## ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

# Оценка опционов и дельта-хеджирование применительно к фьючерсным контрактам на российском рынке

**Коркунов А.В.**

Во всех странах, где существуют мощные и стабильные финансовые рынки, очень большую роль играет торговля срочными контрактами. Портфели участников рынка, которые можно составить только из одних фондовых активов, по многим параметрам проигрывают портфелям, составленным из фондовых активов и срочных контрактов.

В данной работе показана возможность применения на российском срочном рынке дельта-хеджирования. Дельта-хеджирование - одна из наиболее распространенных методик защиты портфеля от рыночных рисков и получения прибыли. Также приведены некоторые результаты математического исследования, которые могут быть полезны при хеджировании и оценке срочных контрактов.

## Введение

На российском организованном срочном рынке до сих пор всегда имелось ограниченное количество производных финансовых инструментов. В работе рассматривается период первой половины 1998 г. Значительное внимание участников срочного рынка в это время было обращено на фьючерсные контракты на акции Лукойла. Также существовали опционы на данные контракты, но объемы операций с опционами были существенно меньше, чем с фьючерсами. В мировой же практике описано и реально используется множество разнообразных опционных стратегий, которые все-таки должны начать использоваться и на нашем рынке.

Опционы - это чрезвычайно интересные и полезные производные инструменты. Они позволяют инвестору создавать очень многие формы функциональных зависимостей будущих денежных потоков, определяемых будущей ценой одного или нескольких базовых активов. Эти формы создаются в зависимости от потребностей инвестора, прогнозов движения цен и его отношения к риску.

Рассмотрим подробнее период с начала апреля по начало мая 1998г. В это время на Московской Центральной Фондовой Бирже (МЦФБ) в обращении были опционы на ближайший по срокам истечения фьючерсный контракт и на следующий, то есть одновременно были представлены опционы на майский и июньский фьючерсные контракты на акции Лукойла. Дата истечения опционов

**Коркунов А.В.** - аспирант ГУ ВШЭ.

05 мая 1998г. и 04 июня 1998г., фьючерсных контрактов 15 мая и 15 июня соответственно.

Ликвидность опционных контрактов была низкая, разница между лучшей ценой покупки и лучшей ценой продажи (спрэд) достигала 200%. Но, тем не менее, в рассматриваемый период по некоторым опционам велась относительно активная торговля и спрэды снижались до 1-3%. Средний объем торгов по ближайшему фьючерсному контракту на акции Лукойла на МЦФБ составлял приблизительно 10-15 тысяч контрактов в день. Средний объем по наиболее ликвидному опционному контракту 300-400 контрактов в день. Для сравнения, по данным агентства “INO Global Markets” от 07 мая 1998 г., на Чикагской бирже опционов (CBOE) за апрель было заключено 12111000 контрактов (из которых 8461000-колл-опционов и 3650000 - пут-опционов). А всего с начала года заключено 44121845 контрактов со средним дневным объемом 538000 контрактов.

Исходя из вышесказанного, необходимо заключить, что, с одной стороны, набор опционов, предлагаемых инвестору, работающему в России, в этот период был весьма мал. С другой стороны, инвесторы не проявляли достаточного интереса к имеющимся опционам. Это связано с большой рискованностью операций на срочном рынке. Главным образом, это были риски, связанные с неспособностью биржи выполнить свои обязательства.

Цель данной работы показать, что несмотря на такое состояние срочного рынка, на нем возможно осуществление операций хеджирования с использованием опционов. Этот результат далеко не очевиден, поскольку объем российского рынка во много раз меньше, чем объемы тех рынков, для которых эта методика была создана и опробована. Тем не менее, из проведенного исследования можно сделать вывод, что общие законы рынков срочных контрактов оказались применимыми.

В первом параграфе приводятся особенности оценки опционов на фьючерсные контракты. Рассматриваются модификации моделей с непрерывным и дискретным временем. Во втором параграфе рассматривается исключительно важный для оценки опциона параметр - волатильность цены базового актива. Для расчета волатильности применяются два способа: нахождение исторической волатильности и нахождение внутренней волатильности с применением фактических цен опционов. В третьем параграфе проводится оценка опционов с использованием реальных данных, определяется величина дельта и оценивается возможность дельта-хеджирования на МЦФБ с использованием фьючерсных опционов и фьючерсов на акции Лукойла. Рассматриваются различные опционные стратегии. В четвертом параграфе оценивается эффективность дельта-хеджирования с использованием метода Монте-Карло.

Существует большое количество литературы, посвященной опционам. В списке литературы приведены работы на эту тему [1]-[12], [15]-[17]. Более подробные ссылки на некоторые из этих работ будут даны далее.

## 1. Оценка опциона на фьючерсный контракт

В теории и практике хорошо известны и наиболее широко используются в основном две модели для оценки опционов. Это модели с непрерывным и дискретным временем. В рамках первой выводится формула Блэка-Шоулза, в рамках второй используется, например, биномиальная модель.

Не останавливаясь на оценке опционов на акции, покажем особенности оценки опционов на фьючерсные контракты. В этом параграфе будет показано, что задача оценки таких опционов аналогична задаче оценки опционов на акции с непрерывно начисляемыми дивидендами.

