S, t)$ является решением следующего уравнения с частными производными:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r\,S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^{2}S^{2}\frac{\partial^{2}V}{\partial S^{2}} - rV = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) служит основой для определения цены опциона. Для однозначного определения решения $V(S,t)$ к уравнению (6) необходимо добавить граничные условия.

Отметим, что в уравнение (6) не входит μ. Это является еще одним подтверждением принципа риск-нейтральности: цена опциона не зависит от ожидаемой доходности акции.

Предположим, что в рассматриваемом портфеле находится всегда один опцион, то есть $w_2 = V$. Тогда из уравнения $\sigma\, w_1 + Yw_2 = 0$ и из определения Y получаем $w_1/S = -\partial V/\partial S$. То есть количество акций в таком портфеле должно быть равно $(-\partial V/\partial S)$. Величина $(\partial V/\partial S)$ называется дельтой опциона или соотношением идеального хеджирования. Аналогичная величина уже встречалась нам, и также была обозначена буквой δ, когда мы строили синтетический опцион при рассмотрении биномиальной модели.

4.2. Оценка опционов путем аналитического решения краевых задач для уравнений с частными производными. Формула Блэка - Шоулса

Мы покажем, как Блэк и Шоулс из уравнения (6) вывели свою знаменитую формулу для цены европейского опциона колл. (Из этой формулы с помощью соотношения (1) сразу же получается формула и для цены европейского опциона пут.) Будем считать, что σ - это константа. В случае опциона колл граничное условие при $t = T$ имеет вид:

$$V(S,T) = \begin{cases} S - K, & \text{если } S \ge K, \\ 0, & \text{если } S < K. \end{cases}$$

Заменой переменных задача с таким граничным условием для уравнения (6) сводится к задаче для уравнения:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^{2} y}{\partial x^{2}},$$

граничное условие для которой $y(x,0)$ строится по функции $V(S,T)$. Известно, что решение последней задачи при $\tau > 0$ дается следующей формулой:

$$y(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\,\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} y(\xi,0)\cdot \exp(-(x-\xi)^{2}/(4\tau))\,d\xi,$$

которая называется интегралом Пуассона. После возвращения к исходным переменным получается, что

$$V(S,t) = S \cdot N(h) - \exp(-r(T-t)) \cdot K \cdot N(h - \sigma\sqrt{T-t}\,), \tag{7}$$

где

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot \ln\frac{S}{K\exp(-r(T-t))} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}\,,\ N(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}\exp(-v^2/2)\,dv.$$

Именно сведение исходной задачи для уравнения (6) к задаче, решение которой дается интегралом Пуассона, и последующий подсчет этого интеграла и составляют содержание знаменитой работы Блэка и Шоулса 1973 г., которая, возможно, является самой знаменитой из всех работ, посвященных опционам. Сейчас уже почти забыто, что до появления формулы Блэка - Шоулса (7) практиками использовался ряд эмпирических формул, выражающих цену европейского опциона колл через S, K, r, σ и $T-t$. Все эти формулы оказались хуже, чем формула (7), полученная с использованием достаточно сложных математических методов.

Из формулы Блэка - Шоулса (7) может быть найдено выражение для дельты опциона колл: $\partial V/\partial S = N(h)$.

Приведем несколько цен опционов, рассчитанных по формуле Блэка - Шоулса для момента времени $t=0$. Выбраны те же значения, что и в параграфе 3, $S_0 = 40$, $K = 40$, $T = 0{,}25$ $r = 0{,}1$ и рассматриваются два значения волатильности $\sigma = 0{,}04$ и $\sigma = 0{,}2$.

$\sigma = 0{,}04$	$\sigma = 0{,}2$
1,028	2,118

Цены европейского опциона колл

$\sigma = 0{,}04$	$\sigma = 0{,}2$
0,040	1,131

Цены европейского опциона пут

Эти результаты хорошо согласуются с результатами, полученными при помощи биномиальной модели при $M = 128$.

4.3. Оценка опционов путем численного решения краевых задач для уравнений с частными производными

Однако представление в аналитической форме решения практически важной задачи для уравнения с частными производными, таким представлением является формула Блэка - Шоулса, возможно далеко не всегда. Часто подобные задачи приходится решать численно.

Построение эффективных и надежных алгоритмов численного решения подобных задач - это большой раздел вычислительной математики, и здесь мы не будем пытаться подробно эти алгоритмы описать. Дадим только очень поверхностное объяснение на примере одного из подходов, позволяющее понять о чем, в принципе, идет речь. Подробное описание данной математической теории можно найти, например, в [1].

