ЛЕКЦИОННЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Лекции по моделям макроэкономики

Смирнов А.Д.

Журнал заканчивает публикацию курса лекций по моделям макроэкономики, который на протяжении ряда лет читается профессором Смирновым А.Д. на первом курсе магистратуры Государственного университета Высшей школы экономики. Лекции могут использоваться студентами и аспирантами экономических факультетов университетов для изучения экономической теории, макроэкономического моделирования и проблем переходной экономики.

Лекция 9. Колебания и стабилизация инфляции

Исследование реального рынка в переходной экономике, проведенное в лекции 8, дает возможность конкретизировать модель инфляции (8.10) или (8.11) с учетом функции состояния реального рынка (8.19). Подставив (8.19) в (8.11), получаем систему уравнений модели переходной экономики:

$$
(9.1)\qquad \begin{aligned} \dot{p} &= \mu[\rho - (\tfrac{1}{3}p^3 - p)] \\ \dot{\rho} &= \tfrac{1}{\mu}[m - p]. \end{aligned}
$$

Эквивалентным представлением (9.1) является нелинейное уравнение

$$
(9.2)\qquad \ddot{p} + \mu(p^2 - 1)\dot{p} + p = m\,,
$$

которое носит название *уравнения ван дер Поля* и характеризует так называемые *релаксационные колебания.* При $\mu \neq 0$ и значениях логцен $p > 1$ уравнение (9.2) моделирует подавленные колебания, но как только уровень логцен снижается ниже порога $p > 1$, колебания начинают усиливаться. Объяснение этого процесса может быть следующим.

По своему смыслу в данной модели чувствительность функции состояния рынка

$$
y'(p) \equiv \frac{dy}{dp} = \frac{d}{dp}(-p + \tfrac{1}{3}p^3)
$$

Смирнов А.Д. - профессор, доктор экономических наук, действительный член Российской академии естественных наук; ГУ ВШЭ.

характеризует изменение размеров реального дохода при изменении индекса-дефлятора цен на один процент, а значит, величина реального дохода может расти (падать) с увеличением или снижением логцен. Поскольку чувствительность агрегированного спроса фиксирована как минус единица, а чувствительность агрегированного предложения измеряется по уровню логцен, то размерность чувствительности рынка приведена к единице. Если модуль уровня цен меньше единицы, то реальный доход снижается по мере роста цен; и наоборот, когда модуль уровня цен больше единицы, то реальный доход растет по мере роста цен и снижается при их понижении. Это объясняет природу колебательного процесса в данной системе: падение чувствительности реального дохода до уровня, меньшего единицы, увеличивает амплитуду роста логцен, или инфляцию; наоборот, при чувствительности большей единицы, цены уменьшаются.

Согласно *теореме Льенара* уравнение ван дер Поля имеет единственный и устойчивый предельный цикл [3]. Переходной экономике, если ее поведение моделируется уравнением ван дер Поля, следовательно, свойственен внутренний механизм, поддерживающий колебательный цикл инфляция-дефляция на достаточно высоком уровне и неопределенно долго[1)]. В отличие от линейных осцилляторов решения уравнения релаксационного осциллятора в аналитическом виде не существует, а уравнение ван дер Поля интегрируется численно.

Уравнение (9.2) при значении параметра $\mu=0$ превращается в уравнение простого гармонического осциллятора:

$$\ddot{p} + p = 0 ,$$

которое моделирует инфляционные колебания в условиях полной конкуренции.

Переходная экономика, как было установлено выше, характеризуется явно выраженными нелинейностями, которые влияют на поведение системы и вносят в него изменения по сравнению с линейными моделями. В частности, модели гармонических колебаний существенно модифицируются: экономические циклы инфляционного характера могут существовать неопределенно долго и представляться предельными циклами, т.е. замкнутыми изолированными траекториями. Устойчивые предельные циклы чрезвычайно интересны тем, что они моделируют поведение систем, которые могут сколь угодно долго поддерживать колебания фазовых переменных, даже если отсутствуют внешние силы их порождающие. Следовательно, если асимптотически поведение переходной экономики представлено траекторией, тяготеющей к устойчивому предельному циклу, то оно порождается только структурой системы, обусловливающей бесконечные колебания цен между инфляцией и дефляцией.

Линейные осцилляторы лишены этого свойства. Линейная система второго порядка может, правда, иметь замкнутую траекторию: если корни системы - чисто мнимые, то траектории такой системы представляют собой однопараметрическое семейство замкнутых орбит. Но замкнутые орбиты линейной системы не изолированы: амплитуда линейных колебаний целиком определяется начальными условиями, и любое малое возмущение амплитуды как бы фиксируется, сохраняется навсегда. В отличие от линейных осцилляций, колебания, представленные

[1)] Экономические модели, приводящие к релаксационным колебаниям можно найти в работах Р. Гудвина [6].

предельным циклом, порождены самой структурой нелинейной системы, а влияние начальных условий с течением времени исчезает. Иными словами, колебания здесь - это порождение структуры, организации системы, ее принципиально нелинейного характера.

9.1 Поведение нелинейной инфляционной системы

Рассмотрим поведение переходной экономики в условиях сильной нелинейности, т.е. при больших значениях параметра $\mu >> 1$, когда фактическая инфляция чрезвычайно чутко реагирует на изменения соотношений между ожиданиями и сбалансированностью рынка. Экономически сильная нелинейность осциллятора ван дер Поля свидетельствует о наличии значительной «нерыночности» в переходной экономике, имеющей место либо в начальный период трансформации, либо из-за непоследовательности и некомплексности реформ.

Разделив второе уравнение системы (9.1) на первое, получаем:

$$d\rho/dp = -p/\mu^2 [\rho - y(p)]^{-1},$$

или

$$[\rho - y(p)]\, d\rho/dp = -p/\mu^2 . \tag{9.3}$$

При очень больших значениях μ правая часть уравнения (9.3) становится практически равной нулю и, следовательно, имеет место соотношение:

$$[\rho - y(p)]\, d\rho/dp = 0 , \tag{9.4}$$

моделирующее поведение макроэкономики в условиях нелинейности, которая содержательно предстает как неполная в переходный период конкуренция.

Соотношение (9.4), в свою очередь, имеет место либо при $\rho = y(p)$, т.е. когда система находится на кривой состояния конкурентного рынка, либо при $d\rho/dp = 0$, следовательно, система находится на траектории $\rho = const$. Таким образом, в условиях действия неполной конкуренции, следовательно, при сильной нелинейности макроэкономической системы, ее траектория совершает колебания вдоль орбиты $ABCD$, изображенной на рис. 9.1, и представляет макроэкономический предельный цикл инфляция-дефляция, который может реализоваться неопределенно долго. Исключением

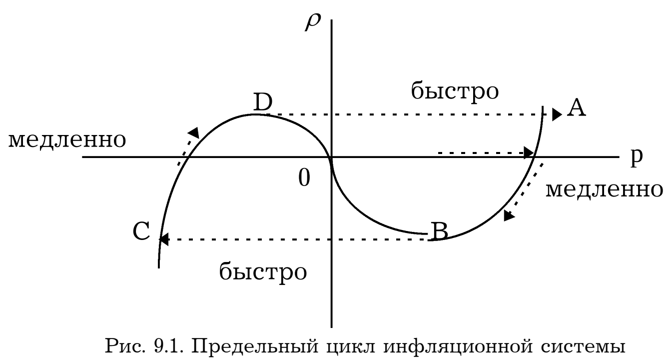

Рис. 9.1. Предельный цикл инфляционной системы

является только ситуация, когда система находится изначально в состоянии макроэкономического равновесия, в котором она и будет пребывать.

Динамика макроэкономики переходного периода формально представляется следующей траекторией. Начинаясь из любой точки плоскости «ожидания-логцены», *кроме начала*, макроэкономика очень быстро движется в направлении кривой состояния рынка $y(p)$, а затем медленно перемещается вдоль нее до точки локального максимума или минимума, после чего снова перескакивает на другую ветвь той же кривой. Экономически это означает, что данная модель характеризует предельный макроэкономический цикл, состоящий в последовательной смене фаз рецессии, равновесия и подъема, причем скачкообразные перемещения системы между ветвей кривой состояния рынка - это процессы инфляции и дефляции.

9.2 Описание цикла «инфляция-дефляция»

Для того, чтобы обосновать данную качественную картину, прибегнем к рассуждениям, используя категории *теории размерности*. Для простоты пока абстрагируемся от влияния денег, положив $m = 0$. Поведение системы иллюстрировано на рис. 9.2.

Предположим, к примеру, что первоначальное положение системы задано в точке A плоскости «ожидания-логцены», которая находится выше кривой сбалансированности рынка и не очень близко от нее. В этом случае согласно первому уравнению системы (9.1) разность между ожидаемыми и фактическими состояниями рынка положительна $[\rho - y(p)] > 0$. Следовательно, первая производная логарифма индекса цен положительна - экономика инфляционна, и система приближается к кривой состояния конкурентного рынка. Тем самым направление эволюции системы задано.

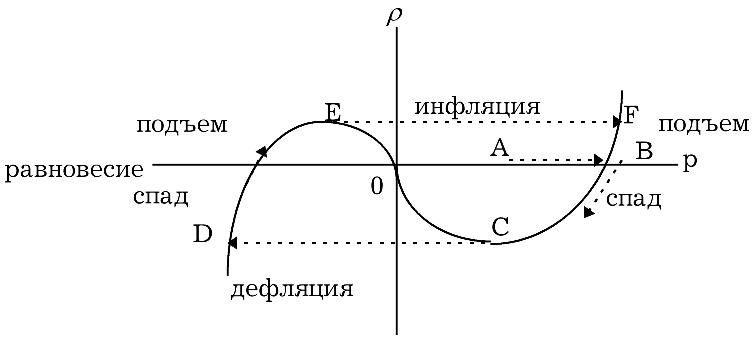

Рис. 9.2. Поведение переходной макроэкономики

Порядок разности первоначально пусть равен единице: $\rho - y(p) \approx O(1)$, т.е. положение системы достаточно удалено от кривой состояния рынка. Поэтому в соответствии с (9.1) порядок инфляции - дефляции равен $|\dot{p}| \approx O(\mu) >> 1$, а порядок изменения ожиданий $|\dot{\rho}| \approx O(\mu^{-1}) << 1$. Иными словами, скорость перемещения системы в горизонтальном направлении очень велика, а скорость перемещения системы в вертикальном направлении очень мала: инфляционные изменения в экономике происходят очень быстро при практически неизменных ожиданиях. Сформировавшиеся инфляционные ожидания вызывают в системе лавинообразный рост цен, скажем вдоль траектории AB (заметим, забегая вперед, что в другой фазе цикла дефляционные ожидания предопределяют столь же катастрофическое падение цен).

Рассогласования между ожидаемыми и фактическими состояниями рынка управляют в данной модели движением системы, которая при все более точном предсказании экономической конъюнктуры все более приближается к соответствующей точке кривой сбалансированного рынка. Скорость приближения, т.е. величина фактической инфляции при этом снижается. Когда система практически приблизилась к кривой состояния рынка, но не совпала с ней, то порядок «расстояния» между ними становится очень небольшим, к примеру, $\rho - y(p) \approx O(\mu^{-2})$. В этом случае порядки величин фактической инфляции и ожиданий оказываются вполне сопоставимыми и равными $O(\mu^{-1})$. Поэтому, начиная с точки *B*, система сравнительно медленно перемещается вдоль правой ветви кривой сбалансированности рынка.

