

## ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

### Применение метода конечных разностей для оценки финансовых инструментов<sup>1)</sup>

Шведов А.С.

В работе показано, как выводятся уравнения с частными производными для цен финансовых инструментов. На примере конвертируемых облигаций и европейских опционов на акции продемонстрировано, как ставятся начальные и краевые условия, приводящие для одного и того же уравнения к совершенно разным решениям. Представлены результаты расчетов, в том числе и с использованием одной новой для данной области разностной схемы.

#### 1. Введение

Расчет безарбитражных цен финансовых инструментов – это задача, которой во всем мире уделяется в настоящее время очень большое внимание. Обзоры существующих методов можно найти, например, в книгах [6, 12, 19].

Один из основных подходов к расчетам безарбитражных цен заключается в том, чтобы вывести уравнение с частными производными для безарбитражной цены финансового инструмента, поставить для этого уравнения начально-краевую задачу и затем решить ее. При этом уравнение с частными производными чаще всего оказывается уравнением параболического типа, а поставленная начально-краевая задача во многих случаях является задачей со свободными границами. Иногда начально-краевую задачу возможно решить в явном виде (т.е. найти решение в виде формулы), иногда применяются те или иные методы приближенного (численного) решения начально-краевых задач, например метод конечных разностей (разностные схемы). Но основное значение все же имеют численные методы, в явном виде решение удается найти достаточно редко. Расчетам безарбитражных цен финансовых инструментов, связанным с использованием уравнений с частными производными, посвящены, например, книги [21, 24].

К этому же направлению, расчетам безарбитражных цен финансовых инструментов путем численного решения начально-краевых задач для уравнений с частными производными, относится и настоящая работа. Применяемая нами разностная схема позволяет в ряде задач улучшить по сравнению с некоторыми тра-

---

<sup>1)</sup> Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 00-01-00201.

диционными разностными схемами качество расчетов величин дельта и гамма, используемых при хеджировании.

Отметим, что существенное отличие реальной рыночной цены финансового инструмента от его рассчитанной безарбитражной цены может указывать на возможность создания «денежной помпы» (арбитражной стратегии) на финансовом рынке. Скорее всего, такая «денежная помпа» не просуществует долго. Как только она будет обнаружена, произойдет увеличение спроса или предложения для соответствующего финансового инструмента, это вызовет изменение его цены, и возможность «денежной помпы» исчезнет.

В разделе 2 приводится вывод уравнения, которым описывается поведение безарбитражных цен (называемых, для краткости, просто ценами) многих финансовых инструментов. При этом используются обычные предположения об идеальности рынка:

- абсолютная ликвидность и бесконечная делимость всех активов;
- совпадение цены покупки с ценой продажи;
- отсутствие налогов и трансакционных издержек;
- возможность неограниченного заимствования и одалживания по одной и той же процентной ставке, одинаковой для всех участников (но которая может меняться со временем);
- разрешение коротких продаж и возможность неограниченного использования полученных от них средств<sup>2)</sup>;
- отсутствие кредитного риска.

В разделе 3 показано, что при определенных упрощающих предположениях уравнение, которым описывается поведение безарбитражных цен финансовых инструментов, сводится к линейному уравнению конвекции-диффузии. Для линейного уравнения конвекции-диффузии приводится разностная схема, совмещающая в себе черты разностной схемы с центральными разностями второго порядка аппроксимации и противопоточной разностной схемы первого порядка аппроксимации и имеющая при этом второй порядок аппроксимации.

В разделе 4 рассматриваются европейские опционы колл и пут на акции. Начально-краевые задачи для параболического уравнения в данном случае таковы, что для них существуют аналитические решения, полученные в [2, 18]. Эти аналитические решения используются для проверки различных разностных схем.

В разделе 5 рассматриваются облигации, у владельцев которых есть право обменять облигации на акции некоторой компании (конвертируемые облигации). Уравнения с частными производными используются для расчета безарбитражных цен таких облигаций, а также для определения условий, при которых следует производить обмен облигаций на акции.

В разделе 6 приводится вывод уравнения с частными производными с двумя невременными переменными для безарбитражной цены финансового инструмента, которое возникает, например, если учитывать стохастический характер изменения цены акции и стохастический характер изменения процентных ставок.

Данная работа основана на репринтах [28, 32].

---

<sup>2)</sup> Длинные и короткие позиции – это совсем другое, чем долгосрочные и краткосрочные позиции. Подробно о том, что это такое, сказано, например, в книге [30].

## 2. Уравнение с частными производными для цены финансового инструмента

Рассмотрим промежуток времени  $\Delta t$  и предположим, что за этот промежуток времени цена акции  $S$  изменяется по закону

$$(1) \quad \frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} + o(\Delta t),$$

и цена финансового инструмента  $V$  изменяется по закону

$$(2) \quad \frac{\Delta V}{V} = \mu' \Delta t + \sigma' \varepsilon' \sqrt{\Delta t} + o(\Delta t).$$

Здесь  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  – стандартные нормальные случайные величины  $N(0, 1)$ ;  $\mu$  является известной функцией от  $S$  и  $t$ , будем считать эту функцию неслучайной, хотя это ограничение не является принципиальным;  $\sigma$  также является известной (неслучайной) функцией от  $S$  и  $t$ <sup>3)</sup>. Выражения для  $\mu'$  и  $\sigma'$  выводятся ниже.

Поясним, почему в качестве моделей для цен выбираются именно уравнения (1) и (2). Пусть промежуток времени  $\Delta t$  разбит на две части  $\Delta t_1$  и  $\Delta t_2$ . Тогда общее приращение цены складывается из двух приращений

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2, \quad \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2.$$

Из того, что математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий и дисперсия суммы равна сумме дисперсий (в случае независимых приращений), а также учитывая, что константа из под знака дисперсии выносится с возведением в квадрат, получаем, что в правых частях уравнений (1) и (2) в первых слагаемых  $\Delta t$  должно быть в первой степени, а во вторых слагаемых – в степени  $1/2$ .

Предположим, что цена финансового инструмента  $V(S, \theta, t)$  является достаточно гладкой функцией от  $S$ ,  $t$  и некоторого показателя  $\theta$ , изменяющегося по закону

$$(3) \quad \Delta \theta = \varphi \Delta t + o(\Delta t),$$

где  $\varphi$  – это известная (неслучайная) функция от  $S$  и  $t$ .

Используя формулу Тейлора, получаем

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta V &= V(S + \Delta S, \theta + \Delta \theta, t + \Delta t) - V(S, \theta, t) = \\ &= V_S \Delta S + V_\theta \Delta \theta + V_t \Delta t + \frac{1}{2} V_{SS} \Delta S^2 + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Из (2) и (4) следует, что

---

<sup>3)</sup> Данный подход можно применять и тогда, когда  $\sigma$  является случайной функцией от  $S$  и  $t$ . Но уравнения с частными производными при этом имеют существенно другой вид. Этим задачам посвящены, например, работы [10, 15, 23].

$$\begin{aligned}
 \mu' V \Delta t &= E(\Delta V) + o(\Delta t) = \\
 (5) \quad &= V_S E(\Delta S) + V_\theta \varphi \Delta t + V_t \Delta t + \frac{1}{2} V_{SS} E(\Delta S^2) + o(\Delta t) = \\
 &= (V_S \mu S + V_\theta \varphi + V_t + \frac{1}{2} V_{SS} \sigma^2 S^2) \Delta t + o(\Delta t).
 \end{aligned}$$

Устремляя  $\Delta t$  к нулю, получаем, что

$$\mu' V = V_S \mu S + V_\theta \varphi + V_t + \frac{1}{2} V_{SS} \sigma^2 S^2.$$

Из (2), (4) и (5) следует, что

$$\begin{aligned}
 (6) \quad V \sigma' \varepsilon' \sqrt{\Delta t} &= \Delta V - \mu' V \Delta t + o(\Delta t) = \\
 &= V_S (\Delta S - E(\Delta S)) + \frac{1}{2} V_{SS} (\Delta S^2 - E(\Delta S^2)) + o(\Delta t).
 \end{aligned}$$

Заметим, что

$$(7) \quad \Delta S - E(\Delta S) = \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t} + o(\Delta t)$$

и

$$(8) \quad \Delta S^2 - E(\Delta S^2) = O(\Delta t).$$

Тогда из (6), устремляя  $\Delta t$  к нулю, получаем, что

$$V \sigma' \varepsilon' = V_S \sigma S \varepsilon.$$

Отсюда

$$(9) \quad \Delta V = (V_S \mu S + V_\theta \varphi + V_t + \frac{1}{2} V_{SS} \sigma^2 S^2) \Delta t + V_S \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t} + o(\Delta t).$$

Данный результат является дискретным аналогом формулы Ито.