### 1.1. Модель с непрерывным временем

Достаточно подробный вывод формулы для оценки опционов на фьючерсные контракты приведен в [8].

Используя стандартную процедуру построения портфеля, состоящего из опционов и базового актива, автор показывает, что цена опциона должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$0 = \frac{1}{2}\sigma^2 F^2 \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV \,, \tag{1.1}$$

где V - цена опциона, F - цена базового контракта, $\sigma$ - волатильность базового контракта, r - непрерывно начисляемая мгновенная ставка без риска.

Граничное условие для европейского колл-опциона (европейский опцион - опцион, который может быть исполнен только при наступлении даты истечения):

C(F, $T^*$, K, $T^*$) = max(0, F-К), где C - цена европейского колл-опциона, $T^*$ - дата истечения опциона, К - цена исполнения опциона.

Для американского колл-опциона (американский опцион − опцион, который может быть исполнен в любой момент до даты истечения) дополнительно следует наложить условие:

C(F, t, K, $T^*$) $\geq$ max(0, F-К), для всех t.

Отметим также, что при всех $t < T^*$ должно выполняться соотношение:

$0 \leq$ C(F, t, K, $T^*$) $\leq$ F, поскольку цена опциона не может быть меньше нуля и не может превосходить цену базового актива.

Полученное дифференциальное уравнение (1.1) эквивалентно уравнению для цены опциона на акцию, по которой выплачиваются дивиденды[10]:

$0 = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-y)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV$, где y - ставка непрерывно начисляемого дивиденда, S - цена акции. В случае оценки опциона на фьючерсный контракт ставка дивиденда равна ставке без риска, то есть y = r.

Конечно, никаких дивидендов на фьючерс не выплачивается, но из-за того, что позиция по фьючерсу не требует инвестиций, существует скрытый дивиденд, равный проценту, начисляемому на сбереженную сумму, которая была бы потрачена, если бы мы имели дело со спот рынком (спот рынок - рынок, на котором осуществляется немедленная поставка актива после совершения сделки). То есть для создания аналогичной позиции на спотовом рынке требуются дополнительные, по сравнению с фьючерсным рынком, денежные затраты. В нашем же случае эту сумму можно положить на депозит под ставку без риска.

Решение задачи Коши для уравнения (1.1) для европейского опциона колл может быть записано в виде формулы, похожей на формулу Блэка - Шоулза:

(1.2) $$C(F,\ t,\ K,\ T^*) = e^{-r(T^*-t)}[FN(d_1) - KN(d_2)],$$

где $d_1 = \dfrac{[\ln(\frac{F}{K}) + \sigma^2 (T^* - t)/2]}{\sigma\sqrt{(T^* - t)}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T^* - t}$ и N(.) - функция стандартного нормального распределения, $N(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{1}{2} y^2) dy$.

Для опциона пут решение может быть записано в виде:

(1.3) $$P(F,t,K,T^*) = -e^{-r(T^*-t)}[KN(-d_2) - FN(-d_1)].$$

### 1.2. Модель с дискретным временем

Как было указано ранее, оценка американского опциона на фьючерсный контракт может быть сведена к оценке опциона на акцию со ставкой непрерывно начисляемого дивиденда равной ставке без риска. Эта идея может быть реализована в рамках биномиальной модели. Подробное описание биномиальной модели приводится, например, в [4,12]. В данной работе показаны только особенности оценки опциона на фьючерс.

Напомним, в данной модели предполагается, что если цена фьючерса в некоторый момент времени равняется F, то в следующий момент времени цена фьючерса может быть равна одной из двух величин: uF или dF, где d<u. Движение до uF называется движением цены вверх и до dF - движением цены вниз. Вероятность движения цены вверх равна p и вероятность движения вниз (1-p).

Как показано в [12], для учета дивидендной доходности изменять алгоритм расчета, используемый для оценки опциона на акцию, не требуется, а надо видоизменить величины u и d. В частности, для случая p=1/2,

$$u = e^{(r-y)\Delta t}(1 + \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1}),\ d = e^{(r-y)\Delta t}(1 - \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1}).$$

Для опциона на фьючерс y=r. Поэтому $u = 1 + \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1}$, $d = 1 - \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1}$.

## 2. Определение волатильности базового актива

При оценке опциона важную роль играет понятие волатильности. Волатильность - это стандартное отклонение цены базового актива за единицу времени. Волатильность базового актива - наиболее сложный в определении фактор. При этом цена опциона очень чувствительна к этому параметру, и неправильная оценка волатильности приведет к большой погрешности при оценке опциона. В данной работе волатильность рассматривается как константа, а не как случайный процесс. Можно опереться на работы различных исследователей [5,7] и отметить, что для практических целей, с точки зрения оценки опциона, рассмотрение волатильности как стохастического процесса приводит к серьезным усложнениям, но не всегда дает адекватный выигрыш в точности. Однако существуют некоторые опционные стратегии, например временной спрэд, при создании которых инвестор ориентируется именно на изменчивость волатильности. В данной работе такие стратегии не рассматриваются по причине малой ликвидности на российском рынке опционов со сроком до истечения более одного месяца.

Существует множество различных методов для нахождения волатильности. Далее будут рассмотрены два способа нахождения волатильности для оценки опциона: по историческим данным и определение внутренней волатильности из наблюдаемых рыночных цен на опционы.