Зафиксируем два положительных числа ΔS и Δt, и вместо того, чтобы искать решение $V(S,t)$ во всех точках (S,t) из интересующего нас диапазона, будем искать решение только в попавших в этот диапазон точках вида

$(i \cdot \Delta S, j \cdot \Delta t)$, где i и j - целые числа. Будем считать T кратным Δt. Заменим в уравнении (6) производные

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S,t), \qquad \frac{\partial V}{\partial S}(S,t), \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t)$$

на соответствующие разделенные разности

$$\frac{V(S,t+\Delta t)-V(S,t)}{\Delta t}, \qquad \frac{V(S+\Delta S,t)-V(S-\Delta S,t)}{2\Delta S},$$
$$\frac{V(S+\Delta S,t)-2V(S,t)+V(S-\Delta S,t)}{\Delta S^2}.$$

Таким образом, при $t = T - \Delta t$ может быть получена система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $V(i \cdot \Delta S, T - \Delta t)$, i принимает значения из некоторого конечного подмножества множества целых чисел. Значения $V(i \cdot \Delta S, T)$ известны из граничного условия. После того, как эта система линейных алгебраических уравнений решена, точно так же может быть составлена и решена система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $V(i \cdot \Delta S, T - 2\Delta t)$ и т.д. Наконец, может быть записана и решена система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $V(i \cdot \Delta S, 0)$, чем и завершается решение задачи[8)].

Можно несколько раз последовательно уменьшать числа ΔS и Δt, чтобы получать численные решения, все более точно воспроизводящие решение исходной задачи для уравнения с частными производными.

Для иллюстрации приведем результаты расчетов по такой разностной схеме цен американских опционов пут. Уравнение (6) в данном случае дополнено граничными условиями:

$$V(S,T) = \begin{cases} K - S, & \text{если } S \le K, \\ 0, & \text{если } S > K, \end{cases}$$

$V(0,t) = K, \quad V(S_{\max}, t) = 0$ при $0 \le t \le T$. Здесь $S_{\max}$ - некоторое выбранное значение для цены акции, число значительно большее K. Решение ищется в прямоугольнике $[0, S_{\max}] \times [0, T]$.

---

8) Использование обозначения $V(i \cdot \Delta S, j \cdot \Delta t)$ для величин, получающихся при решении систем линейных алгебраических уравнений, не совсем корректно, так как данные величины не обязаны в точности совпадать со значениями функции $V(S,t)$ в точках $(i \cdot \Delta S, j \cdot \Delta t)$. Это связано с тем, что при замене производных разделенными разностями были отброшены некоторые малые добавки. Но вводить для величин, получающихся при решении систем линейных алгебраических уравнений, дополнительные обозначения, значило бы углубляться в теорию численных методов.

Однако при решении этой краевой задачи описанным разностным методом оказывается, что при малых S цена американского опциона пут меньше, чем $K-S$, что, конечно, неверно. Это не значит, что описанный разностный метод плохой, это значит, что неверно определена совокупность граничных условий. Мы вернемся к этому вопросу чуть позже. Но расчет цены данного опциона все же может быть проведен и с этими граничными условиями, если сделать одну модификацию разностного метода. Применяют следующий прием. Если после решения некоторой системы линейных алгебраических уравнений в какой-либо точке было получено значение решения $V(i \cdot \Delta S, j \cdot \Delta t)$ меньшее, чем $K - i \cdot \Delta S$, это значение заменяют на $K - i \cdot \Delta S$. На рисунке 4 приведен получающийся при таком расчете график цены американского опциона пут, как функция от S при фиксированном t. Этот график состоит из двух частей. Он совпадает с отрезком прямой $V = K - S$ при $0 \le S \le S_f(t)$ и имеет криволинейную форму при $S > S_f(t)$.

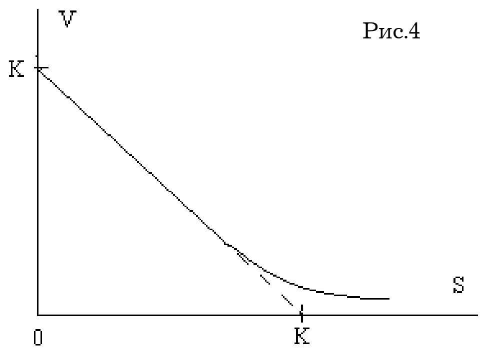

Рис.4

Это указывает на то, что данная задача кроме тех граничных условий, которые были поставлены, требует еще одно дополнительное внутреннее граничное условие на кривой $(S_f(t), t)$, лежащей в плоскости (S, t). Если бы такое внутреннее граничное условие было с самого начала добавлено в постановку задачи, тогда и в расчете без модификации разностного метода не было бы получено неверного результата[9]. Чтобы внутреннее граничное условие не вводить в исходную постановку задачи (это существенно усложняет расчет), и применяется указанный прием.

Американский опцион пут следует исполнять при $S \le S_f(t)$, когда цена опциона совпадает с той суммой, которую по нему можно получить при немедленном исполнении, и не следует исполнять при $S > S_f(t)$, когда цена опциона больше данной суммы.