В некоторый момент времени  $t$  составим портфель, в который входят один рассматриваемый финансовый инструмент и  $(-\delta)$  акций. Число  $\delta$  пока является неопределенным. Стоимость этого портфеля

$$\Pi = V - \delta S.$$

Если в течение промежутка времени  $\Delta t$  число акций  $(-\delta)$  в портфеле остается неизменным, то за этот промежуток времени стоимость данного портфеля изменится на величину

$$\Delta \Pi = \Delta V - \delta \Delta S - \delta D(S, \theta, t) S \Delta t + K(S, \theta, t) \Delta t.$$

Здесь  $D(S, \theta, t) S \Delta t$  – дивиденды, выплачиваемые в течение промежутка времени  $\Delta t$  на 1 акцию;  $K(S, \theta, t) \Delta t$  – выплаты в течение промежутка времени  $\Delta t$ , связанные с рассматриваемым финансовым инструментом. Это могут быть, например, купоны, если мы рассматриваем конвертируемую облигацию.

Подставляя в формулу для  $\Delta\Pi$  выражения (1) и (9), получаем

$$\Delta\Pi = \sigma S(V_S - \delta)\varepsilon\sqrt{\Delta t} + (V_S\mu S + V_\theta\varphi + V_t + \frac{1}{2}V_{SS}\sigma^2 S^2 - \delta\mu S - \delta D(S, \theta, t)S + K(S, \theta, t))\Delta t + o(\Delta t).$$

Выбрав  $\delta = V_S$ , можно исключить случайную компоненту в изменении стоимости портфеля. Тогда

$$\Delta\Pi = (V_\theta\varphi + V_t + \frac{1}{2}V_{SS}\sigma^2 S^2 - V_S D(S, \theta, t)S + K(S, \theta, t))\Delta t + o(\Delta t).$$

Невозможность арбитража приводит к соотношению

$$\Delta\Pi = r(t)\Pi\Delta t,$$

где  $r(t)$  – процентная ставка в момент времени  $t$  при заимствовании на срок  $\Delta t$ . Отсюда

$$V_\theta\varphi + V_t + \frac{1}{2}V_{SS}\sigma^2 S^2 - V_S D(S, \theta, t)S + K(S, \theta, t) = r(t)(V - V_S S),$$

и окончательно уравнение для цены  $V(S, \theta, t)$  имеет вид

$$(10) \quad V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r(t) - D(S, \theta, t))SV_S + \varphi V_\theta - r(t)V + K(S, \theta, t) = 0.$$

Зависимость цены финансового инструмента кроме  $S$  и  $t$  еще и от некоторого показателя  $\theta$ , изменяющегося по закону (3), необходимо учитывать, например, при оценке азиатских опционов, т.е. таких опционов, выплаты по которым зависят от средней цены акции за некоторый период. В книге [14, с. 376–377] взято

$$\theta(t) = \int_0^t S(u) du.$$

Тогда уравнение (10) (при  $K(S, \theta, t) = 0$ ) принимает вид

$$(11) \quad V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r(t) - D(S, \theta, t))SV_S + SV_\theta - r(t)V = 0.$$

При оценке азиатских опционов можно пойти и по немного другому пути, выбрав

$$\theta(t) = \frac{1}{t} \int_0^t S(u) du.$$

Тогда, как нетрудно увидеть, уравнение (10) принимает вид

$$(12) \quad V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r(t) - D(S, \theta, t))SV_S + \frac{S - \theta}{t} V_\theta - r(t)V = 0.$$

В работе [25] исследован вопрос, какое из уравнений, (11) или (12), лучше использовать в качестве исходного при расчетах безарбитражных цен азиатских опционов. Установлено, что точность результатов при использовании уравнения

(12) несколько выше. Отметим, что в данной работе рассматривается только случай, когда процентная ставка  $r$  не зависит от  $t$ .

Через  $P(t, T)$  обозначим цену в момент времени  $t$  бескупонной облигации, по которой в момент времени  $T$  гарантированно выплачивается 1 рубль,  $t \leq T$ . Очевидно, что  $P(T, T) = 1$ ; при  $t < T$  справедливы неравенства  $0 < P(t, T) < 1$ . При фиксированном  $t$  величина  $P(t, T)$ , как функция от  $T$ , является монотонно убывающей. Будем считать, что функция  $P(0, t)$  достаточно гладкая. Зная функцию  $P(0, t)$ , процентную ставку  $r(t)$  можно ввести через формулу

$$P(0, t) = \exp\left(-\int_0^t r(u) du\right).$$

Нетрудно увидеть, что при таком определении

$$(13) \quad r(t) = -\frac{1}{P(0, t)} \frac{dP(0, t)}{dt}.$$

### 3. Методы численного решения уравнений с частными производными для цен финансовых инструментов

В этом разделе мы будем считать, что цена финансового инструмента  $V$  является функцией только от  $S$  и  $t$ , процентная ставка  $r$  не зависит от времени, дивиденды в рассматриваемый период по акции не выплачиваются, т.е.  $D(S, t) = 0$ , и никаких выплат, связанных с рассматриваемым финансовым инструментом, нет, т.е.  $K(S, t) = 0$ . Тогда уравнение (10) принимает вид

$$(14) \quad V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0.$$

Чтобы привести уравнение (14) к более привычному виду, изменим обозначение и через  $t$  обозначим время, остающееся до времени  $T > 0$ , срока окончания действия финансового инструмента, т.е.

$$t_{\text{нов}} = T - t_{\text{стар}}.$$

Тогда уравнение (14) принимает вид

$$V_t - rSV_S = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} - rV.$$

После введения новой неизвестной функции  $U(S, t) = e^{rt} V(S, t)$  уравнение записывается в виде

$$U_t - rSU_S = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 U_{SS}.$$

Сделав замену переменной  $x = \alpha \ln S$ , приводим уравнение к виду

$$(15) \quad U_t - \alpha \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) U_x = \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 U_{xx}.$$

Введем обозначения

$$c = -\alpha \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right), \quad \mu = \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2.$$

Тогда уравнение (15) записывается в виде

$$(16) \quad U_t + cU_x = \mu U_{xx}.$$

Это простейшее уравнение конвекции-диффузии с постоянными коэффициентами.

Решение уравнения (16) будем искать в области

$$[x_{\min}, x_{\max}] \times [0, T].$$

При  $t=0$  считается заданным начальное условие, при  $x = x_{\min}$  и  $x = x_{\max}$  — краевые условия. Через  $u_j^n$  обозначим численное решение в точке  $(x_{\min} + jh, n\tau)$ , где  $h > 0$  и  $\tau > 0$  являются шагами соответственно по пространству и времени, эти шаги остаются постоянными в течение всего расчета. Кроме того, считаем, что шаги  $h$  и  $\tau$  выбраны так, что числа  $(x_{\max} - x_{\min})/h$  и  $T/\tau$  целые, тогда  $j = 0, 1, \dots, (x_{\max} - x_{\min})/h$ ;  $n = 0, 1, \dots, T/\tau$ . Мы будем пользоваться обозначениями

$$v = \frac{c\tau}{h}, \quad \gamma = \frac{\mu\tau}{h^2}$$

и всегда считать, что шаги  $h$  и  $\tau$  выбраны так, что выполняется условие  $-1 \leq v \leq 1$ .

Во всех случаях диффузионный член  $\mu U_{xx}$  в уравнении (16) мы будем аппроксимировать таким образом, чтобы при  $c=0$  разностная схема для уравнения (16) превращалась в разностную схему, предложенную в работе [7] для уравнения

$$(17) \quad U_t = \mu U_{xx}.$$

Данная разностная схема имеет вид

$$(18) \quad u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\gamma}{2} (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n).$$

Для конвекционного члена  $cU_x$  в уравнении (16) мы рассмотрим 3 различные аппроксимации. При названии разностной схемы будем исходить из способа аппроксимации конвекционного члена, поскольку аппроксимация диффузионного члена во всех разностных схемах одинакова.