Методика определения исторической волатильности хорошо известна, поэтому далее для этого случая приводятся только результаты, а определение внутренней волатильности рассматривается более подробно.

В работах многих исследователей отмечен тот факт, что внутренняя волатильность предсказывает будущую волатильность рынка более точно, чем волатильность, найденная по историческим данным [7]. К сожалению, из формулы Блэка - Шоулза нельзя выразить волатильность в явном виде. Поэтому используются численные методы. В данной работе для получения значения переменной, заданной в уравнении в неявном виде, использован пакет прикладных программ “MATHEMATICA”.

Одним из основных допущений, лежащих в основе формулы Блэка-Шоулза, является гипотеза о логарифмически нормальном распределении цены базового актива. Поэтому перед тем как перейти непосредственно к определению волатильности и к оценке опционов необходимо проверить справедливость данной гипотезы. В данной статье для этой цели использовались критерий Колмогорова и критерий “$\omega^2$”. В результате значение статистики критерия Колмогорова $D_n$=0,1004, тогда как при уровне значимости $\alpha$=0,05 критическое значение $k_{0,95}$=0,1942 [13]. Следовательно, нет оснований отвергать гипотезу нормальности. Значение статистики критерия $\omega^2$ = 0,083, при том же уровне значимости критическая точка $a_{0,95}$ = 0,46 [13], то есть данный критерий также подтверждает проверяемую гипотезу. Теперь можно перейти к нахождению внутренней волатильности опционов.

В [5] показано, что для целей хеджирования лучше других подходит самое простое выражение для волатильности, а именно просто внутренняя волатильность, полученная из наблюдаемых цен на опционы.

Из эмпирических тестов известно [1,7,11], что внутренняя волатильность разная для опционов с разным сроком истечения и с разными ценами исполнения. Этот эффект называется “улыбкой волатильности”. Один способ найти в данном случае правдивую величину волатильности - это посчитать средневзвешенную величину.

Пусть $\sigma^*(t_i, K_i)$ - внутренняя волатильность для i-го колл-опциона со временем до истечения $t_i$ и ценой исполнения $K_i$. Тогда $\sigma^* = \sum_{i=1}^{I} (\frac{w_i}{\sum_i w_i}) \sigma^*(t_i, K_i)$, где $w_i$ - вес, приписываемый i-му колл-опциону, и I - общее количество опционов колл, имеющихся для данного инструмента. Так как некоторые опционы более чувствительны к волатильности, то им следует придать большие веса. Известно, что опционы "у денег" реагируют сильнее на изменение волатильности, чем опционы "в деньгах" или "без денег" (опцион "у денег" (at the money) - текущая цена базового актива приблизительно равна цене исполнения опциона; опцион "в деньгах" (in the money) - текущая цена базового актива больше цены исполнения для опциона колл или меньше цены исполнения для опциона пут; опцион "без денег" (out the money) - текущая цена базового актива меньше цены исполнения для опциона колл или больше цены исполнения для опциона пут). Во-первых, можно попытаться захватить этот эффект, определив вес $w_i$ равным веге опциона. Вегой опциона называется величина $\frac{\partial C_i}{\partial \sigma_i^*}$, то есть чувствительность колл-опциона к его внутренней волатильности. Во-вторых, можно определить $w_i = \Omega_i$, где $\Omega = \frac{\partial C}{\partial F}\frac{F}{C}$ - эластичность колл-опциона, посчитанная из его внутренней волатильности. И последнее, можно вообще исключить из рассмотрения опционы "глубоко в деньгах" и "глубоко без денег" из-за их минимальной чувствительности к изменениям волатильности.

С другой стороны, надо преодолеть следующее противоречие: выше указано, что для определения внутренней волатильности необходимо использовать европейские опционы, а в данной работе рассматриваются американские опционы. Однако известно (см., например, [1]), что формула Блэка-Шоулза дает достаточно хорошую оценку для американских опционов со сроком до истечения меньше 6 месяцев, поэтому в данной статье никаких поправок, связанных с типом опциона, не делается.

В данной работе для нахождения внутренней волатильности использовались цены по наиболее ликвидным опционным контрактам. Для исключения временного сдвига между спот ценой (т.е. ценой базового фьючерсного контракта) и ценой опционного контракта фиксировался момент совершения сделки по опциону и с ним сопоставлялась средняя цена по сделкам на фьючерсные контракты, совершенным в течение предшествующей минуты. Ставка без риска принималась постоянной и равной 25% годовых.

В результате внутренняя волатильность незначительно колеблется вокруг 40% в годовом выражении.

Историческая волатильность цены фьючерсного контракта на 7 апреля 1998 г., посчитанная по данным торгов на МЦФБ начиная с 21 июля 1997 г., составила 57,2%. По данным начиная с 5 января 1998 г. - 48,3% и по данным с 01 марта 1998 г. - 39,1%.

В принципе последняя цифра наиболее точно отражала текущую ситуацию на рынке, так как начиная с конца февраля, рынок вел себя достаточно стабильно, без резких перепадов цен. Надо отметить, что реализованная волатильность для цен на фьючерсные контракты за период с 07 апреля по 05 мая 1998 г. составила 22,7% в годовом выражении. Для цен на акции за тот же период времени - 23,2%.