При приближении к точке *B* цены стремительно вырастают и их отклонения от равновесных положительны, $p > 0$, в связи с чем население и бизнес начинают, согласно второму уравнению системы (9.1), ожидать их снижения и ухудшения конъюнктуры на рынке товаров и услуг. Тем самым задается направление движения системы вдоль правой ветви кривой сбалансированности рынка: от бума к рыночному равновесию и рецессии. В этом смысле отрицательные изменения ожиданий характеризуют «пессимизм» бизнеса и населения в части предсказания экономической конъюнктуры.

От точки *B* до точки *C* макроэкономика медленно переходит из фазы перегрева производства к равновесию, а затем к спаду, движению, которое обусловлено сравнительно медленным повышением цен. Такое движение происходит вплоть до точки *C*, где накопленный к этому моменту потенциал негативных ожиданий «разряжается», стремительно реализуясь в падении цен.

Всеобщая, или по крайней мере преобладающая, убежденность в том, что цены должны понизиться, а конъюнктура ухудшиться, как бы преобразуется в реальность. В результате макроэкономика скачком перемещается в точку *D*, находящуюся на другой ветви кривой состояний рынка. Макроэкономика из состояния локально минимального спада при ценах выше равновесных «сваливается» практически мгновенно в состояние рецессии на правой ветви кривой состояний рынка при ценах уже ниже равновесного уровня. Отметим, что формально глубина спада в процессе стремительной дефляции не меняется (скачок происходит при $\frac{d\rho}{dp} = const$, а значит и $y = const$), но экономически здесь вполне правомерно ожидать углубления депрессии.

Объяснением скачкообразного перемещения состояния макроэкономики, которое происходит в точке *C*, может быть наложение совместных воздействий в этой точке максимальной величины изменения ожиданий и начала перестройки производства. Значение эластичности функции состояния рынка вдоль отрезка *BC* положительно, т.е. производители и потребители «нормально и вполне по-рыночному» реагируют на цены, но цены падают. В точке *C* совокупная эластичность реального рынка становится равной нулю, что является сигналом перестройки производства: ведущая роль в динамике производства переходит от чувствительности предложения к чувствительности спроса. В известном смысле правила поведения совокупных производителей и потребителей, которые задаются их эластичностями к отклонениям цен, перестают действовать, т.к. эластичность функции состояния рынка в точке *C* нулевая. Эта неопределенность поведения как бы «замораживает» ожидания, что в соответствии с (9.4) заставляет систему скачком переместиться на левую ветвь кривой состояния рынка.

Левее *C* разность $[\rho - y(p)] < 0$, и порядок этой разности равен единице, а следовательно, скорость перемещения системы в горизонтальном направлении - фактическая дефляция - чрезвычайно велика, т.е. происходит скачок вдоль траектории *CD*.

Положение системы в точке *D* характеризуется положительным значением производной ожиданий, которые в соответствии с (9.1) становятся положительными, или «оптимистическими». Тем самым направление движения вдоль левой ветви кривой задано как последовательность относительно медленных фазовых переходов: рецессия-равновесие-бум, но теперь уже при ценах, общий уровень которых ниже равновесного. Ожидания возрастают, а вместе с ними и цены, постепенно подготавливая макроэкономическую систему к инфляционному скачку. Скачок к инфляции происходит в точке *E*, где эластичность функции состояния рынка нулевая, сама функция имеет локальный максимум, а экономика вновь перестраивается: с управляемой предложением на управляемую спросом. Поскольку это происходит в сочетании с максимальным значением ожиданий, то происходит инфляционный скачок. В течение короткого периода времени ожидания остаются практически постоянными, а система перемещается в точку *F*, в которой уровень логцен максимальный. Таким образом, макроэкономическая система совершила перемещение вдоль траектории предельного цикла.

9.3 Время экономического цикла

Интерпретация предельного цикла, который совершает переходная экономика, сводится к довольно простому утверждению. Фазовые изменения состояния экономики, т.е. спад, равновесие и подъем, могут сопровождаться как относительно медленным, так и быстрым изменением цен. Медленное изменение цен происходит вдоль ветвей кривой состояний рынка, а быстрое - при скачкообразном перемещении системы между ветвями кривой. Макроэкономический предельный цикл имеет как бы два резко отличающихся масштаба времени: медленный переход от рецессии к фазе подъема происходит за время $\Delta t \approx O(\mu)$, тогда как инфляция или дефляция - за время $\Delta t \approx O(\mu^{-1})$. Эти две шкалы времени отчетливо видны на графике релаксационных колебаний, представленном на рис. 9.2.

В свете сказанного, практически все время, за которое система проходит цикл, тратится на перемещение вдоль левой и правой ветвей кривой состояний рынка и его можно оценить, учитывая соображения симметрии как

$$T \cong 2\int_C^F dt \,, \qquad (9.5)$$

где *C* и *F* - точки положения системы на правой ветви функции состояния рынка, изображенные на рис. 9.2. Нетрудно проверить, что поскольку в точке *F* значение функции состояния рынка равно 2/3, то $p_F=2$.

Поскольку макроэкономическая система должна находиться вблизи кривой состояний рынка, то из $\rho \cong y(p)$ следует:

$$\frac{d\rho}{dt} \cong y'(p)\dot{p} = (p^2-1)\frac{dp}{dt},$$

а, с учетом (9.2), получаем:

$$dt \cong \frac{-\mu(p^2-1)}{p}dp.$$

Таким образом,

$$T \cong -2\int_2^1 \frac{\mu(p^2-1)}{p}dp = 2\mu\int_1^2 (pdp - \frac{dp}{p}) = 2\mu[\tfrac{1}{2}p^2 - \ln p]\,\Big|_1^2 = \mu[3-2\ln 2]$$

или $T \cong 1{,}69\mu$,

т.е. время, затрачиваемое макроэкономической системой на переход из состояния рецессии в состояние бума, действительно имеет порядок $O(T) \approx \mu$. Наконец, можно сказать, что если макроэкономика действует в строго нелинейном режиме, то выделенные временные шкалы оперируют, последовательно сменяя друг друга. Система как бы накапливает «внутренние напряжения», дисбалансы реального рынка, медленно двигаясь от рецессии к подъему, а затем быстро «разряжается», разрешая все противоречия развития реального рынка через механизмы инфляции, либо дефляции.

Что же включает механизмы гиперинфляции или «обвального» падения цен? Совмещения тенденций падающих или растущих ожиданий и перестройки производства. В точках $p_{1,2} = \pm 1$ локального минимума и максимума кривой состояния рынка ее эластичность равна нулю, что говорит о перестройке производства: в этих точках тенденция роста $y(p)$ по мере увеличения логцен сменяется на тенденцию ее снижения. Экономическая ситуация снижения дохода по мере роста цены была определена выше как ситуация негэластичности производства, которая типична для переходной экономики.

Пусть, к примеру, макроэкономика находится в точке F, где цены выше равновесных, и микроагенты ожидают ухудшения состояния экономики (ожидания отрицательные или «пессимистические»). Перестройка производства в точке C - совпадение эластичностей спроса и предложения - означает, что дальнейшее уменьшение цен ниже порога $|p| < 1$ повлечет увеличение дохода. Это, однако, не может произойти при отрицательных ожиданиях, так как движение вдоль негэластичной ветви кривой состояний при положительных логценах направлено вниз, означая уменьшение дохода. В результате цены мгновенно дефлятируют, а производство, скачком переместившись в точку с низкими ценами, как бы получает потенциал дальнейшего роста.

Аналогичная ситуация наблюдается и в точке E, где цены ниже равновесных. Здесь экономика находится в фазе бума, и ожидается его продолжение (ожидания «оптимистичны»). Но на повышение цен переходная экономика должна реагировать в пределах $|p| < 0$ в соответствии с принципом негэластичности - снижением дохода. Этого опять таки произойти не может, поскольку ожидания положительны (движение вдоль негэластичной ветви кривой состояний при отрицательных логценах направлено вверх) - гиперинфляционный толчок перебрасывает систему в фазу подъема, но при высоких ценах. Экономика получает негативный потенциал завышенных цен, предопределяющий ухудшение конъюнктуры, что немедленно отражается изменением знака ожиданий на положительной полуоси логцен.

9.4 Монетарная политика и стабилизация

Номинальным якорем в модели инфляционных колебаний, как это принято в макроэкономической теории, служит «нейтральная» монетарная политика, т.е. политика, которая сохраняет неизменной реальную стоимость денежных балансов. Известно, что активная монетарная политика (ограничительная или стимулирующая) в модели гармонических колебаний не меняет характер инфляционного равновесия, но для релаксационных колебаний переходного периода это не так. Активная монетарная политика в переходный период способна изменить характер инфляционного цикла, усиливая или ослабляя тем самым возможности возникновения гиперинфляционного или гипердефляционного скачков между фазами бума и рецессии.

Рассмотрим влияние монетарной политики на поведение макроэкономической системы (9.1) или (9.2) в переходный период. Монетарная политика представлена действием внешней силы m, которая задает смещение системы относительно начала координат «логцены - ожидания».

Смещение $m\begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix}0$, где $m = \ln M$ - логарифм номинального предложения денег, может быть когерентно колебаниям логцен вокруг равновесного уровня $p = 0$, т.е. двигаться с ними в фазе, либо колебаться в противофазе. Соотношение знаков и величин логарифмов цен и номинальной денежной массы определяет относительное и абсолютное увеличение или уменьшение реальных денежных балансов. Например, при совпадающих знаках m и p отклонение предложения денег от равновесного уровня соответствует проведению жесткой (ограничительной), $m - p < 0$, или мягкой (либеральной), $m - p > 0$, монетарной политики, которая имеет своим результатом уменьшение или увеличение стоимости реальных денежных балансов M / P.

Макроэкономической стабилизацией будем называть эволюцию траекторий системы «логцены-ожидания» (9.1) к некоторому стационарному состоянию, соответствующему рыночному равновесию. Таких равновесий, как было выяснено выше, для данной нелинейной системы - три, и система может быть стабилизирована не только в равновесии, но и в состояниях бума и рецессии.

Вообще говоря, сильно неконкурентная система, как показано выше, имеет устойчивый предельный цикл, т.е. уже в определенном смысле стабилизирована, поскольку может быть сведена к уравнению (9.4). Но экономически такая стабилизация малоприемлема, поскольку предполагает не только постоянную эволюцию фаз: рецессию, равновесие и бум, но и резкие скачки цен - от инфляции к дефляции, и наоборот. С другой стороны, точка равновесия в начале для системы с устойчивым предельным циклом - неустойчивая, а потому недостижима, если только не предположить, что система уже находится в этом состоянии. Поэтому макроэкономическая стабилизация нелинейной системы «логцены-ожидания» может иметь место только, если предельный цикл разрушается, так как появляется устойчивая точка равновесия. Добиться устойчивости точки равновесия для системы (9.1) можно, если воздействовать на систему при помощи внешней силы, т.е. монетарной политики.

В модели линейных колебаний, напомним, монетарная политика в случае устойчивости обеспечивала стабилизацию при ценах выше или ниже равновесного уровня. При этом монетарная политика, отождествляемая с внешней силой, не меняла характера колебаний и точки равновесия системы. Для модели переходной экономики монетарная политика при некоторых условиях также может обеспечить стабилизацию, но это может произойти только, если будет разрушен предельный цикл, по которому движется траектория системы. В определенном смысле монетарная политика в переходный период даже более действенна, чем для конкурентной экономики.