Противопоточная разностная схема первого порядка аппроксимации

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n + \frac{\gamma}{2} (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) - v(u_{j+1}^n - u_j^n) & \text{при } c < 0 \\ u_j^n + \frac{\gamma}{2} (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) - v(u_j^n - u_{j-1}^n) & \text{при } c > 0 \end{cases}$$

Разностная схема с центральными разностями второго порядка аппроксимации

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\gamma}{2}(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{\nu}{2}\left(\frac{1}{2}u_{j+1}^{n+1} - \frac{1}{2}u_{j-1}^{n+1}\right) - \frac{\nu}{2}\left(\frac{1}{2}u_{j+1}^n - \frac{1}{2}u_{j-1}^n\right).$$

Эти 2 разностные схемы являются общеупотребительными. Кроме того, нами рассматривается еще 1 разностная схема, которую мы будем называть смешанной. Эта разностная схема впервые, насколько нам известно, была предложена в работе [28]. Она имеет второй порядок аппроксимации и является в некотором смысле промежуточной между разностной схемой с центральными разностями второго порядка аппроксимации и противопоточной разностной схемой, почему мы и называем ее смешанной.

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\gamma}{2}(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{\nu}{2}\left(-\frac{1-\nu}{2}u_{j-1}^{n+1} - \nu u_j^{n+1} + \frac{1+\nu}{2}u_{j+1}^{n+1}\right) - \frac{\nu}{2}\left(-\frac{1+\nu}{2}u_{j-1}^n + \nu u_j^n + \frac{1-\nu}{2}u_{j+1}^n\right).$$

В дальнейшем, для краткости, **схемой 1** будем называть противопоточную разностную схему первого порядка аппроксимации, **схемой 2** – разностную схему с центральными разностями второго порядка аппроксимации, **схемой 3** – смешанную разностную схему второго порядка аппроксимации. Все эти 3 разностные схемы являются неявными. В расчетах, описанных в настоящем разделе, получающиеся системы линейных алгебраических уравнений решаются методом прогонки.

К настоящему времени разработано очень много методов численного решения краевых задач для уравнения конвекции

$$(19) \quad U_t + cU_x = 0.$$

Например, в работе [20] дан обзор более 100 различных алгоритмов. При этом, несмотря на многочисленные сравнения, как теоретические, так и путем вычислительного эксперимента, определить 1 наилучший алгоритм для численного решения краевых задач для уравнения (19) не удастся.

Если ограничиваться расчетами гладких решений, не имеющих больших градиентов, то разностная схема

$$(20) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \nu\left(-\frac{1+\nu}{2}u_{j-1}^n + \nu u_j^n + \frac{1-\nu}{2}u_{j+1}^n\right)$$

для уравнения конвекции (19), предложенная в работах [16, 26], как правило, дает хорошие результаты.

Отталкиваясь от разностной схемы (20), поясним соображения, приводящие к схеме 3.

Известно, что разностная схема (20) может быть построена методом неопределенных коэффициентов. Для этого рассматриваются всевозможные разностные уравнения вида



$$u_j^{n+1} = u_j^n - v \left( \alpha u_{j-1}^n + \beta u_j^n + \gamma u_{j+1}^n \right).$$

Из условия аппроксимации со вторым порядком в точке  $(x_{\min} + jh, n\tau)$  уравнения (19) разностным уравнением на решениях уравнения (19) получается система линейных уравнений для  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 + O(h^3), \\ -\alpha + \gamma &= 1 + O(h^2), \\ -\alpha - \gamma &= v + O(h). \end{aligned}$$

Пренебрегая последними слагаемыми в правых частях всех уравнений, получаем

$$\alpha = -\frac{1+v}{2}, \quad \beta = v, \quad \gamma = \frac{1-v}{2},$$

что соответствует разностной схеме (20).

Аналогично методом неопределенных коэффициентов может быть построена неявная разностная схема второго порядка аппроксимации для уравнения (19):

$$(21) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - v \left( -\frac{1-v}{2} u_{j-1}^{n+1} - v u_j^{n+1} + \frac{1+v}{2} u_{j+1}^{n+1} \right).$$

Для этой разностной схемы условие аппроксимации проверяется в точке  $(x_{\min} + jh, (n+1)\tau)$ .

Нужная нам разностная схема для уравнения (19) получается, если взять полусумму правых частей уравнений (20) и (21):

$$(22) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v}{2} \left( -\frac{1-v}{2} u_{j-1}^{n+1} - v u_j^{n+1} + \frac{1+v}{2} u_{j+1}^{n+1} \right) - \frac{v}{2} \left( -\frac{1+v}{2} u_{j-1}^n + v u_j^n + \frac{1-v}{2} u_{j+1}^n \right).$$

Разностная схема (22) является устойчивой (подробнее этот вопрос обсуждается ниже) и аппроксимирует уравнение (19) с точностью до членов порядка  $O(\tau^2 + h^2)$ .

У разностной схемы (22) есть два важных для нас преимущества перед разностной схемой (20) (разностная схема (21) в расчетах обычно не употребляется).

Во-первых, аппроксимация для разностной схемы (22) рассматривается в точке  $(x_{\min} + jh, (n+1/2)\tau)$ , т.е. в той же точке, что и аппроксимация для разностной схемы (18) для уравнения диффузии (17).

Во-вторых, при доказательстве аппроксимации для разностной схемы (22) не используется условие

$$(23) \quad U_{tt} = c^2 U_{xx},$$

вытекающее из уравнения (19). При доказательстве аппроксимации для разностных схем (20) и (21) условие (23) используется. Последнее обстоятельство особенно важно при построении разностных схем для уравнения конвекции-диффузии (16), поскольку соотношение (23), верное для решений уравнения (19), не выполняется для решений уравнения (16) при  $\mu > 0$ .

Проведенные расчеты нескольких краевых задач для уравнения (19) показали, что по своим свойствам разностная схема (22) близка разностной схеме (20). Однако точность результатов, полученных по разностной схеме (22), оказывается в 2–3 раза хуже, чем точность результатов, полученных по разностной схеме (20), что, по-видимому, объясняется более сложным видом остаточного члена, возникающего при разложении в ряды Тейлора.

Смешанная разностная схема (схема 3) для уравнения конвекции-диффузии получается, как видно из ее записи, путем объединения разностных схем (18) и (22).

Для исследования устойчивости схемы 3 может быть использован следующий широко распространенный прием. Предположим, что в момент  $nt$  численное решение имеет вид  $u_j^n = \exp(ijx)$ , где  $x$  – некоторое действительное число, и предположим, что при подстановке этих значений  $u_j^n$  в систему уравнений схемы 3 решение этой системы уравнений имеет вид  $u_j^{n+1} = \rho \exp(ijx)$ , где  $\rho$  – некоторое комплексное число. Проверка устойчивости разностной схемы заключается в проверке условия  $|\rho| \leq 1$  при любом действительном  $x$ .

Из уравнений схемы 3 получаем

$$\rho = \frac{\left[ 1 - \frac{v^2}{2}(1 - \cos x) \right] - \gamma(1 - \cos x) - i \frac{v}{2} \sin x}{\left[ 1 - \frac{v^2}{2}(1 - \cos x) \right] + \gamma(1 - \cos x) + i \frac{v}{2} \sin x}.$$

Из условия  $-1 \leq v \leq 1$  следует, что величина, стоящая в квадратных скобках, неотрицательна при любом  $x$ . Поэтому абсолютная величина действительной части числителя не больше абсолютной величины действительной части знаменателя. Отсюда следует, что  $|\rho| \leq 1$ .

Поскольку схема 3 является неявной, остается еще вопрос о способе решения системы линейных уравнений. Если записать эту систему уравнений в виде

$$au_{j-1}^{n+1} + bu_j^{n+1} + cu_{j+1}^{n+1} = f_j^n,$$

то для применимости метода прогонки достаточно выполнения условия  $|b| - |a+c| > 0$  (см. [27 с. 53]). Для схемы 3 находим

$$a = -\frac{v}{2} \frac{1-v}{2} - \frac{\gamma}{2}, \quad b = 1 - \frac{v^2}{2} + \gamma, \quad c = \frac{v}{2} \frac{1+v}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

и, как нетрудно видеть, требуемое условие выполняется, если  $\gamma > 0$  или  $v^2 < 1$ . Если  $\gamma = 0$  и  $v^2 = 1$ , то рассматриваемая система линейных уравнений превращается в систему с невырожденной двухдиагональной матрицей и может быть решена методом бегущего счета.

Отметим, что схемы 2 и 3 являются частными случаями следующей разностной схемы

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\gamma}{2}(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) - \\ - \frac{\nu}{2} \left( -\frac{1-\beta}{2}u_{j-1}^{n+1} - \beta u_j^{n+1} + \frac{1+\beta}{2}u_{j+1}^{n+1} \right) - \frac{\nu}{2} \left( -\frac{1+\beta}{2}u_{j-1}^n + \beta u_j^n + \frac{1-\beta}{2}u_{j+1}^n \right).$$

Схеме 2 отвечает случай  $\beta = 0$ , а схеме 3 – случай  $\beta = \nu$ .