# 3. Дельта-хеджирование

## 3.1. Теория дельта-хеджирования

Хеджирование – это уменьшение чувствительности портфеля к движению цены базового актива путем занятия противоположных позиций в различных финансовых инструментах. Величина $\Delta = \frac{\partial V}{\partial F}$ называется дельтой опциона и показывает на сколько изменится цена опциона при изменении цены базового актива. Эта величина имеет большое значение и в теории, и в практике. Дельта активно используется при хеджировании. Важное свойство дельты заключается в том, что она аддитивна, то есть трейдеру, управляющему портфелем опционов, не нужно хеджировать по отдельности каждый опционный контракт. Достаточно определить $\Delta$ всего портфеля, которая будет равна $\Delta_n = n_1\Delta_1 + n_2\Delta_2 + ...n_m\Delta_m$, где $n_m, \Delta_m$ – соответственно количество и дельта m-го опционного контракта, которую и следует использовать при хеджировании.

Дельта-хеджирование может использоваться в двух направлениях:

1. Маркет-мейкерами, которые обязаны поддерживать свои позиции в опционах, для защиты от рыночных рисков.

2. Крупными участниками, которые имеют низкие трансакционные издержки, для увеличения прибыли.

Наиболее часто рассматривается второй случай [4,6,8,11,12]. Основная идея заключается в том, чтобы на начальном этапе определить переоцененные опционы и построить хеджированную позицию путем продажи опционов и занятия противоположной позиции в базовом инструменте в количестве дельта. В дальнейшем величина спотовой позиции регулируется в зависимости от величины дельта. Этим достигается защита от рыночных рисков и получение прибыли.

В реальности цена опциона зависит от большого количества факторов. Здесь, как и ранее, делается упрощающее предположение, что она зависит только от следующих переменных факторов: времени до истечения контракта t, спотовой цены базового актива S, ставки без риска r и волатильности $\sigma$ базового инструмента. То есть при тех же предпосылках, при которых выведена формула Блэка - Шоулза, для цены опциона колл на акцию можно записать: $C = f(S, r, t, \sigma)$. Для опциона на фьючерсный контракт величина S будет заменена спотовой ценой базового фьючерса F: $C = f(F, r, t, \sigma)$. В дальнейшем, при рассмотрении производных от цены опциона, подразумевается, что она определяется по модифицированным формулам Блэка - Шоулза для опционов на фьючерсы (1.2) и (1.3).

Основной фактор риска - это спот цена базового актива. При выводе формулы Блэка-Шоулза устанавливается, что владение опционом эквивалентно владению долей базового актива, когда величина этой доли динамически изменяется во времени, и некоторыми безрисковыми облигациями.

Для опциона колл при росте спотовой цены величина позиции в базовом активе увеличивается, при снижении цены - уменьшается. Можно показать[8,9], что для европейского опциона колл на фьючерсный контракт:

(3.1) $$\Delta = \frac{\partial C}{\partial F} = e^{-rt} N(d_1)\text{, где } d_1 = \frac{[\ln(\frac{F}{K}) + \sigma^2 (T^* - t)/2]}{\sigma\sqrt{(T^* - t)}}.$$

Дельта для опциона колл всегда положительна и меньше единицы.

Аналогично для опциона пут на фьючерсный контракт можно показать:

(3.2) $$\Delta = \frac{\partial P}{\partial F} = e^{-rt} (N(d_1) - 1),$$

дельта в данном случае всегда отрицательна и больше -1. Владение пут-опционом эквивалентно короткой позиции по базовому активу в размере $\Delta$ в сочетании с некоторыми облигациями.

### 3.2. Хеджирование с использованием цен реальных сделок на МЦФБ

Для проведения эмпирических тестов данные готовились следующим образом. Для исключения из рассмотрения нереальных цен сделок, которые бывают на неликвидном рынке, были отобраны опционы, по которым в течение дня заключено не менее 50 контрактов.

Цене закрытия по каждому опциону ставилась в соответствие не цена закрытия по фьючерсному контракту, а цена фьючерсного контракта, фиксируемая в момент совершения последней сделки с опционом. Это необходимо для исключения временного сдвига цен закрытия фьючерсных контрактов и опционов.

Для каждого опциона определялась его теоретическая цена, рассчитанная с использованием модификации формулы Блэка - Шоулза для опционов на фьючерсы (1.2) и (1.3) и находилась дельта опциона по формулам (3.1) и (3.2).

Все расчеты проводились с использованием внутренней волатильности, определенной в параграфе 2. Ставка без риска, как и ранее, принимается постоянной и равной 25% годовых.

Рассматривались следующие опционные стратегии:

- продажа опционов колл и покупка фьючерсных контрактов в количестве $\Delta$;
- продажа опционов пут и продажа фьючерсных контрактов в количестве $\Delta$;
- одновременная продажа опционов пут и колл с одинаковой датой истечения, с одинаковой ценой исполнения.

Базовый актив для всех опционов - фьючерсный контракт на сто акций Лукойла с датой поставки 15 мая 1998г.