Для макромодели (9.1) *монетарная политика нейтральна*, т.е. не влияет на возможность появления гиперинфляции или гипердефляции, если ее жесткость или мягкость не превосходят величины порога m_c, зависящего от значения логцен, при котором производство претерпевает перестройку. Как было выяснено выше - это точки, в которых реакции производителя и потребителя равны, т.е. точки, соответствующие корням уравнения $p^2 - 1 = 0$. Таким образом, если денежное предложение не модифицирует величину эластичности, то монетарная политика нейтральна, т.е. не меняет поведение макроэкономической системы.

Рассмотрим матрицу реакций нелинейной системы (9.1):

$$J = \begin{pmatrix} -\mu(p^2-1) & \mu \\ -1/\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.6}$$

Для нейтральной монетарной политики $m = 0$ и $p = 0$ матрица реакций принимает значения с положительными следом и детерминантом, следовательно, точка равновесия системы (9.1) в начале - неустойчивая [6]. Неустойчивость точки равновесия сохраняется для всех значений номинального денежного предложения, удовлетворяющих неравенству:

$$m < m_c = p^* = \pm 1, \tag{9.7}$$

при котором матрица (9.6) имеет положительные след и детерминант. Неустойчивость точки равновесия, в свою очередь, означает, что система (9.1) для $|p| < 1$ сохраняет предельный цикл. Экономически монетарная политика с такими параметрами не может предотвратить возможностей возникновения гиперинфляции и гипердефляции, и, по сути дела, является такой же неэффективной, как и в ситуациях с простым гармоническим осциллятором.

Если же монетарная политика такова, что

$$|m| > |m_c| = p_{1,2}{}^* = \pm 1, \qquad (9.8)$$

то след матрицы J становится отрицательным, а следовательно, точка равновесия системы - устойчивой. Для ситуаций, описываемых неравенством (9.8), предельный цикл разрушается, а, значит, монетарная политика способна стабилизировать макроэкономику в точках равновесия, рецессии или бума при положительных или отрицательных значениях логцен. В определенном смысле отсутствие предельного цикла с чисто экономической точки зрения - явление положительное, хотя, само по себе, это не гарантирует стабилизации в точках подъема или равновесия.

Анализ поведения макроэкономики в переходный период, представленный на рис. 9.3, показывает, что в зависимости от уровня логцен стабилизация может осуществляться благодаря жесткой либо, наоборот, мягкой монетарной политике. Предположим, что макроэкономика находится первоначально в точке A, т.е. цены выше равновесных, а ожидания отрицательные, что может в первом приближении соответствовать текущим координатам российской экономики.

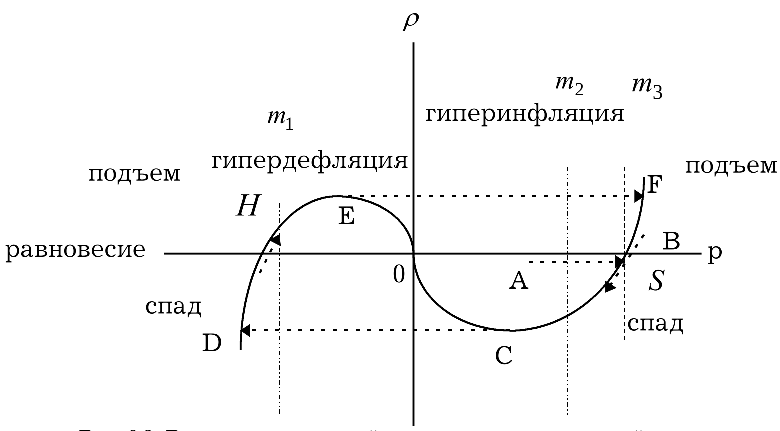

Рис. 9.3. Влияние монетарной политики на предельный цикл

Пусть в этом положении в целях борьбы с инфляцией начинает проводиться сверхжесткая, в смысле неравенства (9.8), монетарная политика m_1, приводящая к резкому сокращению реальных денежных балансов и снижению на этой основе инфляции. Макроэкономическая стабилизация долгосрочного характера может иметь место в точке устойчивого равновесия H, которая соответствует подъему экономики. Инфляционный цикл действительно разрушается, но путь к грядущему буму лежит через глубокую дефляцию, вызывающую спад производства и массовую безработицу, поскольку система совершит скачок в точке C.

При тех же самых начальных условиях либеральная монетарная политика m_2, удовлетворяющая неравенству (9.8), стабилизирует экономику в точке устойчивого равновесия S, изменив ожидания бизнеса и населения и не давая возможности развернуться процессам дефляции. Увеличение денежной массы до размеров m_2 в долгосрочном периоде останавливает дефляцию, но не может иметь инфляционного характера, поскольку вдоль правой ветви кривой $y(p)$ движение происходит по направлению к точке равновесия S и инфляционные всплески, хотя и возможны, но обязательно кратковременны. Вместе с тем, стабилизация при такой политике достигается в фазе рецессии $y(p) < 0$, что вряд ли может считаться особо крупным достижением.

Этот недостаток устраняется, однако, не на основе ужесточения денежного предложения, а напротив, посредством увеличения предложения денег до уровня $m_3 \geq \sqrt{3}$, что дает возможность стабилизации в условиях экономического равновесия или подъема. В любом случае проведенный анализ показывает, что в ситуациях, соответствующих уровню цен выше равновесного, макроэкономическая стабилизация в долгосрочном плане обеспечивается расширением предложения денег. С другой стороны, в условиях «высоких» цен, вообще говоря, характерных для переходного периода, ужесточение денежного предложения либо нейтрально, либо чревато глубокой дефляцией и депрессией.

Для предельного цикла влияние начальных условий устраняется с течением времени, но цикла может не быть при подходящей монетарной политике, либо система пройдет лишь часть цикла. Поэтому рекомендации конкретного «политического» характера в рамках данной модели вполне определены как только идентифицировано текущее положение системы. Нетрудно показать, что для начального положения экономики, функционирующей при «низких» ценах, рекомендации по ее стабилизации меняются на противоположные по сравнению с ранее высказанными. Разумеется, нельзя полностью исключить и возникновение альтернатив, когда, например, стабилизация экономики в фазе рецессии представляется более предпочтительной, чем перспектива инфляции или дефляции. Модель вполне способна дать качественные рекомендации в отношении стабилизации и в этих ситуациях, но это - уже предмет конкретных макроэкономических исследований.

9.5 Сценарий макроэкономической политики в России

Проведем теперь в первом приближении идентификацию модели (9.2) по информации о траектории макроэкономического развития России в период реформ 1992-1997 гг. и проанализируем возможные варианты развития событий в средне- и долгосрочной перспективе.

Модель (9.2) дополним уравнением равновесия номинальных спроса и предложения:

$$PY(\ln P / P^*) = L^{\beta}, \tag{9.9}$$

где L - занятость; β - эластичность номинального дохода по труду[2].

Уравнение (9.9) в логарифмах имеет следующий вид:

$$p + y(p) = \beta l. \tag{9.10}$$

[2] Понятно, что уравнение (9.9) легко обобщается на любое число факторов производства, среди которых нас интересует на данном этапе исследований лишь важнейший - трудовые ресурсы.

С учетом (8.19) это уравнение дает выражение для (логарифмов) цен и занятости:

$$p = (3\beta l)^{1/3}, \quad (9.11)$$

которое характеризует размеры номинальной компенсации факторов производства, в нашей модели - трудовых ресурсов.

Нелинейный характер функции реального рынка (8.19) означает, что один и тот же объем реального продукта может производиться при разных размерах компенсации занятости. Это и объясняет *интереснейший феномен российской рыночной трансформации,* где размеры падения производства в 1991-1997 гг. существенно опережали размеры сокращения занятости. Так, уровень занятости в России в 1995 г. составил 88,8% по отношению к 1989 г., а падение производства (ВВП) за 1990-1996 гг. оценивается в 40%. Иными словами, избыточная занятость, предопределявшая глобальную неэффективность командной экономики в ходе реформ, не была преодолена. В этом смысле имеют определенные основания утверждения о том, что настоящих «шоковых» реформ российская экономика не испытала, поскольку сокращение доходов населения не соответствовало размерам реальной компенсации факторов за их участие в производстве - последнее должно было бы быть значительно меньшим, чем это имело место в действительности.

Итак, в ходе структурных преобразований фактическая занятость составила величину l_E, которая в соответствии с (9.11) компенсируется при ценах равновесия p_E. Между тем, реальный доход (ВВП) снизился до величины $y(p_A)$, причем цена p_A компенсирует занятость лишь в размерах $l_A < l_E$. Но, поскольку поведение реального рынка в переходный период нелинейно, то $y(p_A) = y(p_E)$, хотя $p_A < p_E$. Итак, с одной стороны, продукт может сократиться в больших размерах, чем занятость, в том смысле, что он может быть произведен при меньших трудовых ресурсах. Но возмещение факторов в условиях рынка может происходить только в размере их вклада в создание продукта, следовательно, продукт в объеме $y(p_A)$ возмещает факторы в размере $l_A = \min\{l_A, l_E\}$.

Как же можно обеспечить компенсацию трудовых ресурсов в размере l_E при ценах равновесия p_A? Ответ, на наш взгляд, состоит в следующем: в условиях рынка это невозможно, но вполне допустимо при использовании нерыночных средств. В условиях рынка цены p_E и p_A - это просто разные характеристики возмещения факторов, происходящего в разных точках равновесия. В переходной же экономике эти уровни цен могут быть связаны соотношением

$$p_E = p_A + a,$$

где $a = \ln A$ - размер *бартерных сделок*, существование которых объясняется действием факторов нерыночной природы. В силу целого ряда причин часть производимых продуктов и услуг начинает обращаться, минуя сферу рыночных отношений, уменьшая тем самым величину рыночного возмещения факторов, потребленных в производстве. Значит, если возможен механизм, обеспечивающий замещение рыночного равновесия при ценах p_E на равновесие при ценах p_A и бартере *a*, т.е. равновесие нерыночное, то цена $p_A < p_E$ будет «компенсировать» участие в создании продукта $y(p_A) = y(p_E)$ трудовых ресурсов в размере l_E.

Текущее положение российской экономики. Идентифицируем текущее положение российской макроэкономики на плоскости «логцены-ожидания», представленной на рис. 9.4. С учетом гиперинфляции, имевшей место в 1992-1993 гг., когда индекс цен вырос по оценкам на два порядка по сравнению с уровнем 1991 г., исходное положение системы может быть идентифицировано на правой полуоси логцен, $p_E > 0$. Понимать условие $p_E > 0$ мы будем в том смысле, что уровень рыночных цен, балансирующих макроэкономику России, существенно выше равновесных в силу инфляционных процессов, имевших место в недавнем прошлом. Отметим, что, с другой стороны, оснований полагать наличие серьезной дефляции из-за снижения издержек и повышения эффективности производства, к сожалению, в этот период нет.

При завышенных ценах $p_E > 0$ экономика России стабилизирована в условиях существенного спада производства, который по разным оценкам составляет от 30 до 60% уровня ВВП России в 1991 г. Следовательно, значение индекса состояния рынка в модели отрицательное $y(p_E) < 0$. Наконец, несмотря на явное замедление темпов инфляции, общая социально-политическая нестабильность и тяжелое положение экономики диктуют пессимистический характер ожиданий населения и бизнеса, что предопределяет наличие, пусть и вялотекущих, инфляционных процессов, т.е. $[\rho_E - y(p_E)] > 0$, откуда следует, что $\dot{p} > 0$.