#### 4. Расчеты цен и параметров дельта и гамма европейских опционов

Для европейского опциона колл с ценой исполнения  $X$  и с моментом истечения  $T$  «начальное» условие для уравнения (14) имеет вид

$$V(S, T) = \max(S - X, 0),$$

и краевые условия имеют вид

$$V(0, t) = 0, \quad V(S, t) \sim S - X \exp(-r(T-t)) \quad \text{при } S \rightarrow \infty.$$

Для европейского опциона пут с ценой исполнения  $X$  и с моментом истечения  $T$  «начальное» условие имеет вид

$$V(S, T) = \max(X - S, 0),$$

и краевые условия имеют вид

$$V(0, t) = X \exp(-r(T-t)), \quad V(S, t) \sim 0 \quad \text{при } S \rightarrow \infty.$$

Решения этих начально-краевых задач для уравнения (14) найдены в работах [2, 18]. Эти решения имеют следующий вид. Для европейского опциона колл

$$(24) \quad V(S, 0) = S N(d_1) - X \exp(-rT) N(d_2),$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^x n(y) dy, \quad n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

Для европейского опциона пут

$$V(S, 0) = X \exp(-rT) N(-d_2) - S N(-d_1).$$

При хеджировании необходимо знать дельту  $\Delta$  и гамму  $\Gamma$  финансового инструмента. Для европейского опциона колл

$$(25) \quad \Delta = V_S = N(d_1),$$

для европейского опциона пут

$$\Delta = V_S = N(d_1) - 1,$$

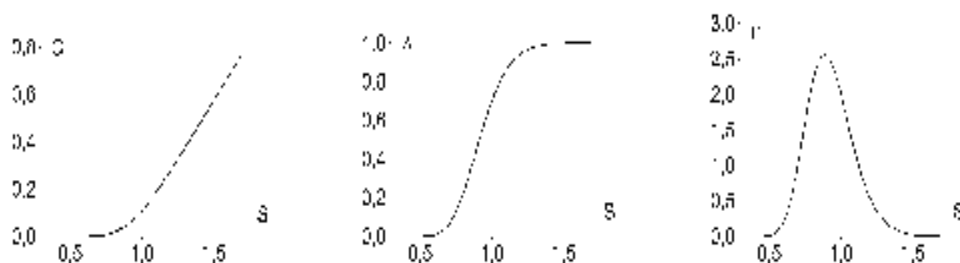
(см., например, [9]). Из этих формул видно, что гаммы для европейских опционов колл и пут должны совпадать

$$(26) \quad \Gamma = V_{SS} = \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}.$$

Поскольку аналитические решения данных начально-краевых задач известны, на этих задачах удобно проверять и сравнивать различные численные методы.

Основной вывод состоит в том, что решая начально-краевую задачу для уравнения (16) разностным методом, можно получить результат, который с любой нужной для практики точностью совпадает с аналитическим решением (24), (25), (26).

На рис. 1, 2 и в табл. 1, 2 приведены результаты расчетов для европейских опционов колл, подтверждающие данный вывод. На рис. 1 представлены результаты расчетов, отвечающие  $X=1$ ,  $r=0,1$ ,  $\sigma=0,2$ ,  $T=0,75$ . Уравнение (15) взято с параметром  $\alpha=1$ . Шаги по переменным  $x$  и  $t$  выбраны  $h=0,01$ ,  $\tau=0,01$ .



**Рис. 1.** Цена европейского опциона колл, дельта и гамма при  $X=1$ ,  $r=0,1$ ,  $\sigma=0,2$ ,  $T=0,75$ . Рассчитаны по смешанной разностной схеме второго порядка аппроксимации для уравнения (15) с  $\alpha=1$ ,  $h=0,01$ ,  $\tau=0,01$  (сплошная линия). Цена европейского опциона колл, дельта и гамма, рассчитанные по аналитическим формулам (24), (25), (26) (штриховая линия; на данных рисунках штриховая линия не видна, она совпадает со сплошной линией). Отклонение численного решения от аналитического показано в табл. 1.

Параметры, представленные в табл. 1, имеют следующий смысл.

$$e_{price} = \max_{j: x_{\min} \leq x_{\min} + jh \leq x_{\max}} |v_j^{T/\tau} - V(\exp(jh/\alpha), 0)|$$

– расстояние в равномерной метрике между численным решением  $v_j^{T/\tau} = e^{-rT} u_j^{T/\tau}$  и аналитическим решением (24) для момента времени, когда до истечения опциона остается  $T=0,75$ . Погрешности  $e_{delta}$  и  $e_{gamma}$  определяются аналогично.

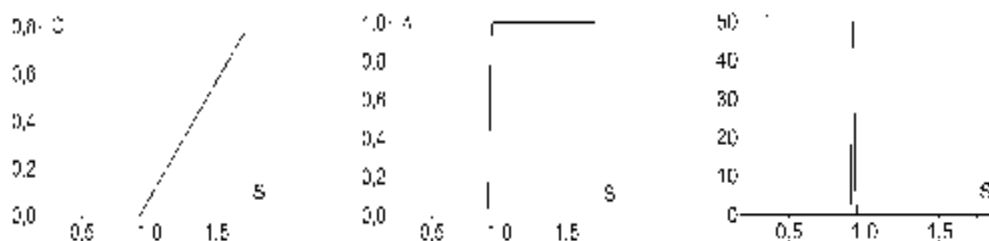
**Таблица 1.**

	$e_{price}$	$e_{delta}$	$e_{gamma}$
схема 1	0,0007638	0,0032190	0,0220903
схема 2	0,0000145	0,0002083	0,0014413
схема 3	0,0000144	0,0002079	0,0014240

Из табл. 1 видно, что схемы 2 и 3 по точности близки между собой и существенно превосходят схему 1. Схема 3 дает результаты хотя и лучшие, чем схема 2, но крайне незначительно.

Расчет, результаты которого представлены на рис. 2 и в табл. 2, отличается от предыдущего расчета тем, что взято значение  $\sigma = 0,01$ . Для практики значение  $\sigma = 0,01$  является неправдоподобно низким. Но при этом возникает решение с большими градиентами, справиться с которым разностной схеме труднее, поэтому при малом  $\sigma$  удобнее сравнивать между собой различные разностные схемы. Другая причина, почему интересно рассмотрение решений с малыми  $\sigma$ , состоит в том, что для численного решения некоторых уравнений удобно использовать прием, суть которого состоит в добавлении искусственной вязкости. Например, уравнения (11) и (12) содержат  $V_{SS}$ , но не содержат  $V_{\theta\theta}$ . Это существенно затрудняет процедуру численного решения этих уравнений. Поэтому иногда в уравнение добавляют искусственную вязкость  $\sigma_\theta V_{\theta\theta}$ , решают такое уравнение, потом уменьшают  $\sigma_\theta$ , снова решают уравнение и т.д. Если полученные численные решения сходятся, то их предел (или последнее найденное решение) объявляют решением, отвечающим  $\sigma_\theta = 0^4$ .

При расчете, результаты которого представлены на рис. 2 и в табл. 2, взяты шаги  $h = 0,0005$  и  $\tau = 0,0005$ , значительно меньшие, чем в предыдущем расчете. Уравнение (15) взято с параметром  $\alpha = 1$ . Опять, как и в предыдущем расчете, схемы 2 и 3 по точности близки между собой и существенно превосходят схему 1.



**Рис. 2.** Цена европейского опциона колл, дельта и гамма при  $X=1$ ,  $r=0,1$ ,  $\sigma=0,01$ ,  $T=0,75$ . Рассчитаны по смешанной разностной схеме второго порядка аппроксимации для уравнения (15) с  $\alpha=1$ ,  $h=0,0005$ ,  $\tau=0,0005$  (сплошная линия). Цена европейского опциона колл, дельта и гамма, рассчитанные по аналитическим формулам (24), (25), (25) (штриховая линия; на данных рисунках штриховая линия не видна, она совпадает со сплошной линией). Отклонение численного решения от аналитического показано в табл. 2.

Но за более высокую точность приходится платить одним неприятным свойством, которым обладает схема 2 и, в меньшей степени, схема 3, и которое проявляется, если использовать достаточно крупные шаги  $h$  и  $\tau$ . Схемы второго порядка аппроксимации могут давать паразитические осцилляции в численном решении. Схема 1, схема первого порядка аппроксимации, от этого недостатка свободна.

<sup>4)</sup> Для решения задач с искусственной вязкостью может быть полезно введение параметра  $\alpha$  в уравнение (15), это позволяет увеличить коэффициент диффузии в решаемом численно уравнении без его увеличения в исходном уравнении (14).