Во всех случаях основной целью является поддерживать дельту позиции насколько это возможно близкой к нулю. Позиции пересматриваются один раз в день, в момент совершения последней сделки с опционом или последней сделки с фьючерсным контрактом. Трансакционные издержки в данной работе не учитывались. Результаты применения стратегии дельта-хеджирования описаны в разделе 3.3.

### 3.3. Продажа опционов колл и покупка фьючерсных контрактов

Рассматривается опцион колл с ценой исполнения 110 руб. за акцию, срок истечения 05 мая 1998 г. Данный опцион являлся самым ликвидным опционным контрактом за период с 7 апреля по 5 мая 1998 г.

Для удобства округления при расчете дельты позиции в начальный момент времени продается сто опционов.

07 апреля последняя сделка с опционом на бирже была совершена по цене 3,70 руб. за акцию. Теоретическая цена опциона равна 3,704, то есть практически совпадает с фактической. Следовательно, нет оснований отказываться от создания хеджированной позиции.

Опцион заключается на фьючерсный контракт на сто акций, следовательно, его фактическая стоимость равна 370 руб. Первоначальный денежный поток состоит из средств, полученных от продажи ста опционов колл, и равен 37000 руб. Хеджирование осуществляется посредством покупки или продажи фьючерсных контрактов. В конце каждого дня по цене закрытия для фьючерсного контракта определяется дельта всей позиции. Если она не равна нулю, проводится покупка или продажа фьючерсных контрактов. Из-за изменения фьючерсной цены происходит начисление или списание вариационной маржи.

Начальные средства, необходимые для создания такой позиции, можно (пренебрегая маржевыми требованиями для опционов) считать равными залоговым средствам, требуемым биржей для обеспечения фьючерсных контрактов в начальный момент времени. 07 апреля требуется купить 47 фьючерсов. Цена сделки с фьючерсным контрактом равна в этот момент 108,73. Котировочная цена фьючерсного контракта в этот день равна 108,97. Необходимые залоговые средства для обеспечения фьючерсных контрактов равны: 47•108,97•100•10%=51215,9 руб. Если полученную позицию (100 коротких опционов колл и 47 длинных фьючерсов) сохранять неизменной, то вид платежной функции был бы следующим:

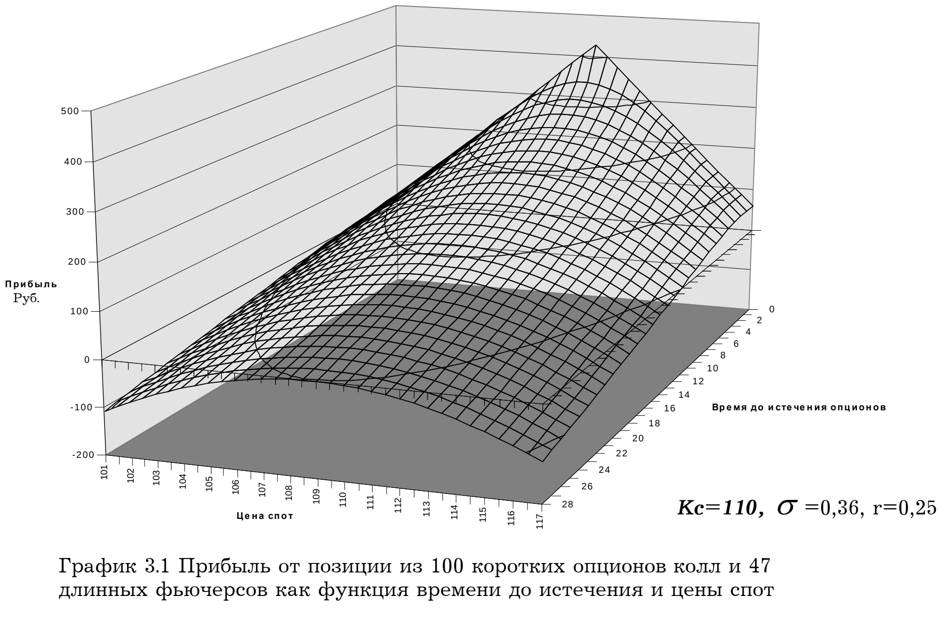


График 3.1 Прибыль от позиции из 100 коротких опционов колл и 47 длинных фьючерсов как функция времени до истечения и цены спот

На графике 3.1 показаны платежи на позицию в течение всей жизни опциона в зависимости от времени до истечения и от цены спот в расчете на один опцион. Но основная задача хеджирования - не допустить суммарного отрицательного денежного потока на портфель. Именно для этого осуществляется постоянный пересмотр позиций.

В результате, в данной позиции к моменту истечения, опционы оказываются "без денег" и, соответственно, не исполняются. Положительный денежный поток на созданную позицию составил 6223 руб., что составляет приблизительно 12% от вложенной суммы.

Рассматриваются еще две позиции: продажа опционов пут и продажа фьючерсов в количестве $\Delta$; и одновременная продажа опционов пут и колл с одинаковой датой истечения, с одинаковой ценой исполнения. Во всех случаях прибыль превышала 10% на вложенные средства.