Приведем несколько цен американских опционов пут, рассчитанных для момента времени $t = 0$ путем численного решения уравнения (6) с поставленными граничными условиями и с описанной модификацией разностного метода. Результаты приведены для достаточно маленьких ΔS и Δt, когда сходимость численного решения к решению исходной краевой задачи может считаться достигнутой. Во всех расчетах, как и в расчетах с использованием биномиальной модели, результаты которых приведены в параграфе 3, и в расчетах по формуле Блэка - Шоулса, результаты которых приведены в этом параграфе, выбраны значения

---

[9] Данную задачу можно было бы рассматривать также как задачу со свободной границей, поскольку при $S \le S_f(t)$ решение данной задачи имеет простую аналитическую форму.

$K = 40$ и $r = 0{,}1$. Значения S_0, T и σ приведены в верхней части следующей таблицы. В нижней части этой таблицы приведены полученные цены опционов.

$S_0 = 40$	$S_0 = 40$	$S_0 = 37$	$S_0 = 37$
$T = 0{,}25$	$T = 0{,}25$	$T = 0{,}25$	$T = 0{,}0833$
$\sigma = 0{,}04$	$\sigma = 0{,}2$	$\sigma = 0{,}2$	$\sigma = 0{,}2$
0,11	1,23	3,09	3,0

Цены американских опционов пут

Цены опциона 0,11 и 1,23 хорошо соответствуют тем ценам, которые были получены в параграфе 3 для цен американского опциона пут при тех же K, r, S_0, T и σ по биномиальной модели.

При $S_0 = 37$ возникает вопрос, следует или не следует немедленно исполнять американский пут. Полученные решения показывают, что ответ на этот вопрос зависит от T. При $T = 0{,}25$ (3 месяца до срока истечения) опцион исполнять не следует, так как его цена, 3,09, выше, чем та сумма, 3,0, которую можно получить при немедленном исполнении опциона пут. При $T = 0{,}0833$ (1 месяц до срока истечения) опцион следует исполнить.

5. Заключение

В этой работе дан обзор основных методов оценки опционов. Рассмотрены биномиальная модель, метод Монте-Карло, аналитическое и численное решение краевых задач для уравнений с частными производными. Ослабление условий идеального рынка с целью приближения «математического мира» к реальному миру приводит к серьезному усложнению «математического мира». Например, включение в анализ трансакционных издержек приводит к появлению существенно нелинейных членов в уравнении (6). Подобные вопросы остались за рамками нашего обзора.

Основное внимание в данной работе уделено оценке опционов на акции, однако те же методы, естественно, с необходимыми модификациями, применяются и для оценки опционов на другие виды имущества. Опционы относятся к классу финансовых инструментов, которые называют контингентными требованиями, то есть требованиями, возможными при определенных условиях. Кроме опционов в этот класс входят облигации с правом выкупа, кэп, фло и ряд других финансовых инструментов. Для их оценки также используются описанные математические методы. Используются они и для оценки фьючерсов и свопов.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабенко К.И. Основы численного анализа. - М.: Наука, 1986.*
2. *Cox J.C., Rubinstein M. Option Markets. -Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1985.*
3. *Dixit A.K., Pindyck R.S. Investment Under Uncertainty. - Princeton , Princeton Univ. Press, 1994.*
4. *Dumas B., Allaz B. Financial Securities: Market Equilibrium and Pricing Methods. - London: Chapman & Hall and Cincinnati: South-Western Publishing, 1996.*
5. *Edwards F.R., Ma C.W. Futures and Options. - N.Y., McGraw-Hill, 1992.*
6. *Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. - М.: Наука, 1965.*
7. *Gemmil G. Options Pricing. - N.Y., McGraw-Hill, 1992.*
8. *Hull J.C. Options, Futures and Other Derivative Instruments. - Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1997.*
9. *Ingersoll J.E. Theory of Financial Decision Making. - Totowa, N.J., Rowman and Littlefield, 1989.*
10. *Jarrow R., Rudd A. Option Pricing. - Homewood, Ill., Dow Jones - Irwin, 1983.*
11. *Jarrow R., Maksimovic V., Ziemba W., (eds.) Finance: Handbook in Operations Research and Management Science. - Amsterdam, North Holland, 1995.*
12. *Jarrow R. Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options. - N.Y., McGraw-Hill, 1996.*
13. *Karatzas I., Shreve S.E. Brownian Motion and Stochastic Calculus. - N.Y., Springer, 1988.*
14. *Lamberton D., Lapeyre B. Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. -London, Chapman & Hall, 1995.*
15. *McMillan L. Options as a Strategic Investment. - N.Y., New York Institute of Finance, 1980.*
16. *Merton R. Continuous - Time Finance. - Cambridge, MA/ Oxford, UK, Blackwell, 1990.*
17. *Rebonato R. Interest Rate Option Models. - N.Y. ,Wiley, 1996.*
18. *Schwartz R., Smith C. (eds.) Advanced Strategies in Financial Risk Management. - N.Y., New York Institute of Finance, 1993.*
19. *Trigeorgis L. Real Options. - Cambridge, MA, The MIT Press, 1996.*
20. *Turnbull S.M. Option Valuation.- N.Y., Holt, Rinehart and Winston, Dryden Press, 1987.*
21. *Wilmott P., Howison S., Dewynne J. The Mathematics of Financial Derivatives. A Student Introduction. - Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1995.*