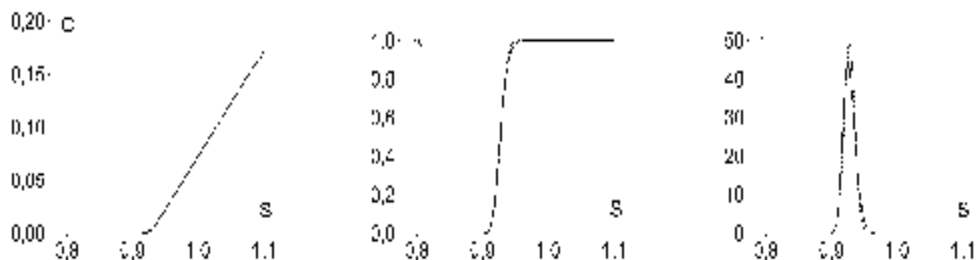
Таблица 2.

	$e_{price}$	$e_{delta}$	$e_{gamma}$
схема 1	0,0006621	0,0456897	8,4165981
схема 2	0,0000096	0,0019240	0,3384524
схема 3	0,0000094	0,0018955	0,3335013

Еще раз подчеркнем, что этот недостаток носит технический характер и интересен скорее специалистам по теории разностных схем. Он не ограничивает возможность применения конечно-разностных методов для оценки финансовых инструментов. Так, в расчете, результаты которого представлены на рис. 2, паразитических осцилляций в численном решении нет, поскольку этот расчет проведен с достаточно мелкими шагами  $h$  и  $\tau$ <sup>5)</sup>.

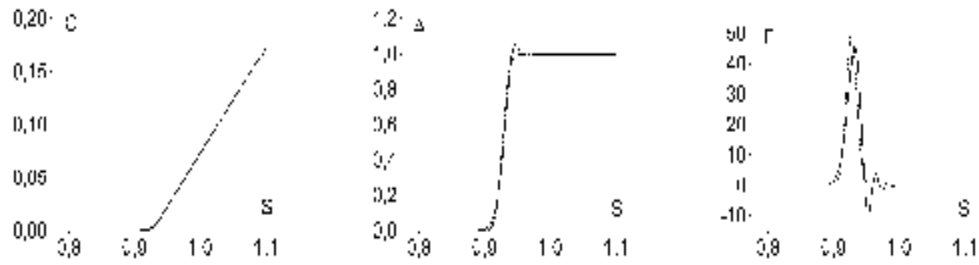
На рис. 3–8 представлены результаты расчетов для того же европейского опциона колл с  $X=1$ ,  $r=0,1$ ,  $\sigma=0,01$ ,  $T=0,75$  по различным разностным схемам и с различными шагами по времени.

В расчетах, результаты которых представлены на рис. 3 (схема 1), рис. 4 (схема 2) и рис. 5 (схема 3) выбраны шаги  $h=0,03$  и  $\tau=0,03$ . Уравнение (15) взято с параметром  $\alpha=9$ . На рис. 4 видны осцилляции в численном решении. На рис. 3 и 5 подобных осцилляций нет. Даже из графиков видно, что точность результатов, полученных по схеме 3 (рис. 5), значительно выше, чем точность результатов, полученных по схеме 1 (рис. 3).

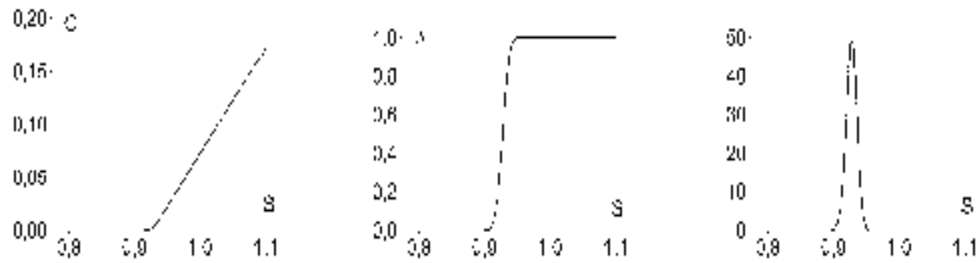


**Рис. 3.** Цена европейского опциона колл, дельта и гамма при  $X=1$ ,  $r=0,1$ ,  $\sigma=0,01$ ,  $T=0,75$ . Рассчитаны по противопоточной разностной схеме первого порядка аппроксимации для уравнения (15) с  $\alpha=9$ ,  $h=0,03$ ,  $\tau=0,03$  (сплошная линия). Цена европейского опциона колл, дельта и гамма, рассчитанные по аналитическим формулам (24), (25), (26) (штриховая линия).

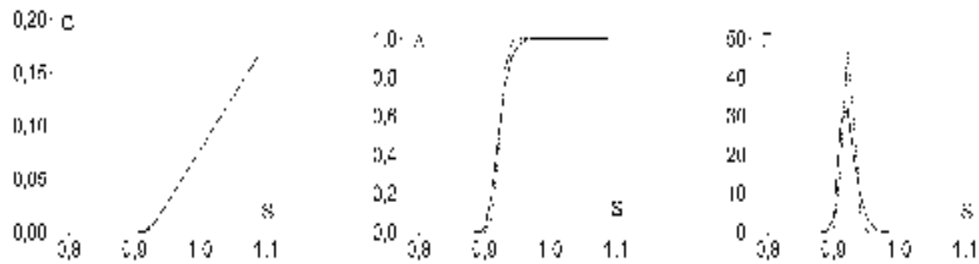
<sup>5)</sup> Расчеты, описываемые в данной работе, – это расчеты гладких решений. При расчетах разрывных решений, например в вычислительной газовой динамике, паразитические осцилляции, если они возникают, как правило, не исчезают, хотя и уменьшаются при уменьшении шагов  $h$  и  $\tau$ .



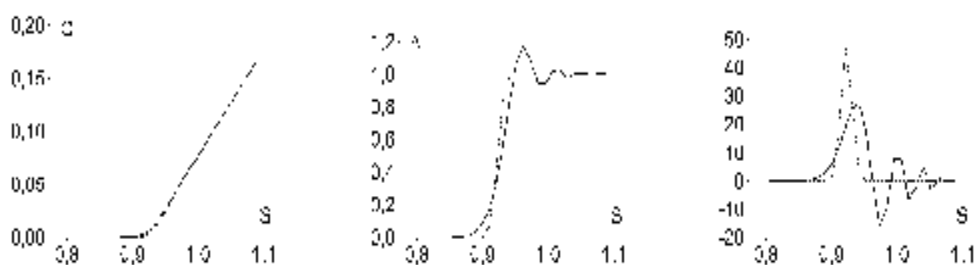
**Рис. 4.** Цена европейского опциона колл, дельта и гамма при  $X=1$ ,  $r=0,1$ ,  $\sigma = 0,01$ ,  $T=0,75$ . Рассчитаны по разностной схеме с центральными разностями второго порядка аппроксимации для уравнения (15) с  $\alpha=9$ ,  $h=0,03$ ,  $\tau=0,03$  (сплошная линия). Цена европейского опциона колл, дельта и гамма, рассчитанные по аналитическим формулам (24), (25), (26) (штриховая линия).



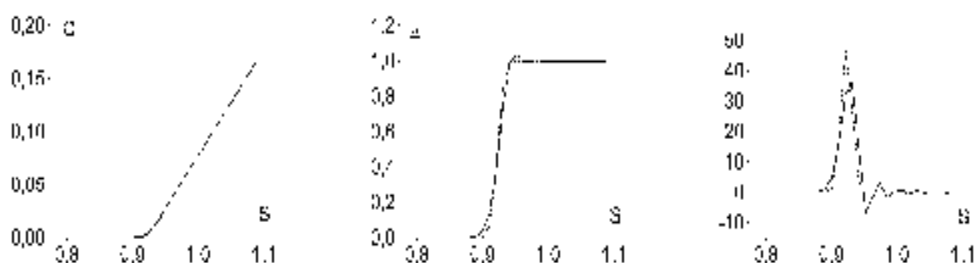
**Рис. 5.** Цена европейского опциона колл, дельта и гамма при  $X=1$ ,  $r=0,1$ ,  $\sigma=0,01$ ,  $T=0,75$ . Рассчитаны по смешанной разностной схеме второго порядка аппроксимации для уравнения (15) с  $\alpha=9$ ,  $h=0,03$ ,  $\tau=0,03$  (сплошная линия). Цена европейского опциона колл, дельта и гамма, рассчитанные по аналитическим формулам (24), (25), (26) (штриховая линия).