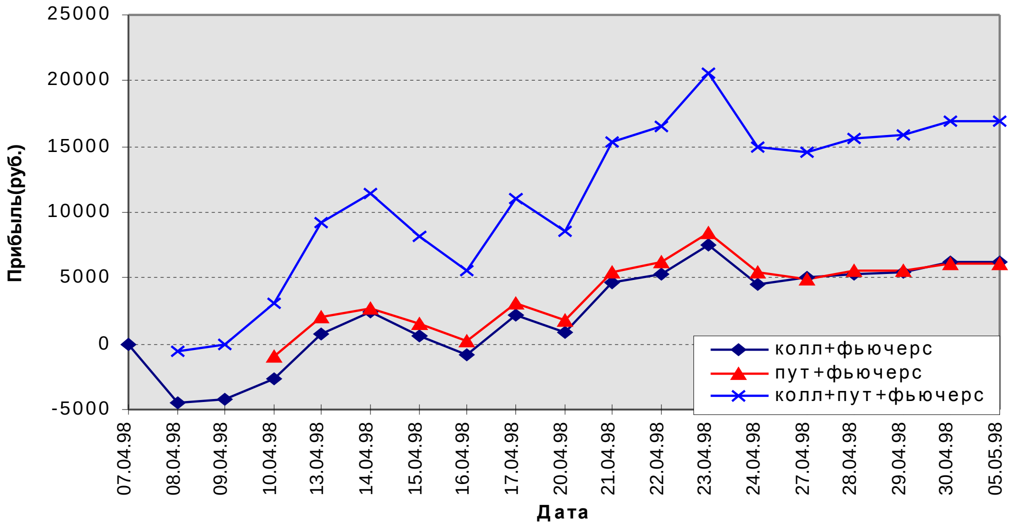


График 3.2 Прибыль при ликвидации позиции

На графике 3.2 приведена прибыль, которая была бы получена при ликвидации позиции в конец дня. Фьючерсные контракты реализуются по цене закрытия, опционы - по теоретической цене.

## 4. Использование метода Монте-Карло для оценки эффективности дельта-хеджирования

Для изучения того, как частота пересмотра портфеля влияет на результаты применения стратегии дельта-хеджирования, может быть использован метод Монте-Карло, называемый также методом статистического моделирования. Этот метод позволяет также, не прибегая к сложным формулам, на конкретных цифрах увидеть результаты дельта-хеджирования при различных сценариях изменения цены фьючерса.

При использовании метода Монте-Карло проводится большое число независимых испытаний. В каждом испытании строится свой временной ряд для цен фьючерсного контракта. При построении этого ряда используется набор независимых нормальных случайных чисел $\xi_i$ с математическим ожиданием 0 и стандартным отклонением 1. Для построения этих случайных чисел по равномерно распределенным на отрезке [0,1] случайным числам $R_i$ используется следующий прием.

По центральной предельной теореме величина $\xi = \frac{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i) - \mu}{(\sigma / \sqrt{n})}$ примерно распределена N(0,1), где $\mu = E(R_i)$, $\sigma = \sigma(R_i)$ при больших n. Нами взято значение $n = 30$. В дальнейшем для нахождения $\xi$ использовалась приведенная выше формула.

Исходя из предпосылки логарифмически нормального распределения цен, для определения цены фьючерсного контракта использовалась следующая формула: $F_{t+\Delta t} = \exp((\ln F)_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\xi\sqrt{\Delta t})$, где F - цена фьючерса, $\mu$ - ожидаемый рост цены, $\sigma$ - волатильность цены фьючерсного контракта, $\xi$ - требуемое случайное число из N(0, 1), $t$ - время. При расчете использовались параметры: $\mu = r$, $\sigma$ = 40 % годовых, $r = 25\%$ годовых, цена исполнения $K_c = 110$, цена фьючерса в начальный момент времени $F_0 = 110$. Было проведено 1000 испытаний. Для каждого испытания временной ряд состоит из 61 значения для цен. В каждом испытании в первоначальный момент осуществлялась продажа 100 опционов колл по теоретической цене, рассчитанной по формуле (1.2), и впоследствии позиция пересматривалась путем продажи или покупки фьючерсных контрактов для поддержания дельты позиции равной нулю. В итоге после исполнения опционов, если они “в деньгах”, или закрытия опционов, если они “без денег”, определялись суммарные издержки на осуществление дельта-хеджирования: $x_i$, для $i = 1,\dots,1000$. В таблице 1 для одного из испытаний показаны все операции, связанные с дельта-хеджированием. Цифры в столбцах “Затраты на покупку” и “Кумулятивные издержки” вспомогательные, так как реально покупка фьючерса не требует инвестиций (если пренебречь маржевыми требованиями).

В последний день позиция содержит 100 опционов и 100 фьючерсных контрактов. Так как цена фьючерса превышает цену исполнения, опционы исполняются. Суммарные издержки на осуществление дельта-хеджирования $x_i$ в этом испытании равны 6,553 в расчете на один опцион или 655,32 в расчете на всю позицию.

Приведем для 1000 проделанных испытаний значения $\bar{x} = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} x_i = 6{,}84$, и $s^2 = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}(x_i - \bar{x})^2 = 0{,}71$ Выборочная дисперсия $s^2$ уменьшается при более частом пересмотре портфеля.