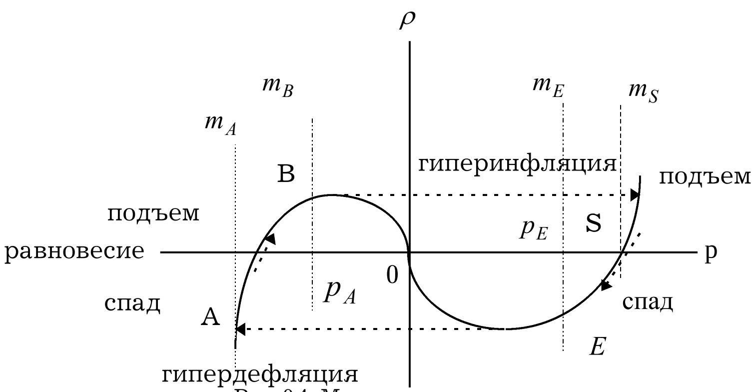

Рис. 9.4. Макроэкономические сценарии

Возникает объективное стремление избежать подобного развития событий, т.е. переместить равновесие системы в точку *A*, где реальный доход такой же, но размеры рыночной компенсации факторов ниже. Как уже отмечалось выше, фактическая величина производимого продукта соответствует значительно меньшим уровням занятости, а следовательно, факторы производства в точке *A* компенсируются более низкими рыночными ценами $p_A < p_E$.

Как видно из рис. 9.4, при рецессивном объеме дохода «справедливое», т.е. рыночное возмещение факторов, фактически потребленных в производстве, в точке *A* ниже, чем в точке E. Занижение цен - это результат борьбы с инфляцией, которая проводилась правительством и Банком России в 1994-1997 гг. посредством ужесточения номинального предложения денег и систематического занижения реальной стоимости денежных балансов. Иными словами, монетарная политика последних лет проведения рыночных реформ в России - это величина денежного предложения $m = m_A^s < -1$, которой соответствует кейгановский спрос на деньги:

$$m_A^d = p_A - \pi . \tag{9.12}$$

Поскольку денежное предложение $m_A < m_E^d$, то лишь с учетом неплатежей, соответствующих размерам нерыночных сделок, т.е. бартеру, можно обеспечить макроэкономическое равновесие в точке *A*, компенсирующее участие в производстве факторов в размере l_E, т.е.

$$m + a = m_E^d . \tag{9.13}$$

На основе бартера в экономике переходного периода между возмещением факторов в точках *A* и *E* устанавливается, таким образом, нерыночная связь:

$$p_E = p_A + a , \tag{9.14}$$

где $a = \ln A$ - объем нерыночных сделок, или бартера. Используя (9.14) и уравнение Кейгана (9.7), можно записать (9.13) в виде:

$$m + a = p_E - \pi = (p_A + a) - \pi , \tag{9.15}$$

откуда, вычитая размеры бартера из левой и правой частей уравнения (9.14), получаем:

$$m_A \equiv m_A^s = m_A^d .$$

Уравнение (9.15) говорит о том, что *бартер в экономике переходного периода играет роль своеобразного буфера между спросом и предложением денег*[3]. Сказанное эквивалентно тому, что рассогласование в точке *A* между фактическим предложением денег m и «истинным» спросом на реальные денежные балансы m_E^d соответствует величине «неплатежей», которые и представляют объем бартера a[4].

Спрос на реальные денежные балансы, объективно существующий в точке

---

[3] Идея, вполне аналогичная данной, развивается в модели переходной экономики Г.Кальво и М.Кумара, воспроизведенной в [7]. Авторы, на наш взгляд, абсолютно справедливо полагают, что качественным водоразделом между конкурентной и переходной экономиками служит поведение кредита, точнее, его зависимость или независимость от денежного спроса.

[4] Если денежное предложение измеряется агрегатом, скажем, М2, то формально вполне возможно рассматривать денежные агрегаты, в состав которых включаются стоимостные оценки бартера. Содержательно, конечно, подобные агрегаты - это полная бессмыслица, поскольку в этом случае и сталинская экономика - вполне монетарная. Деньги как средство платежа и меры «истинной» стоимости товаров являются отрицанием бартера, появление которого в рыночной экономике - симптом глубоких сбоев в функционировании последнего.

E, уменьшается нерыночными средствами до величины фактического предложения денег в точке *A*. В условиях рынка это сделать невозможно, так как на сбалансированном денежном рынке предложение денег должно равняться спросу на них. Давление же в переходной экономике нерыночных факторов, выражающихся в появлении бартера, позволяет искусственно уменьшить величину спроса на реальные денежные балансы с величины $m_E^d = p_E - \pi$ до размеров $m_A^d = p_A - \pi$, поскольку для бартера справедливо $p_E = p_A + a$. Можно сказать, что в экономике переходного периода, где рынок денег как бы дополнен «рынком бартера», своеобразно использован закон Вальраса, позволяющий сводить двухкомпонентный рынок к однокомпонентному. В свою очередь, поскольку фактически бартер в переходной экономике был представлен как в значительной мере конгломерат различного вида «плохих» денег, то расширение последнего вполне объяснимо на основе закона Грешема, ибо плохие деньги действительно вытесняют деньги хорошие, т.е. просто деньги.

9.6 Варианты возможных действий

Поскольку экономика России стабилизирована в точке *A* искусственно, за счет бартера и вынужденных неплатежей, то дальнейшее развитие событий можно представить следующим образом.

На первом этапе состояние экономики может быть улучшено посредством стабилизации ее текущего положения в фазе подъема, скажем, в точке *B*. В этих целях следует увеличить предложение реальных денег $m_B^s > m_A$, причем $m_B^s > m_c = -\sqrt{3}$,что стимулирует агрегированный спрос и создаст условия для общего экономического подъема. Движение системы вдоль правой ветви кривой состояния рынка $y(p), p < 0$ означает развитие умеренных инфляционных процессов как результата увеличения предложения денег. Итак, на первом этапе относительно небольшой рост предложения денег приводит к улучшению экономической конъюнктуры и умеренному развитию инфляции.

После того, как макроэкономика стабилизирована в точке *B*, возможна следующая альтернатива. Если экономический подъем протекает весьма интенсивно, обновляется технология и снижаются издержки, то если все это реализуется в снижении цен, тогда макроэкономическая стабилизация в долгосрочном периоде собственно заканчивается, и необходим курс действий, направленный на *поддержание* позитивных в целом экономических процессов. Более правдоподобной, однако, представляется возможность осуществления *следующего этапа* стабилизации.

Напомним, что перевод экономики в точку *B* осуществляется как бы технически - через увеличение предложения денег, но в условиях, сохраняющих, хотя и сокращающих, сферу действия бартера. В точке *B,* поскольку растет продукт, то увеличивается занятость, и, следовательно, размеры компенсации труда. Коренной вопрос в данном контексте следующий: происходит ли все это в рыночных условиях, или же сфера действия конкуренции по-прежнему ограничена? Если цена p_B не содержит бартерной компоненты, то собственно стабилизация на этом заканчивается. Если же имеет место

$$p_B + a_1 = p_E,$$

то система должна быть стабилизирована в точке, принадлежащей правой ветви кривой состояния рынка.

Содержательно это означает, что главной целью *второго этапа стабилизации* является устранение бартера, иными словами, *проведение собственно рыночных реформ.* В долгосрочном плане это, конечно же, важнейший и наиболее трудный этап экономической трансформации, происходящей в России. Масштабы этих трудностей видны в явном виде даже в данной модели: стабилизация в рыночных условиях системы на правой ветви кривой состояния рынка $y(p), p > 0$ должна, конечно же, иметь место в фазе подъема, например, в точке S. Ясно, что рецепт инвариантен - денежное предложение должно быть резко увеличено, но дозировка не определена, и поэтому стабилизация в рыночных условиях, т.е. на правой ветви кривой $y(p), p > 0$ может иметь место как в условиях рецессии, так и подъема. И в том, и в другом случае произойдут процессы резкого ускорения инфляции, но с разными результатами - масштабы производства либо возрастут, $y(p_S) > 0$, либо снизятся, $y(p_E) < 0$. Иными словами, точная дозировка предписанного лекарства - инфляции, должна явиться результатом дополнительных исследований.

Важно подчеркнуть, что в условиях резкого ускорения инфляции нельзя однозначно утверждать, что рост цен обязательно способствует увеличению производства. Для простой кривой Филлипса - это так, но для нелинейной системы, совершающей релаксационные колебания, такой вывод может оказаться ошибочным. Система стабилизируется в условиях подъема, если рост предложения денег превышает определенное пороговое значение $m_S > m_C = \sqrt{3}$. Сказанное выше справедливо и для ситуации резкого снижения цен - дефляции, которая может либо ухудшить, либо , как ни странно, улучшить условия производства - имеются в виду последствия скачка системы с правой на левую ветвь кривой состояния рынка.

* *
*

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Romer, D. (1996). Advanced Macroeconomics. The McGraw Hill Companies,Inc.

2. Turnovsky, S. (1995). Methods of Macroeconomic Dynamics. The MIT Press.

3. Strogatz, S. (1994). Nonlinear Dynamics and Chaos. New York, Addison Wesley.

4. Lorentz, H-W. (1993). Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion. Springer-Verlag, Berlin.

5. Смирнов А.Д. Нелинейная динамика переходной экономики. - М.: Изд. ВШЭ, 1996.

6. Goodwin, R.M. (1991). Nonlinear Dynamics and Evolution. Macmillan, London.

7. Calvo, G. (1996). Money, Exchange Rates and Inflation. The MIT Press, Cambridge, Mass.

8. Verhulst, F. (1990). Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer Verlag, Berlin.

9. Смирнов А.Д. (1997). Модель динамики инфляции и ожиданий в переходной экономике. - М.: Изд. ВШЭ, 1997.

Лекция 10. Модели предложения и производства

10.1 Макроэкономическая производственная функция

Со стороны предложения макроэкономика обычно представляется производственной функцией, одним из вариантов которой является производственная функция с нейтральным по Харроду техническим прогрессом:

(10.1) $$Q(t) = Q[K(t), A(t)L(t)],$$

где $Q(t)$ - реальный выпуск, например, произведенный ВВП в неизменных ценах; $K(t)$ - объем наличного капитала; $A(t)$ - технический прогресс, реализованный как эффективность трудовых ресурсов; $L(t)$ - объем используемых трудовых ресурсов.

Продукт производится при использовании капитала и труда, причем технический прогресс, или знания, реализуется, прежде всего, в повышении эффективности единицы применяемого труда. В данной гипотезе производственной функции предполагается, что отдача от масштабов применения ресурсов постоянна и равна некоторой константе α. Это значит, что если эффективный труд и капитал увеличатся одновременно в α раз, то во столько же раз возрастет и выпуск товаров и услуг. Предположение постоянства масштабов производства, или линейной однородности производственной функции, эквивалентно утверждению об отсутствии дополнительных эффектов от специализации производства, а также о пренебрежимо малом влиянии на производство всех других факторов, например, внешнеэкономических эффектов, природных ресурсов и т.д., кроме аргументов производственной функции.

Из условия однородности первой степени (линейной однородности) следует, что если $\alpha = \frac{1}{AL}$, то

(10.2) $$q = Q/AL = Q[K/AL, 1] = f(k),$$

где $f(k) = Q/AL$ - средний продукт эффективного труда; $k = K/AL$ - средняя капиталовооруженность эффективного труда.