**Рис. 6.** Цена европейского опциона колл, дельта и гамма при  $X=1$ ,  $r=0,1$ ,  $\sigma=0,01$ ,  $T=0,75$ . Рассчитаны по противопоточной разностной схеме первого порядка аппроксимации для уравнения (15) с  $\alpha=9$ ,  $h=0,1$ ,  $\tau=0,1$  (сплошная линия). Цена европейского опциона колл, дельта и гамма, рассчитанные по аналитическим формулам (24), (25), (26) (штриховая линия).



**Рис. 7.** Цена европейского опциона колл, дельта и гамма при  $X=1$ ,  $r=0,1$ ,  $\sigma=0,01$ ,  $T=0,75$ . Рассчитаны по разностной схеме с центральными разностями второго порядка аппроксимации для уравнения (15) с  $\alpha=9$ ,  $h=0,1$ ,  $\tau=0,1$  (сплошная линия). Цена европейского опциона колл, дельта и гамма, рассчитанные по аналитическим формулам (24), (25), (26) (штриховая линия).



**Рис. 8.** Цена европейского опциона колл, дельта и гамма при  $X=1$ ,  $r=0,1$ ,  $\sigma=0,01$ ,  $T=0,75$ . Рассчитаны по смешанной разностной схеме второго порядка аппроксимации для уравнения (15) с  $\alpha=9$ ,  $h=0,1$ ,  $\tau=0,1$  (сплошная линия). Цена европейского опциона колл, дельта и гамма, рассчитанные по аналитическим формулам (24), (25), (26) (штриховая линия).

В расчетах, результаты которых представлены на рис. 6 (схема 1), рис. 7 (схема 2) и рис. 8 (схема 3) выбраны шаги  $h=0,1$  и  $\tau=0,1$ . Уравнение (15) взято с параметром  $\alpha=9$ . На рис. 7 и 8 видны осцилляции в численном решении. Отметим, что схема 3 (рис. 8) дает осцилляции значительно меньшие, чем схема 2 (рис. 7). Схема 1 (рис. 6) в данном случае никаких осцилляций не дает, но точность результатов, полученных по схеме 1, как видно из рисунка, невелика.

Осцилляции, изображенные на рис. 4, 7 и 8, хорошо знакомы специалистам по вычислительной газовой динамике. Подобные осцилляции являются серьезной проблемой при расчетах ударных волн. Для решения этой проблемы в вычислительной газовой динамике разработано очень большое число различных разностных схем, имеющих порядок аппроксимации более высокий, чем первый, и не дающих или почти не дающих паразитических осцилляций (см., например, [8, 22]; обзор можно найти в [17]). Некоторые из этих разностных схем, например схемы TVD в работе [25], успешно используются и в финансовых расчетах.

Но наиболее распространенной в финансовой литературе является все же разностная схема с центральными разностями второго порядка аппроксимации



(схема 2). Это связано с простотой ее записи и программирования. Разностные схемы из вычислительной газовой динамики, сохраняющие монотонность и имеющие повышенный порядок аппроксимации, строятся существенно более сложным образом. Кроме того, при реальных значениях  $\sigma$  и разумных размерах счетных шагов при использовании схемы 2 или схемы 3 осцилляции возникать не должны. В рассмотренных выше примерах смешанная разностная схема второго порядка аппроксимации (схема 3) обладает лучшими свойствами и по точности, и по сохранению формы решения, чем разностная схема с центральными разностями (схема 2), и практически не является более сложной по построению. Как и схема 2, схема 3 является линейной.

## 5. Расчеты цен конвертируемых облигаций

Рассмотрим облигацию, для простоты бескупонную (т.е.  $K = 0$ ), по которой в момент  $T$  выплачивается  $B$  рублей. Кроме того, в любой момент времени от 0 до  $T$  владелец облигации имеет право обменять ее на  $z$  акций некоторой компании. Будем считать, что цена облигации  $V$  является функцией только от  $S$  и  $t$ ,  $S$  и  $V$  изменяются по законам (1) и (2). Будем считать, как уже было сказано выше, что кредитный риск отсутствует, хотя в рамках данного подхода может быть учтена и возможность невыполнения своих обязательств эмитентом облигации. Еще одно предположение состоит в том, что конвертация облигаций в акции не влияет на характер изменения цены акции; такое предположение можно сделать, например, в случае, когда количество акций, на которые обмениваются облигации, невелико по сравнению с общим количеством акций данной компании.

Впервые метод, предложенный в работах [2, 18] для оценки опционов, был использован для оценки конвертируемых облигаций в работах [4, 13].

Повторяя рассуждения, приведенные в разделе 2, составим портфель из одной облигации и  $(-\delta)$  акций, где  $\delta = V_S$ . Изменение стоимости этого портфеля за промежуток времени  $\Delta t$  с точностью до членов более высокого порядка малости

$$\Delta \Pi = \Delta V - \delta \Delta S - \delta D(S, t) S \Delta t = \left( V_t + \frac{1}{2} V_{SS} \sigma^2 S^2 - V_S D(S, t) S \right) \Delta t.$$

Если  $V_t + \frac{1}{2} V_{SS} \sigma^2 S^2 - V_S D(S, t) S > r(t) \Pi = r(t)(V - \delta S)$ , то такой портфель представляет собой арбитражную стратегию (т.е. «денежную помпу»). Поскольку возможность займа по ставке  $r(t)$  предполагается неограниченной, взятие денег в займы и вложение их в данный портфель дает неограниченную прибыль. Поскольку в рассматриваемом нами идеальном мире арбитражных возможностей нет, мы приходим к выводу, что должно выполняться соотношение

$$(27) \quad V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + (r(t) - D(S, t)) S V_S - r(t) V \leq 0.$$

Для того, чтобы доказать невозможность строгого неравенства в (27), следует рассмотреть портфель, в который входит  $-1$  облигация и  $\delta$  акций; при выполнении строгого неравенства в (27) данный портфель является арбитражной стратегией. Но только, если состав портфеля сохраняется неизменным в течение промежутка времени  $\Delta t$ , а в данном случае выпущенная облигация может быть конвертирова-

на в акции ее владельцем, а не участником, составившим рассматриваемый портфель. Поэтому отбросить строгое неравенство и сделать вывод, что цена облигации является решением дифференциального уравнения, нельзя.

Для цены конвертируемой облигации должны выполняться следующие соотношения.

$$(28) \quad \begin{aligned} V &\geq z S, \\ V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + (r(t) - D(S, t)) S V_S - r(t) V &\leq 0, \\ \left( V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + (r(t) - D(S, t)) S V_S - r(t) V \right) (V - z S) &= 0. \end{aligned}$$

«Начальное» условие имеет вид  $V(S, T) = \max(z S, B)$ , и краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} V(0, t) &= B \exp\left(-\int_t^T r(u) du\right) = B \frac{P(0, T)}{P(0, t)}, \\ V(S, t) &\sim z S \text{ при } S \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Важным частным случаем рассматриваемой задачи является случай  $z = 0$ , т.е. оценка неконвертируемой облигации. (Условие на правой границе  $S_{\max}$  при этом следует взять совпадающим с условием на левой границе  $S_{\min} = 0$ .) В этом случае при любом  $S \geq 0$  должно выполняться соотношение

$$(29) \quad V(S, 0) = B P(0, T).$$

Если численный алгоритм даст какое-то другое значение  $V(S, 0)$ , это будет недостатком алгоритма. Выполнения соотношения (29) можно добиться за счет выбора  $r(t)$  (см. [1]).

Как и в предыдущем разделе, изменим обозначение и через  $t$  обозначим время, остающееся до момента погашения облигации, т.е.  $t_{\text{нов}} = T - t_{\text{стар}}$ .

Отметим, что при  $z = 0$  вместо неравенства (27) можно рассматривать уравнение, которое (с учетом изменения направления отсчета времени) имеет вид

$$(30) \quad V_t - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} - (r(t) - D(S, t)) S V_S + r(t) V = 0.$$

В качестве начального условия возьмем  $v_j^0 = B$  при всех  $j$  и введем обозначение  $r_n = r(n\tau)$ . Нашей целью является подбор величины  $r_n$  так, чтобы при всех  $j$  выполнялись соотношения

$$(31) \quad v_j^{n+1} = \frac{P(0, (n+1)\tau)}{P(0, n\tau)} v_j^n.$$

Тогда, в частности, будет иметь место

$$v_j^{T/\tau} = B P(0, T),$$

чего мы и добиваемся. Когда решение не зависит от  $S$ , разностная схема для уравнения (30) имеет вид

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} = -r_n (\mathcal{G} v_j^{n+1} + (1 - \mathcal{G}) v_j^n),$$

где  $0 \leq \mathcal{G} \leq 1$ . Нетрудно увидеть, что независимо от выбора  $\mathcal{G}$  условие (31) выполняется при

$$r_n = -\frac{1}{P(0, n\tau)} \frac{P(0, (n+1)\tau) - P(0, n\tau)}{\tau}.$$

Это, естественно, соответствует формуле (13).