**Таблица 1.**

| День | Цена фьючерса | Дельта | Количество купленных фьючерсов | Затраты на покупку | Фьючерсов в портфеле - всего | Кумулятивные издержки | Стоимость опциона по формуле Блэка-Шоулза (1.2) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 110,00 | 0,51 | 51 | 5610,00 | 51 | 5610,00 | **6,82** |
| 2 | 108,14 | 0,47 | -4 | -432,57 | 47 | 5177,43 | 5,86 |
| 3 | 106,11 | 0,42 | -5 | -530,57 | 42 | 4646,87 | 4,90 |
| 4 | 105,92 | 0,42 | 0 | 0,00 | 42 | 4646,87 | 4,76 |
| 5 | 105,14 | 0,40 | -2 | -210,28 | 40 | 4436,58 | 4,39 |
| 6 | 105,58 | 0,41 | 1 | 105,58 | 41 | 4542,16 | 4,52 |
| 7 | 108,96 | 0,49 | 8 | 871,67 | 49 | 5413,83 | 5,98 |
| 8 | 110,42 | 0,52 | 3 | 331,27 | 52 | 5745,10 | 6,66 |
| 9 | 111,15 | 0,54 | 2 | 222,31 | 54 | 5967,41 | 6,99 |
| 10 | 108,99 | 0,49 | -5 | -544,94 | 49 | 5422,47 | 5,82 |
| 11 | 110,77 | 0,53 | 4 | 443,07 | 53 | 5865,54 | 6,67 |
| 12 | 112,24 | 0,56 | 3 | 336,71 | 56 | 6202,25 | 7,42 |
| 13 | 113,34 | 0,59 | 3 | 340,03 | 59 | 6542,28 | 8,00 |
| 14 | 113,08 | 0,58 | -1 | -113,08 | 58 | 6429,20 | 7,78 |
| 15 | 111,90 | 0,56 | -2 | -223,79 | 56 | 6205,41 | 7,05 |
| 16 | 112,27 | 0,57 | 1 | 112,27 | 57 | 6317,67 | 7,19 |
| 17 | 111,86 | 0,56 | -1 | -111,86 | 56 | 6205,81 | 6,90 |
| 18 | 115,85 | 0,65 | 9 | 1042,64 | 65 | 7248,46 | 9,26 |
| 19 | 116,85 | 0,68 | 3 | 350,54 | 68 | 7599,00 | 9,87 |
| 20 | 119,01 | 0,72 | 4 | 476,04 | 72 | 8075,05 | 11,33 |
| 21 | 117,46 | 0,69 | -3 | -352,37 | 69 | 7722,67 | 10,17 |
| 22 | 115,66 | 0,66 | -3 | -346,99 | 66 | 7375,68 | 8,90 |
| 23 | 115,57 | 0,66 | 0 | 0,00 | 66 | 7375,68 | 8,78 |
| 24 | 120,62 | 0,76 | 10 | 1206,22 | 76 | 8581,91 | 12,32 |
| 25 | 120,67 | 0,77 | 1 | 120,67 | 77 | 8702,58 | 12,30 |
| 26 | 125,09 | 0,84 | 7 | 875,64 | 84 | 9578,22 | 15,83 |
| 27 | 121,71 | 0,79 | -5 | -608,55 | 79 | 8969,68 | 13,01 |
| 28 | 121,55 | 0,80 | 1 | 121,55 | 80 | 9091,22 | 12,84 |
| 29 | 121,83 | 0,80 | 0 | 0,00 | 80 | 9091,22 | 13,01 |
| 30 | 123,14 | 0,83 | 3 | 369,43 | 83 | 9460,65 | 14,04 |
| 31 | 122,24 | 0,82 | -1 | -122,24 | 82 | 9338,41 | 13,25 |
| 32 | 121,60 | 0,81 | -1 | -121,60 | 81 | 9216,81 | 12,68 |
| 33 | 123,07 | 0,84 | 3 | 369,22 | 84 | 9586,02 | 13,85 |
| 34 | 118,40 | 0,75 | -9 | -1065,56 | 75 | 8520,46 | 10,05 |
| 35 | 115,98 | 0,70 | -5 | -579,88 | 70 | 7940,57 | 8,23 |
| 36 | 116,11 | 0,70 | 0 | 0,00 | 70 | 7940,57 | 8,25 |
| 37 | 114,44 | 0,66 | -4 | -457,77 | 66 | 7482,80 | 7,03 |
| 38 | 113,90 | 0,64 | -2 | -227,79 | 64 | 7255,01 | 6,59 |
| 39 | 112,97 | 0,62 | -2 | -225,95 | 62 | 7029,06 | 5,92 |
| 40 | 113,32 | 0,63 | 1 | 113,32 | 63 | 7142,38 | 6,05 |
| 41 | 115,22 | 0,70 | 7 | 806,57 | 70 | 7948,95 | 7,22 |
| 42 | 115,97 | 0,72 | 2 | 231,95 | 72 | 8180,90 | 7,67 |
| 43 | 117,42 | 0,77 | 5 | 587,08 | 77 | 8767,97 | 8,67 |
| 44 | 112,89 | 0,63 | -14 | -1580,48 | 63 | 7187,49 | 5,39 |
| 45 | 116,14 | 0,75 | 12 | 1393,72 | 75 | 8581,22 | 7,53 |
| 46 | 115,24 | 0,72 | -3 | -345,73 | 72 | 8235,49 | 6,78 |
| 47 | 118,44 | 0,83 | 11 | 1302,86 | 83 | 9538,35 | 9,18 |
| 48 | 119,43 | 0,86 | 3 | 358,28 | 86 | 9896,62 | 9,94 |
| 49 | 125,61 | 0,96 | 10 | 1256,05 | 96 | 11152,67 | 15,59 |
| 50 | 126,27 | 0,97 | 1 | 126,27 | 97 | 11278,94 | 16,22 |
| 51 | 123,82 | 0,96 | -1 | -123,82 | 96 | 11155,12 | 13,84 |
| 52 | 122,89 | 0,96 | 0 | 0,00 | 96 | 11155,12 | 12,92 |
| 53 | 119,44 | 0,92 | -4 | -477,75 | 92 | 10677,38 | 9,64 |
| 54 | 122,12 | 0,97 | 5 | 610,60 | 97 | 11287,98 | 12,14 |
| 55 | 121,53 | 0,97 | 0 | 0,00 | 97 | 11287,98 | 11,54 |
| 56 | 118,30 | 0,94 | -3 | -354,90 | 94 | 10933,07 | 8,41 |
| 57 | 118,68 | 0,96 | 2 | 237,37 | 96 | 11170,44 | 8,73 |
| 58 | 120,93 | 0,99 | 3 | 362,80 | 99 | 11533,24 | 10,92 |
| 59 | 122,08 | 1,00 | 1 | 122,08 | 100 | 11655,32 | 12,07 |
| 60 | 119,03 | 1,00 | 0 | 0,00 | 100 | 11655,32 | 9,02 |
| 61 | 114,22 | 1,00 | 0 | 0,00 | 100 | **655,32** | 4,22 |