Для предельных продуктов производственной функции (10.1) и функции $f(k)$ справедливо, что предельный продукт капитала совпадает с предельным продуктом капиталовооруженности, а предельный продукт труда выражается через средний и предельный продукты капиталовооруженности:

(10.3) $$\partial Q/\partial K = \partial/\partial K\, ALf(k) = ALf'(k)\,\partial/\partial K\,(K/AL) = f'(k)$$

и

(10.4) $$\partial Q/\partial AL = \partial/\partial AL\, ALf(k) = f(k) + ALf'(k)\,\partial/\partial AL\,(K/AL) = f(k) - f'(k)k.$$

Для производственной функции (10.2) первая производная по капиталу положительна, а вторая - отрицательна, и с учетом этого для функции выпуска на единицу эффективного труда имеют место условия:

$$f'(k) > 0;\ f''(k) < 0\ ,$$

которые вместе с условиями Инады

$$\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0;\ \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$$

определяют среднюю капиталовооруженность труда $f(k)$ как строго вогнутую функцию. Эта функция играет важную роль в моделях экономического роста, которые будут рассмотрены в следующих разделах.

Производственные мощности. В анализе макроэкономических систем используются и более простые формы производственных функций. Например, если экономический рост явно лимитирован одним из факторов, то правомерно в определенном контексте рассматривать производство как результат использования именно данного фактора. В частном случае зависимости производства от объема капитала K, который в условиях экономического перехода является лимитирующим фактором экономического роста, производственная функция (10.1) может быть представлена как функция одного аргумента, капитала:

$$Q(t)=\eta K(t), \tag{10.5}$$

где η -коэффициент средней капиталоотдачи. Производственные функции такого вида исследуются во многих моделях экономического роста, в частности моделях Харрода-Домара.

Для переходной экономики, которая осуществляет глубокую качественную перестройку производства на новой технической основе, и где нехватка инвестиций и капитала является главным лимитирующим фактором, производственная функция (10.5) представляется вполне адекватной. Вместе с тем в переходный период производство, как правило, характеризуется значительным и длительным спадом. Данная особенность переходной экономики может быть исследована при помощи простой нелинейной модели, которая имплицитно предполагает зависимость темпа роста предложения (реального выпуска) от степени использования капитала и производственных мощностей.

10.2 Простая нелинейная модель динамики производства

При максимальной величине капитала K^* производственные мощности будут равны величине $Q^*=\eta K^*$, которую положим постоянной. Производственные мощности являются, таким образом, естественным ограничением производства при данном уровне эффективности использования ресурсов. Исследования показывают, что возможности развития производства не инвариантны к имеющимся ограничениям и, в частности, к размерам производственных мощностей. Одним из простых способов учета этого обстоятельства является введение предположения о зависимости величины темпа роста производства от использования производственных мощностей.

Напомним, что темп роста (прироста) продукта определяется как

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt} \equiv \frac{\dot{Q}}{Q} = \lambda . \tag{10.6}$$

При заданных начальных условиях $Q(0) = Q_0$ это дифференциальное уравнение относительно выпуска имеет своим решением траекторию производства ВВП экспоненциального типа:

$$Q(t) = Q_0 \exp \lambda t .$$

Из этого уравнения видно, что в области определения функции $Q(t)$ в любой момент времени производство растет с постоянным темпом независимо от его размеров, следовательно, степени использования производственных мощностей. На самом деле, это, конечно, не так - обычно по мере повышения использования производственных мощностей возможности дальнейшего наращивания производства снижаются. Данное утверждение вытекает из положения о снижающейся отдаче от капитала: предельный продукт капитала при фиксированных остальных факторах снижается, следовательно, должен сокращаться и темп прироста выпуска по мере увеличения размеров производства.

Простейшим предположением, моделирующим зависимость объемов текущего выпуска от степени использования производственных мощностей, иными словами, гипотезой снижающегося темпа роста является уравнение:

$$\lambda(t) = \lambda_0 - \frac{\lambda_0}{Q^*} Q . \tag{10.7}$$

Формула (10.7) означает, что только для достаточно малых уровней производства $Q(t)$ его темп прироста - постоянная величина, определяемая уравнением (10.6). По достижении полного использования производственных мощностей $Q(t)=Q^*$ темп становится равным нулю, так как ресурсы исчерпаны, а превышение производственных мощностей влечет сокращение производства. С учетом (10.7) уравнение производства, диктующего размеры реального предложения, записывается в виде:

$$\dot{Q} = Q(\lambda - \frac{\lambda}{Q^*} Q) . \tag{10.8}$$

Уравнение производства (10.8) - это нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое носит название *логистического уравнения*. Решения логистического уравнения исследуем сначала качественно, хотя первый интеграл (10.8) может быть вычислен и в явном виде.

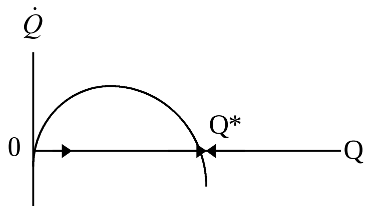

Рис. 10.1. Фазовая диаграмма логистического уравнения

Фазовая диаграмма (рис. 10.1) показывает, что динамика производства характеризуется сначала ускоренным развитием производства - на участке изменения выпуска $(0, \frac{Q^*}{2})$ приращения продукта возрастают, достигая максимума в точке $Q^*/2$, затем они начинают убывать, оставаясь положительными до точки Q*, где выпуск равен производственным мощностям, после которой приросты производства становятся отрицательными и объемы выпуска снижаются.

Логистическое уравнение для положительных значений фазовой переменной (отрицательного производства, понятно, не бывает) имеет две точки равновесия: *0* и *Q**, из которых первая - неустойчивая, а вторая устойчивая. Динамика траекторий системы зависит от начальных условий, что проиллюстрировано на рис. 10.2.

Пусть производство пережило глубокий спад и начинает постепенно восстанавливаться. В этом случае первоначальное положение системы задается точкой Q_0, расположенной достаточно близко от нуля $0 < Q_0 < Q^*/2$. Качественный анализ решения (10.8) показывает, что траектория производства асимптотически стремится к равновесному решению, имея перегиб в точке $Q^*/2$, возрастая сначала с ускорением, а затем замедляясь по мере приближения к равновесной траектории. Если же начальные уровни производства находятся в интервале значений либо $Q^*/2 < Q_0 < Q^*$, либо $Q_0 > Q^*$, то производство монотонно приближается к своему равновесному значению.

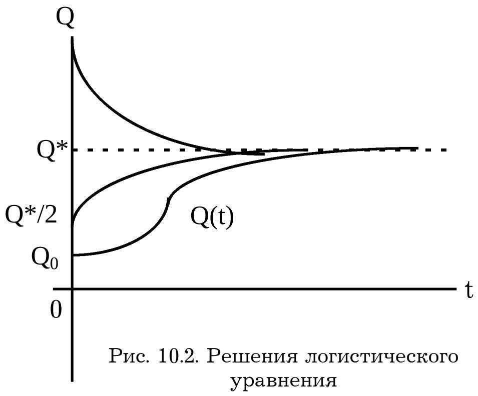

Рис. 10.2. Решения логистического уравнения

Таким образом, именно полное использование производственных мощностей определяет равновесный выпуск продукции, а приближение к нему фактического выпуска уменьшает величину темпа прироста продукции. В этом состоит принципиальное отличие модели с «затухающим темпом»[5)] (10.8) от простой модели (10.6) роста производства, в которой объемы выпуска при положительном темпе $\lambda > 0$ неограниченно возрастают.

Произведем замену координат в модели агрегированного предложения (10.8): вместо абсолютных выпусков будем рассматривать интенсивности, т.е. относительные выпуски $q = Q/Q^*$, а вместо абсолютного, т.е. «календарного», времени - относительное или так называемое *«собственное» время системы*: $\tau = t/T$, где T - масштаб собственного времени системы, который будет определен позже.

Нетрудно убедиться в том, что поскольку $dt = Td\tau$ и $dQ/dt = Q^* dq/dt$, то

[5)] Теория «затухающих темпов», связанная с анализом логистического уравнения, развивалась в Советском Союзе еще в 20-х годах рядом выдающихся экономистов-математиков. Она была разгромлена и запрещена апологетами сталинской индустриализации как противоречащая большевистским устремлениям произвольно перестраивать народное хозяйство, поскольку акцентировала внимание как на прямых, так и косвенных (альтернативных) издержках подобных преобразований.

(10.9) $$dq/d\tau = T\lambda(1-q)q\,.$$

Масштаб собственного времени системы можно подобрать так, чтобы, например, выполнялось равенство:

(10.10) $$T = 1/\lambda\,,$$

откуда следует, что масштаб собственного времени производственной системы (10.8) - это величина, обратная к темпу прироста (при малых объемах производства).

С учетом указанных замен уравнение (10.8), полностью сохраняя свой экономический смысл, перепишется в более простом виде:

(10.11) $$\frac{dq}{q(1-q)} = d\tau\,.$$

Интеграл уравнения (10.11) находится весьма просто, поскольку - это уравнение с разделяющимися переменными. Записав уравнение как

$$[1/q + 1/(1-q)]dq = d\tau\,,$$

а затем проинтегрировав, получаем:

$$\ln q - \ln(1-q) = \tau + \ln A\,.$$

Откуда непосредственно следует равенство:

$$\frac{q}{1-q} = Ae^{\tau}\,,$$

которое после некоторых алгебраических преобразований записывается как

(10.12) $$q = \left[1 + q_0(1-q_0)^{-1}e^{-\tau}\right]^{-1}.$$

Заметим, что анализ этого решения приводит к тем же результатам, которые были получены ранее качественным путем без интегрирования уравнения (10.8) или (10.11), в явном виде.

10.3 Модель экономического роста

Представление о моделях экономического роста можно сформировать на примере *неоклассической модели*, которую при постоянной доле инвестиций в валовом внутреннем продукте (ВВП) часто называют *моделью Р. Солоу*. Со стороны предложения эта модель представлена макроэкономической производственной функцией (10.2). Со стороны спроса она представлена равенством

(10.13) $$Q = I + C\,,$$

где I - валовые инвестиции, C -непроизводственное потребление.

В краткосрочном периоде валовые и чистые капиталовложения обычно не различаются. В долгосрочном периоде сроки функционирования капитала существенно превышают инвестиционный цикл, поэтому необходимо учитывать выбытие капитала, которое может быть довольно значительным, в том числе равняться или даже превышать объем чистых инвестиций, т.е. чистый прирост капитала. С учетом сказанного запишем, что

$$I = \dot{K} + \delta K, \tag{10.14}$$

т.е. валовые инвестиции равны чистым инвестициям (прирост капитала) и выбытию капитала. Функцию выбытия капитала полагаем линейной с нормой выбытия $\delta > 0$.

Предположим теперь, что валовые инвестиции составляют фиксированную часть продукта $I = sQ$, а знания и трудовые ресурсы увеличиваются с постоянными темпами α и β соответственно. С учетом сказанного вычислим изменение капиталовооруженности во времени:

$$\dot{k} \equiv {d \over dt}\left({K \over AL}\right) = {\dot{K} \over AL} - {K \over (AL)^2}[\dot{A}L + A\dot{L}] = sf(k) - (\alpha + \beta + \delta)k,$$

или

$$\dot{k} = sf(k) - \nu k, \tag{10.15}$$

где $\nu=\alpha+\beta+\delta$ - коэффициент «стационарности» для капиталовооруженности.

Уравнение (10.15) - *основное уравнение неоклассической модели экономического роста*. Это нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно капиталовооруженности единицы эффективного труда. Для нормированных на единицу эффективного труда величин оно имеет естественную экономическую интерпретацию: чистый прирост капиталовложений равен разности между валовыми капиталовложениями и капиталовложениями стационарного режима.