С учетом изменения направления отсчета времени соотношения (28) принимают вид

$$\begin{aligned} V &\geq zS, \\ V_t - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - (r(t) - D(S, t))SV_S + r(t)V &\geq 0, \\ \left( V_t - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - (r(t) - D(S, t))SV_S + r(t)V \right) (V - zS) &= 0; \end{aligned}$$

$V(S, 0) = \max(zS, B)$ . Сделав замену переменной  $x = \alpha \ln S$ , приводим эти соотношения к виду

$$\begin{aligned} V &\geq z \exp(x / \alpha), \\ (32) \quad V_t - \frac{1}{2}\alpha^2 \sigma^2 V_{xx} - \alpha(r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 - D(\exp(x/\alpha), t))V_x + r(t)V &\geq 0, \\ \left( V_t - \frac{1}{2}\alpha^2 \sigma^2 V_{xx} - \alpha(r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 - D(\exp(x/\alpha), t))V_x + r(t)V \right) (V - z \exp(x/\alpha)) &= 0; \end{aligned}$$

$V(x, 0) = \max(z \exp(x / \alpha), B)$ .

При численном решении задачи (32) шагами по времени один временной шаг состоит в следующем. Найти  $N$ -мерный вектор  $v$  такой, что

$$(33) \quad Av \geq b, \quad v \geq c, \quad (Av - b)(v - c) = 0,$$

где  $b$  и  $c$  — известные  $N$ -мерные вектора,  $A$  — известная матрица размера  $N \times N$ . Запись  $a \geq b$  означает, что каждая компонента вектора  $a$  не меньше соответствующей компоненты вектора  $b$ .

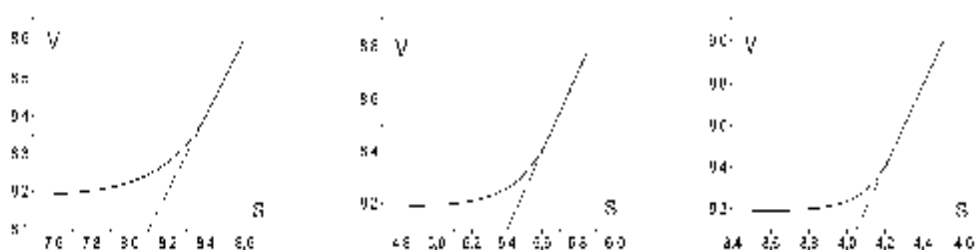
Для решения задачи (33) разработаны различные итерационные процедуры, описанию которых уделено большое внимание в книгах [21, 24].

Но существует один упрощающий прием, который позволяет избежать использования итерационных процедур. Вместо задачи (33) решать систему линейных уравнений  $Av = b$ , а если при некоторых  $j$  окажется, что  $v_j < c_j$ , то при этих  $j$  положить  $v_j = c_j$ . В книге [21, с. 143] отмечено, что при использовании данного упрощающего приема может быть построен только численный метод первого порядка аппроксимации; для построения методов второго порядка аппроксимации необходимо решать задачу (33) итерациями<sup>6)</sup>.

<sup>6)</sup> Этот же упрощающий прием используется при оценке американских опционов пут. См., например, [3; 12, с. 371].

В данной работе мы ограничимся для оценки конвертируемых облигаций использованием методов первого порядка аппроксимации. При расчетах, результаты которых приведены ниже, нами использованы противопоточная разностная схема первого порядка аппроксимации (схема 1 из раздела 3) и указанный прием.

На рис. 9 представлены рассчитанные цены конвертируемых бескупонных облигаций. Во всех расчетах приняты значения  $B = 10$ ,  $P(0,t) = \exp(-rt)$ ,  $r = 0,1$ ,  $D = 0,06$ ,  $\sigma = 0,2$ ,  $T = 2$ . Дивидендная доходность  $D$  считается не зависящей ни от  $S$ , ни от  $t$ . Расчеты отличаются друг от друга параметром  $z$  – количеством акций, которые можно получить в обмен на 1 облигацию. В первом расчете  $z = 1$ , во втором расчете  $z = 1,5$ , в третьем расчете  $z = 2$ . Расчеты проведены с достаточно мелкими шагами  $h = 0,001$ ,  $\tau = 0,001$ ; в задаче (32) взято значение  $\alpha = 1$ .



**Рис. 9.** Цена конвертируемой бескупонной облигации при  $B=10$ ,  $P(0,t) = \exp(-rt)$ ,  $r=0,1$ ,  $D=0,06$ ,  $\sigma=0,2$ ,  $T=2$ . Рассчитана по противопоточной разностной схеме первого порядка аппроксимации для задачи (32) с  $\alpha=1$ ;  $h=0,001$ ,  $\tau=0,001$  (сплошная линия). Прямая  $V=zS$  (штриховая линия). Для первого графика  $z=1$ , для второго графика  $z=1,5$ , для третьего графика  $z=2$ .

Во всех 3-х расчетах при  $S$  большем некоторого  $S_f$  цена конвертируемой облигации совпадает с  $zS$ . Это означает, что при  $S > S_f$  следует обменять облигацию на акции. Например, при  $z=1$  в расчете получено значение  $S_f=8,40$ .

## 6. Уравнение с частными производными для цены финансового инструмента при учете стохастического характера изменения показателя $\theta$

Как и в разделе 2, будем считать, что цена акции  $S$  и цена финансового инструмента  $V$  изменяются по законам (1) и (2), соответственно, а вот характер изменения показателя  $\theta$  примем иным. Вместо (3) будем считать, что

$$\Delta\theta = \varphi \Delta t + \psi \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t} + o(\Delta t),$$

где  $\varepsilon_1$  – стандартная нормальная случайная величина  $N(0, 1)$ ;  $\psi$  является известной (неслучайной) функцией от  $S$  и  $t$ .

Дальнейший анализ идет по тому же пути, что и в разделе 2, но уравнения (4), (5), (6), (9) заменяются на немного более сложные уравнения.

Вместо уравнения (4) имеем

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(S + \Delta S, \theta + \Delta \theta, t + \Delta t) - V(S, \theta, t) = \\ &= V_S \Delta S + V_\theta \Delta \theta + V_t \Delta t + \frac{1}{2} V_{SS} \Delta S^2 + V_{S\theta} \Delta S \Delta \theta + \frac{1}{2} V_{\theta\theta} \Delta \theta^2 + o(\Delta t).\end{aligned}$$

Вместо уравнения (5) имеем

$$\begin{aligned}\mu' \Delta V &= E(\Delta V) + o(\Delta t) = V_S E(\Delta S) + V_\theta E(\Delta \theta) + V_t \Delta t + \\ &+ \frac{1}{2} V_{SS} E(\Delta S^2) + V_{S\theta} E(\Delta S \Delta \theta) + \frac{1}{2} V_{\theta\theta} E(\Delta \theta^2) + o(\Delta t).\end{aligned}$$

Обозначим через  $\rho$  корреляцию случайных величин  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_1$ . Будем также использовать обозначение

$$A(U) = \frac{1}{2} U_{SS} \sigma^2 S^2 + U_{S\theta} \rho \sigma S \psi + \frac{1}{2} U_{\theta\theta} \psi^2.$$

Тогда

$$\mu' \Delta V = (V_S \mu S + V_\theta \varphi + V_t + A(V)) \Delta t + o(\Delta t),$$

и, устремляя  $\Delta t$  к нулю, получаем

$$\mu' V = V_S \mu S + V_\theta \varphi + V_t + A(V).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}V \sigma' \varepsilon' \sqrt{\Delta t} &= \Delta V - \mu' V \Delta t + o(\Delta t) = V_S (\Delta S - E(\Delta S)) + V_\theta (\Delta \theta - E(\Delta \theta)) + \\ &+ \frac{1}{2} V_{SS} (\Delta S^2 - E(\Delta S^2)) + V_{S\theta} (\Delta S \Delta \theta - E(\Delta S \Delta \theta)) + \frac{1}{2} V_{\theta\theta} (\Delta \theta^2 - E(\Delta \theta^2)) + o(\Delta t).\end{aligned}$$

В дополнение к соотношениям (7) и (8) заметим, что

$$\Delta \theta - E(\Delta \theta) = \psi \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t} + o(\Delta t), \quad \Delta S \Delta \theta - E(\Delta S \Delta \theta) = O(\Delta t), \quad \Delta \theta^2 - E(\Delta \theta^2) = O(\Delta t).$$

Тогда, устремляя  $\Delta t$  к нулю, получаем

$$V \sigma' \varepsilon' = V_S \sigma S \varepsilon + V_\theta \psi \varepsilon_1.$$

Вместо уравнения (9) имеем

$$(34) \quad \Delta V = (V_S \mu S + V_\theta \varphi + V_t + A(V)) \Delta t + (V_S \sigma S \varepsilon + V_\theta \psi \varepsilon_1) \sqrt{\Delta t} + o(\Delta t).$$

Данный результат является дискретным аналогом двумерной формулы Ито.