Теоретическая цена в момент открытия позиции равна 6,82.

Так, если временной ряд для каждого испытания состоит из 16 значений, что соответствует пересмотру позиции через 4 дня, то по результатам 1000 испытаний получены величины: $\bar{x} = 7{,}01$, и $s^2 = 2{,}86$.

Если временной ряд для каждого испытания состоит из 31 значения, то есть позиция пересматривалась один раз в два дня, то по результатам 1000 испытаний получены величины: $\bar{x} = 6{,}95$, и $s^2 = 1{,}48$.

Результаты расчетов показывают, что при увеличении частоты пересмотра портфеля величины $\bar{x}$ приближаются к теоретической цене опциона. Отношение выборочной дисперсии $s^2$ к теоретической цене опциона при увеличении частоты пересмотра позиции уменьшается.

Это показывает, что если первоначально купленный или проданный опцион был оценен правильно, то применение стратегии дельта-хеджирования позволяет при любом изменении цены фьючерса получить нормальную прибыль, равную ставке без риска. Но если опцион был недооценен или переоценен, то дельта-хеджирование позволяет получить соответствующую прибыль.

* *
*

## *СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*


1. *Bates D.S., Post-'87 Crash Fears in S&P Futures Options − NBER Working Paper № 5894, Cambridge, MA 02138, January 1997.*
2. *Black F. and Sholes M.S., The Pricing of Options And Corporate Liabilities, - Journal of Political Economy 81, 1973, p. 637-659.*
3. *Cox J., Ross S, Rubinstein M., Option Pricing: A Simplified Approach, - Journal of Financial Economics 7, 1979, p. 229 - 263.*
4. *Cox J., Rubinstein M., Option Markets, - Englewood Cliffs, N.J., Prentice - Hall, 1985.*
5. *Dumas B., Fleming J., Whaley R., Implied Volatility Functions: Empirical Tests, - NBER Working Paper № 5500, Cambridge, MA 02138, March 1996.*
6. *Eades S., Options, Hedging and Arbitrage, − Mcgraw - Hill, 1992.*
7. *Ghysels E., Harvey A., Renault E., Stochastic Volatility, - Paper for Handbook of Statistics, vol. 14: Statistical Methods in Finance, CIRANO, Montreal, 1995.*
8. *Hull J C., Options, Futures, and Other Derivatives. Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1989.*
9. *Jorion Ph., Value At Risk: The New Benchmark For Controlling Market Risk, - Mcgraw - Hill, 1997.*
10. *Merton R.C., Theory of Rational Option Pricing. - Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, p. 141-183.*
11. *Ritchken P., Options: Theory, Strategy, and Applications, - Glenview, IL: Scott, 1987.*
12. *Wilmott P., Howison S., Dewynne J., The Mathematics of Financial Derivatives. A Student Introduction, - Cambridge, Cambridge University Press, 1995.*
13. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. − М.: Наука, 1983.*
14. *Бочаров П.П., Печинкин А.В. Математическая статистика. − М.: РУДН, 1994г.*
15. *Буренин А.Н. Рынки производных финансовых инструментов. − М.: ИНФРА-М, 1996.*
16. *Шарп У., Гордон А., Бэйли Д. Инвестиции. − М.: ИНФРА-М, 1997.*
17. *Шведов А.С. О математических методах, используемых при работе с опционами // Экономический журнал ВШЭ, **2**, № 3, 1998. С. 385-409.*