В стационарном режиме, т.е. при $k^* = const$, или неизменной капиталовооруженности, чистый прирост капитала равен нулю $\dot{k} = 0$, однако, объемы производства и производительность меняются, поскольку растут трудовые ресурсы и знания, а капитал изнашивается. Если экономика будет затрачивать капитальные вложения только на простое воспроизводство капитала и поддержание неизменных темпов роста знаний и труда, то чистый прирост капитала будет равен нулю. Следовательно, левее точки равновесия капитальные вложения растут, $\dot{k} > 0$, а правее - снижаются, $\dot{k} < 0$, что говорит об устойчивости динамического равновесия: при любых начальных значениях капиталовооруженности эффективного труда макроэкономика за достаточно длительный период времени будет развиваться в стационарном режиме. Другая точка равновесия системы - начало - неустойчива, и, поскольку ее экономический смысл тривиален, то в дальнейшем она не будет рассматриваться.

10.4 Норма накопления, производство и потребление

Положения точки равновесия изменяются, если будут меняться параметры системы: s, α, β и δ. Рассмотрим, как изменится равновесие, если, к примеру, увеличится значение нормы накопления s.

Модель роста - неоклассического типа, т.е. система является конкурентной, а значит, норма накопления совпадает с нормой инвестирования. Это требование имеет принципиальное значение: в конкурентной, в отличие от переходной, экономике сбережения должны приносить доход, следовательно, быть не меньше реальной нормы отдачи на капитал. Увеличение нормы накопления, таким образом, влечет за собой рост инвестиций и капитала, что, в свою очередь, повышает капиталовооруженность эффективного труда. Рост капиталовооруженности приводит к увеличению производства и среднего продукта эффективного труда. Это графически представлено на рис. 10.3.

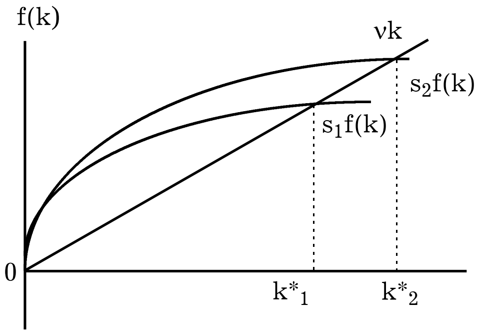

Рис. 10.3. Равновесия макроэкономики

Влияние нормы накопления на равновесное потребление. Для экономического анализа интерес представляет не только динамика капитала и инвестиций, но и потребления. Однако нельзя сказать однозначно, что увеличение нормы накопления приводит к росту потребления - может случиться и наоборот, когда чрезмерная бережливость дает отрицательный прирост потребления. Напомним, что в статическом варианте для модели Кейнса существует *«парадокс бережливости»,* означающий, что при фиксированных инвестициях (более строго - автономных расходах) увеличение нормы сбережений приводит к сокращению равновесного дохода.

Заметим, правда, что аналогия со статической моделью, конечно, не вполне обоснована, поскольку в случае неоклассической динамики сбережения и инвестиции равны, значит, фиксация инвестиций не может сопровождаться ростом сбережений. Между тем, и в динамике, правда по другим причинам, увеличение нормы сбережений может иметь неоднозначные последствия на уровень потребления в стационарной точке.

Потребление на единицу эффективного труда определяется равенством $c = C/AL = (Q-I)/AL$, и в точке равновесия k^* оно удовлетворяет условию:

$$c^*(k^*) = f(k^*) - \nu k^*. \tag{10.16}$$

Полагая зависимость капиталовооруженности и потребления на единицу эффективного труда непрерывной от нормы накопления и дифференцируя (10.16) по параметру s, получаем:

$$\partial c^*/\partial s = [f'(k^*) - \nu]\,\partial k^*/\partial s. \tag{10.17}$$

Пусть $\partial k^*/\partial s > 0$, тогда увеличение нормы накопления увеличивает равновесное потребление только, если предельный продукт больше доли стационарных инвестиций. В противном случае рост доли накопления в продукте имеет противоположный эффект. Значит, ответ на вопрос: положительно или отрицательно на потребление влияет рост нормы накопления, зависит от величины равновесной капиталовооруженности, которая обеспечивает максимальный объем потребления. Нетрудно подсчитать, что максимальный объем равновесного потребления на единицу эффективного труда обеспечивается в точке k^*, где $f'(k^*) = \nu$. Эта точка носит название точки капиталовооруженности, соответствующей *«золотому правилу накопления»*. Превышение фактической капиталовооруженностью этой величины приводит к уменьшению потребления, и лишь в противном случае, увеличивая сбережения, можно надеяться на рост потребления.

Влияние нормы накопления на производство. Теперь вычислим влияние нормы накопления на производство в стационарной точке. В точке равновесия имеет место равенство:

$$f(k^*) = q^*,$$

дифференцируя которое по норме накопления, получаем:

$$\partial q^* / \partial s = f'(k^*) \, \partial k^* / \partial s. \tag{10.18}$$

Вычислим величину $\partial k^* / \partial s$ в точке равновесия k^*. Из условия макроэкономического равновесия:

$$sf(k^*) = \nu k^*$$

находим, что

$$f(k^*) + sf'(k^*) \, \partial k^* / \partial s = \nu \, \partial k^* / \partial s. \tag{10.19}$$

Подставляя выражение для $\partial k^* / \partial s$ из (10.19) в (10.18), получаем:

$$\frac{\partial q^*}{\partial s} = \frac{f'(k^*) f(k^*)}{\nu - sf'(k^*)}. \tag{10.20}$$

Умножим теперь обе части равенства (10.20) на s / q^*, положив в соответствии с условием стационарности $s = \nu k^* / f(k^*)$:

$$s / q^* \; \partial q^* / \partial s = \frac{\nu k^* f'(k^*) / f(k^*)}{\nu[1 - k^* f'(k^*) / f(k^*)}. \tag{10.21}$$

Вспомним теперь, что эластичность продукта по капиталу в точке равновесия k^* равна:

$$\varepsilon_K(k^*) = K/_Q \,\partial Q/_{\partial K} = \frac{Kf'(k^*)}{ALf(k^*)} = \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)}.$$

Подставляя это выражение в (10.21), получаем формулу эластичности среднего продукта эффективного труда по норме накопления:

$$\frac{s}{q^*}\frac{\partial q^*}{\partial s} = \frac{\varepsilon(k^*)}{[1-\varepsilon(k^*)]}. \tag{10.22}$$

В условиях свободной конкуренции, которые справедливы для неоклассической модели роста, величина эластичности производства по капиталу $\varepsilon(k^*)$ соответствует доле возмещения капитала (или прибыли) в произведенном продукте. Если положить ее, к примеру, равной 1/3, как в нормальных условиях конкуренции, то при увеличении нормы накопления на 1%, валовой выпуск возрастет на 0,5%.

Анализ неоклассической модели экономического роста помогает объективно оценить роль, которую играет доля накоплений для ускорения экономического развития. Так, из формулы (10.22) видно, что только очень значительное увеличение нормы накопления, например, с 0,1 до 0,2, т.е. на 100%, оказывает заметное влияние на объем производства, который в этом случае возрастет на 50%.

*   *
*

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Romer, D. (1996). Advanced Macroeconomics. The McGraw Hill Companies, Inc.
2. Turnovsky, S. (1995). Methods of Macroeconomic Dynamics. The MIT Press.
3. Chiang, A. (1984). Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGrow-Hill Book Company, London.
4. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.: Прогресс, 1975.
5. Blanchard O., Fischer S. (1989). Lectures on Macroeconomic Theory, MIT Press .
6. Gandolfo, G. (1996). Economic Dynamics. Springer, Berlin.
7. Strogatz, S. (1994). Nonlinear Dynamics and Chaos. New York, Addison Wesley.

Лекция 11. Проблемы оптимизации в макроэкономике

В современной теории проблема стабилизации рассматривается во многих случаях как задача оптимального выбора между социально приемлемыми уровнями инфляции и безработицы. Можно показать, что достаточно широкий класс макроэкономических проблем подобного типа может быть сведен к решению дифференциальных уравнений второго порядка, как линейных, так и нелинейных.

В конце 80-х - начале 90-х годов целый ряд стран, в том числе Новая Зеландия, Канада, Швеция, Соединенное королевство, Финляндия, Австралия и Испания, стали применять монетарные политики, которые использовали целевые установки в виде предельно допустимых уровней инфляции. При этом значения безработицы задаются либо в неявном виде, либо как ограничения соответствующей задачи оптимизации. Наилучшие в некотором смысле уровни инфляции и безработицы как две ключевые цели макроэкономической стабилизации должны гарантированно находиться на заданном интервале значений при различных воздействиях внешних шоков случайного или детерминированного характера.

Данные цели противоречивы - из простой функции Филлипса видно, что сокращение безработицы может быть достигнуто за счет ускорения инфляции, и наоборот, замедление инфляции может повлечь за собой рост безработицы. В недавних исследованиях *С. Уэлш (Walsh, 1995*) и *Б. Локвуд (B. Lockwood, 1997)* показали, что данные две цели при определенных условиях могут быть непротиворечиво согласованы. В этом случае независимые монетарные власти (центральный банк) должны реализовать так называемый *инфляционный контракт* - издержки макроэкономической стабилизации должны исключать ускорение инфляции. Более того, если система предпочтений у центрального банка, правительства и общества одна и та же, то издержки стабилизации являются линейной функцией инфляции. В таком случае ЦБ реализует линейный инфляционный контракт.

Инфляция, в частности понимаемая как инфляция спроса, аккумулирует воздействие практически всех факторов, влияющих на увеличение размеров и изменение структуры агрегированного спроса. С другой стороны, в краткосрочном периоде безработица - наиболее общая характеристика использования ресурсов, следовательно, агрегированного предложения. Проблема выбора между инфляцией или безработицей, таким образом, это проблема выбора макроэкономического положения, которое, в определенном смысле, отвечает макроэкономическому равновесию, а в модели - наилучшему сочетанию агрегированного спроса и предложения. При этом, конечно, следует иметь в виду, что в рыночной экономике, где нет прямого директивного распределения ресурсов, управление возможно и осуществляется, прежде всего, со стороны спроса. Это значит, что хотя безработица меняет объем и структуру агрегированного предложения, но ее величина сама изменяется под воздействием факторов, лежащих на стороне агрегированного спроса, например, соотношения инфляции и номинального предложения денег. Составим сначала простую модель взаимодействия инфляции и безработицы.

11.1 Простая модель взаимодействия инфляции и безработицы

Расширение производства сокращает безработицу, но поскольку это достигается стимулированием номинального спроса, то уменьшение безработицы происходит одновременно с ростом цен, или инфляцией. Простая кривая Филлипса, дополненная ожиданиями, обычно используется для характеристики зависимости инфляции от уровня безработицы:

$$\pi = -\beta u + h\rho; \quad h > 0; \quad \beta > 0, \tag{11.1}$$

где $\pi = \dot{p} = {}^{d}\!/_{dt}(\ln {}^{P(t)}\!/_{P^*})$ - инфляция; $u=u(t)$ - безработица; $\rho = \rho(t)$ - инфляционные ожидания.

Параметр $\beta = {}^{\partial \pi}\!/_{\partial u}$ - это чувствительность инфляции к изменению безработицы, а параметр $h = {}^{\partial \pi}\!/_{\partial \rho}$ - чувствительность инфляции к изменению ожиданий.

Ожидания изменяются в соответствии с адаптивной схемой, согласно которой ожидания растут, если фактическая инфляция превышает ожидания, и сокращаются в противном случае:

(11.2) $$\dot{\rho} = \theta(\pi - \rho);\ \theta > 0\ ,$$

где θ - параметр адаптации.