В некоторый момент времени  $t$  составим портфель, в который входят один рассматриваемый финансовый инструмент, цена которого равна  $V(S, \theta, t)$ ,  $(-\delta_1)$  единиц некоторого другого финансового инструмента, цена которого равна  $W(S, \theta, t)$ , и  $(-\delta)$  акций. Числа  $\delta_1$  и  $\delta$  пока являются неопределенными. Стоимость этого портфеля

$$(35) \quad \Pi = V - \delta_1 W - \delta S.$$

Если в течение промежутка времени  $\Delta t$  величины  $(-\delta_1)$  и  $(-\delta)$  остаются неизменными, то за этот промежуток времени стоимость данного портфеля изменится на величину

$$\Delta\Pi = \Delta V - \delta_1 \Delta W - \delta \Delta S - \delta_1 L(S, \theta, t) \Delta t - \delta D(S, \theta, t) S \Delta t + K(S, \theta, t) \Delta t.$$

Здесь  $L(S, \theta, t) \Delta t$  – выплаты в течение промежутка времени  $\Delta t$ , связанные с финансовым инструментом с ценой  $W(S, \theta, t)$ .

Выберем

$$(36) \quad \delta_1 = \frac{V_\theta}{W_\theta}, \quad \delta = V_S - \frac{V_\theta}{W_\theta} W_S$$

и воспользуемся формулой (1) для  $\Delta S$  и формулой (34) – для  $\Delta V$  и  $\Delta W$ .

Проведя несложные преобразования, получаем

$$\Delta\Pi = (V_t + A(V) + K - D S V_S - \delta_1 (W_t + A(W) + L - D S W_S)) \Delta t + o(\Delta t).$$

Невозможность арбитража приводит к соотношению

$$\Delta\Pi = r(t) \Pi \Delta t,$$

и, воспользовавшись формулой (35), получаем

$$(37) \quad V_t + A(V) + (r - D) S V_S - rV + K - \delta_1 (W_t + A(W) + (r - D) S W_S - rW + L) = 0.$$

Предположим теперь, что цена финансового инструмента  $W = W(\theta, t)$ . Тогда из (34) следует, что

$$(38) \quad \frac{\Delta W}{W} = \frac{W_\theta \varphi + W_t + \frac{1}{2} W_{\theta\theta} \psi^2}{W} \Delta t + \frac{W_\theta \psi \varepsilon_1}{W} \sqrt{\Delta t} + o(\Delta t).$$

Предположим также, что  $L = 0$ . (Если в качестве  $\theta$  взята краткосрочная ставка  $r$ , то в качестве финансового инструмента с ценой  $W(\theta, t)$  может быть взята бескупонная неконвертируемая облигация.) Из (38) следует, что рыночная цена риска для показателя  $\theta$  равна

$$\lambda(\theta, t) = \frac{W_\theta \varphi + W_t + \frac{1}{2} W_{\theta\theta} \psi^2 - r(t) W}{W_\theta \psi}$$

(определение рыночной цены риска см., например, в [31]).

Из уравнения (37), используя выражение (36) для  $\delta_1$ , получаем окончательное уравнение для цены финансового инструмента

$$V_t + A(V) + (r - D) S V_S + (\varphi - \lambda \psi) W_\theta - rV + K = 0.$$

В работе [5] с использованием последнего уравнения проведено исследование, насколько учет стохастического характера изменения процентных ставок влияет на рассчитываемую безарбитражную цену конвертируемой облигации.

\*            \*  
\*  
\*  
\*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andersen L.B.G., Brotherton-Ratcliffe R.* The Equity Option Volatility Smile: An Implicit Finite-Difference Approach // *Journal of Computational Finance*. 1997/1998. 1, № 2. P. 5–38.
2. *Black F., Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // *Journal of Political Economy*. 1973. 81. P. 637–654.
3. *Brennan M., Schwartz E.* The Valuation of American Put Options // *Journal of Finance*. 1977. 32. P. 449–462.
4. *Brennan M., Schwartz E.* Convertible Bonds: Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion // *Journal of Finance*. 1977. 32. P. 1699–1715.
5. *Brennan M., Schwartz E.* Analyzing Convertible Bonds // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 1980. 15. P. 907–929.
6. *Briys E., Bellalah M., Mai H.M., de Varenne F.* Options, Futures and Exotic Derivatives. Chichester, Wiley, 1998.
7. *Crank J., Nicolson P.* A Practical Method for Numerical Integration of Solutions of Partial Differential Equations of Heat Conduction Type // *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1947. 43, part 1. P. 50–67.
8. *Harten A.* High Resolution Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws // *Journal of Computational Physics*. 1983. 49. P. 357–393.
9. *Haug E.G.* The Complete Guide to Option Pricing Formulas. N.Y.: McGraw-Hill, 1998.
10. *Hull J.C., White A.* The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities // *Journal of Finance*. 1987. 42. P. 281–300.
11. *Hull J.C., White A.* Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 1990. 25. P. 87–100.
12. *Hull J.C.* Options, Futures and Other Derivatives. 3d edition. Englewood Cliffs (N.J.): Prentice Hall, 1997.
13. *Ingersoll J.E.* A Contingent Claims Valuation of Convertible Securities // *Journal of Financial Economics*. 1977. 4. P. 289–322.
14. *Ingersoll J.E.* Theory of Financial Decision Making. Totowa (N.J.): Rowman and Littlefield, 1989.
15. *Johnson H., Shanno D.* Option Pricing when the Variance is Changing // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 1987. 22. P. 143–151.
16. *Lax P.D., Wendroff B.* Systems of Conservation Laws // *Comm. Pure and Appl. Math.* 1960. 13. P. 217–237.
17. *LeVeque R.* Numerical Methods for Conservation Laws. Basel: Birkhauser, 1990.
18. *Merton R.* The Theory of Rational Option Pricing // *Bell Journal of Economics and Management Science*. 1973. 4. P. 141–183.
19. *Rebonato R.* Interest-Rate Option Models. Chichester: Wiley, 1998.
20. *Rood R.* Numerical Advection Algorithms and Their Role in Atmospheric Transport and Chemical Models // *Rev. Geophys.* 1987. 25. P. 71–100.
21. *Tavella D., Randall C.* Pricing Financial Derivatives: The Finite Difference Method. N.Y.: Wiley, 2000.
22. *Van Leer B.* Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. II. Monotonicity and Conservation Combined in a Second-Order Scheme // *Journal of Computational Physics*. 1974. 14. P. 361–370.

23. *Wiggins J.B.* Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates // *Journal of Financial Economics*. 1987. 19, P. 351–372.
24. *Wilmott P., Dewynne J., Howison S.* Option Pricing: Mathematical Models and Computation. Oxford: Oxford Financial Press, 1993.
25. *Zvan R., Forsyth P.A., Vetzal K.R.* Robust Numerical Methods for PDE Models of Asian Options // *Journal of Computational Finance*. 1997/1998. 1. № 2. P. 39–78.
26. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений гидромеханики // *Матем. сборник*. 1959. 47. Вып. 3. С. 271–306.
27. *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
28. *Шведов А.С.* Разностная схема второго порядка аппроксимации для одномерного уравнения конвекции-диффузии / Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. № 59. 1996.
29. *Шведов А.С.* О математических методах, используемых при работе с опционами // *Экономический журнал Высшей школы экономики*. 1998. 2. С. 385–409.
30. *Шведов А.С.* Теория эффективных портфелей ценных бумаг. М.: ГУ–ВШЭ, 1999.
31. *Шведов А.С.* Процентные финансовые инструменты: оценка и хеджирование. М.: ГУ–ВШЭ, 2001.
32. *Шведов А.С.* Применение метода конечных разностей для оценки финансовых инструментов / Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. № 59. 2001.