Обратная связь - влияние инфляции на реальные переменные, в данной модели - на безработицу, реализуется в следующем уравнении:

(11.3) $$\dot{u} = -k(\mu - \pi);\ k > 0\ .$$

Его смысл состоит в том, что безработица сокращается, когда темп роста номинальной денежной массы $\mu = {}^{d}\!/_{dt}(\ln M(t)) = {}^{\dot{M}}\!/_{M}$ опережает инфляцию, и растет в противоположном случае. Обоснованием этому является утверждение о стимулирующей роли роста денежного предложения в номинальном выражении: если последнее растет быстрее, чем инфляция, то увеличивается агрегированный спрос, что способствует увеличению производства или, что то же самое, сокращению безработицы.

Уравнения (11.1-3) легко скомбинировать. Продифференцируем по времени уравнение (11.2) и подставим в него предварительно продифференцированное уравнение (11.1), а также уравнение (11.3), и после небольших преобразований получаем:

$$\ddot{\rho} = \theta(\dot{\pi} - \dot{\rho}) = \theta(-\beta\dot{u} + h\dot{\rho}) - \theta\dot{\rho} = -\beta(-k\mu + k\pi) + \theta(h-1)\dot{\rho} =$$
$$\theta\beta k\mu - \theta\beta k\rho - [\beta k + \theta(1-h)]\dot{\rho}$$

или

(11.4) $$\ddot{\rho} + a_1\dot{\rho} + a_2\rho = b\ ,$$

где $a_1 = \beta k + \theta(1-h);\ \ a_2 = \theta\beta k;\ b = \theta\beta k\mu$.

Общая зависимость между инфляцией, безработицей и ожиданиями представлена, таким образом, в виде обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно уровней ожиданий и их изменений. В стационарном состоянии, т.е. при неизменной инфляции, как это следует из (11.2), фактическая инфляция равна инфляционным ожиданиям.

Общее решение уравнения (11.4) записывается в виде:

$$(11.5) \qquad \rho(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \mu ,$$

где r_1, r_2 - корни характеристического уравнения

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0 ;$$

и A_1, A_2 - произвольные постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями задачи.

Экономический анализ решения (11.5) сводится, таким образом, к анализу характеристических корней системы, которые, в свою очередь, определяются структурой макроэкономического процесса. Например, если соотношение параметров макроэкономической системы таково, что корни характеристического уравнения действительные и отрицательные (или комплексно-сопряженные с отрицательными действительными частями), то переходный процесс, описываемый решением однородного уравнения, со временем затухает. Траектория ожиданий (11.5) тогда для достаточно больших интервалов времени определяется частным интегралом, который в данной модели равен μ. В этом случае, следовательно, можно заключить, что в долгосрочной перспективе величины ожиданий и инфляции определяются в конечном счете скоростью изменения денежной массы.

11.2 Модель оптимального выбора между инфляцией и безработицей

Проблема оптимального выбора между инфляцией и безработицей может быть промоделирована как задача вариационного исчисления, которая в макроэкономической теории известна как модель *Д. Тейлора* [3].

В этой модели взаимосвязи инфляции и безработицы по-прежнему описываются кривой Филлипса, но представление последней несколько иное, чем в предшествующей модели. Известно, что когда производство равно потенциальному уровню, то безработица находится на своем «нормальном» уровне, или, что то же самое, существует лишь добровольная безработица (так называемая *full-employment unemployment rate*), а вынужденной - нет. Поэтому издержки безработицы могут быть выражены как разность между потенциальным Q^* и фактическим Q объемами производства $(Q^* - Q)$.

Уравнение дополненной ожиданиями кривой Филлипса в этом случае будет следующим:

$$(11.6) \qquad \pi = -\beta(Q^* - Q) + \rho .$$

Ожидания бизнеса и населения изменяются, как и в предыдущей модели, по адаптивной схеме, в связи с чем уравнение (11.2) сохраняется.

Выбор между инфляцией и безработицей в данной постановке задачи состоит в минимизации потерь, вызываемых тем, что величины инфляции и безработицы могут не соответствовать некоторым нормативным значениям, например, характерным для «нормального» экономического развития. Критерий оптимальности, который представляется как функция издержек инфляции и безработицы (социальных потерь), принимает следующий вид:

(11.7) $$\lambda = (Q^* - Q)^2 + \alpha\pi^2 ; \alpha > 0 \; ,$$

где α - параметр соизмерения инфляции и потерь в производстве.

В квадрат разность $(Q^* - Q)$ возводится, поскольку в определенном смысле знак рассогласования фактических и потенциальных значений производства не имеет значения. В равной степени нежелательно как перепроизводство, вызывающее инфляцию, так и недопроизводство, связанное с безработицей. Потери от инфляции оцениваются как разность между «запланированной», скажем на нулевом уровне, и фактической инфляцией.

Критерий оптимальности (11.7) может быть легко представлен как функция только инфляционных ожиданий и их изменений:

$$\lambda(\rho, \dot{\rho}) = (\dot{\rho}/\theta\beta)^2 + \alpha(\dot{\rho}/\theta + \rho)^2 .$$

Следует добавить теперь, что величины экономических или социальных потерь от инфляции и безработицы не равноценны во времени, поэтому они взвешиваются с некоторым ненулевым дисконтом $a>0$, означающим, что ближайшему будущему придается большее значение, чем отдаленному. Таким образом, критерий оптимальности принимает следующий вид:

(11.8) $$\lambda(\rho, \dot{\rho}) \exp(-at) = [(\dot{\rho}/\theta\beta)^2 + \alpha(\dot{\rho}/\theta + \rho)^2] e^{-at} .$$

Граничные условия задачи оптимизации могут быть заданы следующим образом. Период времени, в течение которого ищется оптимальное решение, полагается фиксированным, причем в начальный момент ожидания известны и равны $\rho(0) = \rho_0$, а в конечный момент $T>0$ планируется достичь нулевых ожиданий, т.е. добиться того, чтобы население и бизнес поверили в решимость правительства довести борьбу с инфляцией до конца, $\rho(T) = 0$.

С учетом сказанного задача выбора оптимального сочетания инфляции и безработицы формулируется как задача вариационного исчисления следующим образом: на множестве допустимых способов борьбы с инфляцией и безработицей найти такую траекторию ожиданий, вдоль которой совокупные потери от безработицы и инфляции минимальны, т.е.

(11.9) $$\Lambda[\rho] = \int_0^T \lambda(\rho, \dot{\rho}) \exp(-at) dt \to \min$$

при $\rho(0) = \rho_0$ и $\rho(T) = 0$.

Известно, что необходимые условия для данной задачи вариационного исчисления определяются как уравнение Эйлера:

(11.10) $$F_\rho - d/dt F_{\dot{\rho}} = 0 ,$$

где $F_\rho, F_{\dot{\rho}}$ - соответствующие производные по ожиданиям и их изменениям подынтегральной функции $F(\rho, \dot{\rho}) = \lambda(\rho, \dot{\rho}) \exp(-at)$ в выражении (11.9).

Уравнение Эйлера - дифференциальное уравнение второго порядка, которое в эквивалентной форме может быть записано как

$$F_{\dot\rho\dot\rho}\ddot\rho + F_{\dot\rho\rho}\dot\rho + F_{\dot\rho t} - F_{\rho} = 0 .$$

Вычисляя соответствующие производные и подставляя их в уравнение (11.10), после некоторых преобразований получаем:

(11.11) $$\ddot\rho - a\dot\rho - \Omega\rho = 0,$$

где $$\Omega = {\alpha\beta^2\theta(a+\theta)} \Big/ {(1+\alpha\beta^2)}; \quad \Omega > 0 .$$

Таким образом, модель оптимизации выбора между инфляцией и безработицей сводится к однородному дифференциальному уравнению второго порядка. Его решением, т.е. траекторией оптимальных значений ожиданий, является следующая функция:

(11.12) $$\rho(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} ,$$

где $A_1; A_2$ - константы, определяемые из заданных граничных условий задачи, а r_1, r_2 - корни характеристического уравнения $r^2 - ar - \Omega = 0$.

При заданных параметрах задачи характеристические корни

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + 4\Omega})$$

действительные и разных знаков. Пусть, к примеру, $r_1 > 0; r_2 < 0$; тогда из заданных граничных условий получаем два уравнения для произвольных констант:

$$A_1 + A_2 = \rho_0$$
$$A_1 e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} = 0 ,$$

откуда с учетом знака корней находим: $A_1 < 0; A_2 > 0$. Графически решение (11.12) представляет монотонно убывающую кривую (рис. 11.1), поскольку в силу знаков характеристических корней и произвольных постоянных

$$d\rho \big/ dt = r_1 A_1 e^{r_1 t} + r_2 A_2 e^{r_2 t} < 0 .$$

Траектория оптимальных ожиданий $\rho(t)$ имеет начальную точку $(0, \rho_0)$, где $\rho_0 = A_1 + A_2$, и конечную точку $(T, 0)$. Экономиче-

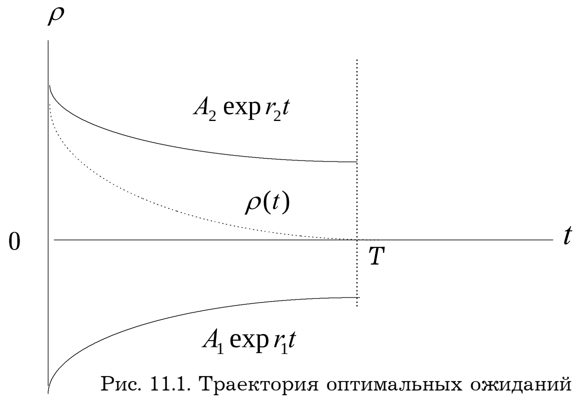

Рис. 11.1. Траектория оптимальных ожиданий

ский анализ траектории оптимальных значений ожиданий говорит о том, что эффективная макроэкономическая политика, т.е. политика, способная влиять на ожидания бизнеса и населения, в принципе, за достаточно длительный период времени способна остановить инфляцию.

11.3 Оптимальная модель экономического роста

В лекционном курсе неоднократно указывалось на то, что современная макроэкономическая теория строится на «микро-основах», т.е. гипотезах поведения хозяйствующих агентов. Поведение последних в типичном случае принимается как рациональное, формальным аналогом которого является принцип оптимальности.

В рамках данного подхода рассмотрим задачу оптимизации поведения макроэкономической системы в долгосрочном периоде, полагая, что эта система конкурентна и макроэкономические траектории являются результатом рационального поведения большого количества взаимодействующих производителей и потребителей. В такой постановке ограничением задачи явится *уравнение движения (поведения) системы*, которое определим как основное уравнение неоклассического роста экономики, рассмотренное *в лекции 10*:

(11.13) $$\dot{k} = f(k) - \nu k - c\ .$$

Напомним, что уравнение (11.13) выводится точно также, как и уравнение модели *Р. Солоу* (10.15), но не предполагает, что валовые инвестиции - это фиксированная часть продукта. Напротив, в модели оптимизации ищется наилучшее в каком-то смысле соотношение между потреблением и накоплением (инвестициями). Уравнение зависит от управляющего параметра $c = c(t)$ - потребления на единицу эффективного труда. Экономическая логика при этом следующая: выбор оптимального значения непроизводственного потребления определяет величины инвестиций, капитала, а следовательно, и выпуска. Значит, следует выбирать такие величины потребления, чтобы в перспективе суммарная (интегральная) полезность потребления была бы максимальной, что, в свою очередь, требует расширения производства и осуществления инвестиций.

По экономическому смыслу, величина потребления в каждый момент времени должна быть положительной и не может превосходить объема производства в целом, т.е. функция потребления соответствует ограничению:

(11.14) $$0 \le c(t) \le f(k)\ .$$

Как принято в экономической теории, предположим существование функции полезности потребления $U = U[c(t)]$ такой, что

(11.15) $$U'(c) > 0;\ U''(c) < 0;\ \lim_{c\to 0} U'(c) = \infty;\ \lim_{c\to\infty} U'(c) = 0\ .$$

Условия (11.15) означают, что функция полезности - это строго вогнутая функция от объемов потребления на единицу эффективного труда. Показателем кривизны этой функции служит величина эластичности предельной полезности по потреблению:

(11.16) $$\sigma(c) = -\frac{c}{U'(c)}\frac{dU'(c)}{dc} = -c\frac{U''(c)}{U'(c)}.$$

Будем полагать, что полезности потребления, полученные в разные моменты времени, не зависят друг от друга, и их можно складывать, приводя к единой мере, т.е. дисконтируя. Значит, величина $\exp(-at)U[c(t)]$ измеряет полезность потребления в момент $t>0$, приведенную к моменту $t=0$. Параметр дисконтирования a будем считать положительной и постоянной величиной. Сказанное позволяет сформулировать критерий оптимальности следующего вида:

(11.17) $$V[c] = \int_0^{t_1} e^{-at}U[c(t)]dt,$$

в соответствии с которым на перспективу должна быть выбрана такая траектория потребления, следовательно, производства и капиталовооруженности, которая максимизирует интегральную величину полезности потребления для всей предвидимой перспективы.

При такой постановке задачи возникает, однако, естественная сложность: как бы велик не был период оптимизации, экономика не перестает развиваться и за его пределами, а поэтому необходимо предусмотреть и капиталовложения в конце данного периода. Как их задавать - неясно, а с другой стороны, их величина будет предопределять и инвестиции в данном периоде, т.е. предрешать результаты оптимизации. Эта трудность может быть обойдена, если полагать период оптимизации бесконечным и гарантировать сходимость несобственного интеграла:

(11.18) $$V[c] = \int_0^{\infty} e^{-at}U[c(t)]dt.$$

Интеграл (11.18) сходится, если, например, начальное значение капиталовооруженности $k(0)=k_0$ меньше максимально достижимого уровня $\tilde{k}$ и норма дисконтирования положительна. В этом случае для потребления справедливо $c(t) \le f(\tilde{k})$ и

$$\int_0^{\infty} e^{-at}U[c(t)]dt \le \int_0^{\infty} e^{-at}U[f(\tilde{k})]dt \le \frac{U[f(\tilde{k})]}{a}.$$

Итак, задача оптимального экономического роста на перспективу формулируется в целом следующим образом:

найти максимум $$V[c] = \int_0^{\infty} e^{-at}U[c(t)]dt$$

при условиях

(11.19) $$\dot{k} = f(k) - \nu k - c;\ k(0) = k_0$$
$$0 \le c(t) \le f(k).$$

В этой задаче состоянием системы, или ее фазовой переменной, является капиталовооруженность, а управлением, определяющим оптимальную траекторию экономического роста в перспективе, - функция потребления на единицу эффективного труда.

11.4 Решение системы уравнений оптимальной модели

Решением задачи оптимизации (11.19) является траектория потребления на единицу эффективного труда *c*(t)* и траектория капиталовооруженности эффективного труда *k*(t),* вдоль которых функционал $V[c]$ достигает максимума. В формулировке (16.19) задача оптимизации может решаться на основе принципа максимума Понтрягина [3, 4]. Функция Гамильтона для этой задачи записывается в виде:

$$H(t,c,k,q) = e^{-at}\{U(c) + q[f(k) - \nu k - c]\}, \tag{11.20}$$

где q - сопряженная переменная. Экономически естественно рассматривать как сопряженную переменную также и функцию $y = e^{-at}q$, значение которой приведено к настоящему моменту времени.

В соответствии с принципом максимума оптимальное управление, т.е. оптимальная функция c^* потребления на единицу эффективного труда, максимизирует гамильтониан (11.20) в каждый момент времени. Дифференцируя (11.20), для внутренней точки максимума, где выполняется необходимое условие $\partial H / \partial c = 0$, получаем, следовательно:

$$q = U'(c). \tag{11.21}$$

Экономический смысл (11.21) в том, что сопряженная переменная получает интерпретацию оптимальной цены единицы капитала вдоль оптимальной траектории, которая равна предельной полезности единицы потребления (все величины нормированы на единицу эффективного труда). Соответственно сопряженная переменная $y = e^{-at}U'(c)$ имеет смысл оптимальной цены единицы полезности, приведенной к настоящему моменту времени.

Каноническое уравнение для фазовой переменной - это просто уравнение движения:

$$\dot{k} = \partial H / \partial y \quad \text{или} \quad \dot{k} = f(k) - \nu k - c. \tag{11.22}$$

Каноническое уравнение для сопряженной переменной записывается в виде:

$$\dot{y} = -\partial H / \partial k; \; \dot{y} = d/dt\,(e^{-at}q) = -aqe^{-at} + e^{-at}\dot{q};$$

$$\partial H / \partial k = y[f'(k) - \nu]; \text{ и , окончательно,}$$

$$\dot{q} = -q[f'(k) - (\nu + \alpha)]. \tag{11.23}$$

Уравнения для фазовой переменной (11.22) и сопряженной переменной (11.23) вместе с условием оптимальности (11.21) определяют оптимальную траекторию экономического роста $\{k^*(t), c^*(t)\}$, вдоль которой существуют оптимальные цены. Для экономического анализа, однако, удобнее использовать не фазовую плоскость «капиталовооруженность - оптимальные цены», а плоскость с координатами «капиталовооруженность - потребление». В этих целях преобразуем дифференциальное уравнение (11.2) для сопряженной переменной.

Поскольку вдоль оптимальной траектории для сопряженной переменной справедливо равенство (11.21), то $\dot{q} = U''(c)\dot{c}$, и с помощью соотношения (11.16) для кривизны функции полезности уравнение (11.23) может быть записано в виде:

$$\dot{c} = \frac{1}{\sigma(c)}[f'(k) - (\nu + a)]c. \tag{11.24}$$

Таким образом, решение задачи оптимального экономического роста находится из следующих уравнений для фазовой и сопряженной переменных и управления:

$$\begin{aligned} q &= U'(c) \\ \dot{k} &= f(k) - \nu k - c \\ \dot{c} &= \frac{1}{\sigma(c)}[f'(k) - (\nu + a)]c. \end{aligned} \tag{11.25}$$

11.5 Качественный анализ оптимальных траекторий

Экономический анализ решений оптимальной модели проведем, используя рис. 11.2, где на первом из них изображены объемы среднего продукта q, капиталовооруженности k и стационарные капиталовложения, а на втором - траектории равновесных значений капиталовооруженности и потребления.

Траектории равновесных значений капиталовооруженности и потребления представлены на рис. 11.2 соответственно кривыми $\dot{k} = 0$ и $\dot{c} = 0$. Вдоль кривой равновесной капиталовооруженности потребление определяется уравнением $c^* = f(k^*) - \nu k^*$. Значит, в каждой точке выше этой кривой потребление выше оптимального значения, что может быть только, если $\dot{k} < 0$. Следовательно, в каждой точке выше кривой равновесий капиталовооруженность будет снижаться, а в точках, расположенных ниже кривой $\dot{k} = 0$, - повышаться.

Потребление не меняется, если капиталовооруженность равновесная и в точке равновесия выполняется условие $f'(k^*) = \nu + a$. Значит, оптимальные уровни потребления представлены на рис. 11.2 вертикальной прямой, проходящей через точку k^*. Это - уровни потребления, соответствующие модифицированному «золотому правилу накопления», которое скорректировано относительно правила, установленного в предыдущем разделе, в силу ненулевого дисконтирования единицы полезности во времени.

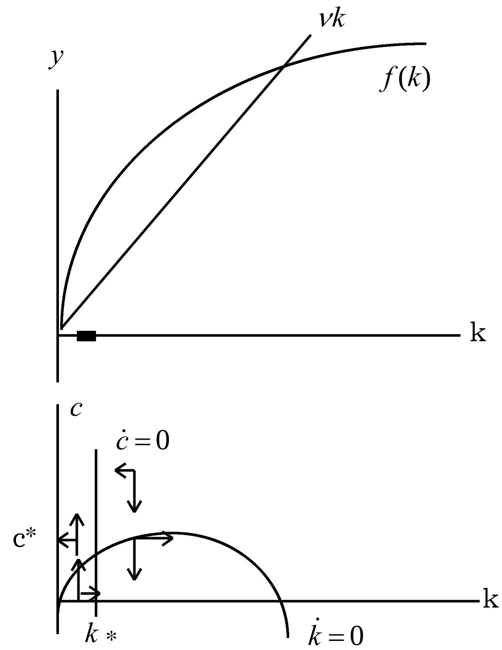

Рис. 11.2. Фазовая диаграмма экономического роста

Равновесный уровень капиталовооруженности может реализовать бесконечно много вариантов потребления, соответствующих модифицированному «золотому правилу накопления». Однако в произвольной точке прямой $\dot{c}=0$ капиталовооруженность может меняться, так как инвестиции не нулевые. Если капиталовооруженность выше равновесной, то ее предельный продукт меньше, чем $\nu + a$, и потребление снижается; в противном случае оптимальное значение потребления возрастает. Возможные направления оптимальных траекторий потребления и капиталовооруженности на фазовой плоскости *(k,c)* показаны на рис. 11.2. В точке k^*, c^* капиталовооруженность и потребление не меняются, это - траектория сбалансированного роста, или магистраль.

Для того, чтобы определить характер точки равновесия, необходимо линеаризовать канонические уравнения для переменных $k(t)$ и $c(t)$ в ее малой окрестности. Матрица Якоби в точке равновесия имеет вид:

$$J^* = \begin{pmatrix} a & -1 \\ \dfrac{c^* f''(k^*)}{\sigma(c^*)} & 0 \end{pmatrix},$$

а ее след и детерминант равны соответственно: $trJ^* = a > 0;\quad \det J^* = \dfrac{c^* f''(k^*)}{\sigma(c)} < 0$,

поэтому точка равновесия системы - это «седло».

Если начальные условия системы находятся на «ветви устойчивости», то с течением времени система эволюционирует к точке равновесия $\{k^*, c^*\}$, в которой средний продукт, капиталовооруженность и потребление на единицу эффективного труда неизменны, а производство и капитал растут с темпом, равным $\alpha+\beta$. Вне ветви устойчивости капиталовооруженность и потребление на единицу эффективного труда возрастают или уменьшаются либо совместно, либо порознь. Поскольку устойчивости в точке равновесия нет, то обеспечение модифицированного золотого правила накопления - дело весьма тонкое: любое сколь угодно малое возмущение «сбрасывает» систему с ветви устойчивости, и она начинает дрейфовать в любом из направлений изменения капиталовооруженности и потребления.

* *
*

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Romer, D. (1996). Advanced Macroeconomics. The McGraw Hill Companies,Inc.*
2. *Turnovsky, S. (1995). Methods of Macroeconomic Dynamics. The MIT Press.*
3. *Chiang, A. (1992). Elements of Dynamic Optimization, McGrow-Hill, Inc., London.*
4. *Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.: Прогресс, 1975.*
5. *Gandolfo, G. (1996). Economic Dynamics. Springer, Berlin.*
6. *Takayama, A. (1985). Mathematical Economics. Cambridge University Press.*
7. *Aghion, P., Howitt, P. (1998). Endogeneous Growth Theory. The MIT Press.*