ЛЕКЦИОННЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Анализ временных рядов[1)]

Канторович Г.Г.

Заканчивается публикация курса «Анализ временных рядов». В этом номере рассматривается построение экономических моделей с нестационарными регрессорами, понятие коинтеграции и ее связь с VAR-представлением многомерного процесса, тестирование наличия коинтеграционной зависимости, оценивание параметров модели при наличии коинтеграции. Отдельно рассматриваются модели с кластеризованной волатильностью, нашедшие широкое применение при анализе финансовых временных рядов.

Лекция 14

Коинтеграция

Рассмотренные до сих пор методы оценки ADL-уравнений, связывающих несколько экономических переменных, применимы только для стационарных рядов. Более точно, переменные могут быть и нестационарными, но типа TSP, тогда в качестве дополнительного регрессора в правую часть модели добавляется дополнительная объясняющая переменная – линейный тренд, и основным способом оценивания остается метод наименьших квадратов (МНК). Если же переменные являются нестационарными типа DSP (содержат единичный корень), то, как мы уже видели, возникает опасность кажущихся (spurious) регрессий. Рекомендуемый до сих пор прием состоял в устранении тренда взятием последовательных разностей и дальнейшим построением ADL-модели между преобразованными таким образом переменными.

С содержательной точки зрения полученные модели описывают только краткосрочную взаимосвязь между экономическими переменными. Устранив тренд, мы, по сути, отказываемся анализировать долгосрочное поведение переменной и отрицаем возможность существования долгосрочного равновесия для нестационарных переменных типа DSP. А результаты Нельсона и Плоссера показывает, что большинство макроэкономических переменных относятся именно к типу DSP [15]. Фактически это означало бы отсутствие долгосрочных зависимостей в макроэко-

1) Подготовлено при содействии Национального фонда подготовки кадров (НФПК) в рамках программы «Совершенствование преподавания социально-экономических дисциплин в вузах».

Канторович Г.Г. – профессор, к. физ.-мат. н., проректор ГУ–ВШЭ, зав. кафедрой математической экономики и эконометрики.

номике. Одной из попыток преодоления этого противоречия было расширение Перроном класса TSP-моделей за счет допущения кусочно-линейного тренда, с чем мы уже познакомились. Кардинальным решением проблемы является введенное Грэнжером и Энглом [6, 4] понятие коинтеграции.

По этимологии этот термин означает совместную интеграцию, и до сих пор сосуществуют практики его написания с дефисом и слитно. Начнем с нескольких формальных определений. Напомним, что мы называем процесс x_t интегрированным порядка d и обозначаем это следующим образом: $x_t \sim I(d)$, если ряд его конечных разностей порядка d является стационарным. В этих терминах стационарный случайный процесс является процессом нулевого порядка интеграции, а случайное блуждание (с дрейфом или без) − порядка интеграции 1.

Рассмотрим для начала два временных ряда первого порядка интеграции: $x_t \sim I(1)$, $y_t \sim I(1)$, т.е. оба они имеют единичный корень, являются нестационарными рядами типа DSP. Их линейная комбинация, т.е. сумма с некоторыми коэффициентами, $Z_t = \alpha x_t + \beta y_t \sim I(1)$, вообще говоря, тоже является рядом порядка интеграции 1. Однако может оказаться, что существуют такие коэффициенты (α, β), что линейная комбинация с этими коэффициентами окажется процессом нулевого порядка интеграции, стационарным случайным процессом. И если такая линейная комбинация существует, то ряды x_t и y_t называются *коинтегрированными,* а вектор с компонентами (α, β) называется *коинтегрирующим вектором.* Это определение легко обобщить на общий случай двух рядов порядка интеграции выше первой.

Пусть процессы $x_t \sim I(d)$, $y_t \sim I(d)$ имеют одинаковый порядок интеграции d. Тогда если существует вектор (α, β), такой что $\alpha x_t + \beta y_t \sim I(d-b)$, где $b > 0$, то процессы x_t и y_t называются коинтегрированными. И это записывается так: $x_t, y_t \sim CI(d, b)$. Принято обозначать через d исходный порядок интеграции, а через b − на сколько порядок понижается. Исходя из таких обозначений, в предыдущем случае мы можем записать $x_t, y_t \sim CI(1,1)$. В этом наиболее распространенном случае часто опускают параметры в скобках, т.е. пишут просто $x_t, y_t \sim CI$.

Определение легко можно обобщить на многомерный случай. Пусть многомерный случайный процесс $\vec{w}_t$ имеет порядок интеграции d: $\vec{w}_t \sim I(d)$, т.е. все компоненты вектора являются процессами одного и того же порядка интеграции d, и существует некоторая линейная комбинация компонент вектора, которая имеет порядок интегрирования $d-b$ ($b>0$). Тогда компоненты процесса $\vec{w}_t$ называются коинтегрированными: $(\vec{\alpha}^T \vec{w}_t) \sim I(d-b)$, а вектор $\vec{\alpha}$ называется коинтегрирующим вектором. Правда, как мы увидим в дальнейшем, в многомерном случае может существовать несколько линейно независимых коинтегрирующих векторов.

Вернемся к случаю двух процессов первого порядка интеграции. На первый взгляд непонятно, каким образом суммирование случайных процессов может понизить порядок интеграции. Однако идея получения коинтеграции весьма проста. Ситуация несколько напоминает следующую. Представьте себе, что у вас есть две случайных величины. Вообще говоря, их линейная комбинация также есть случайная величина. Однако бывают такие случайные величины, что их некоторая линейная комбинация может оказаться детерминированной величиной. Например, определим случайную величину Y как сумму случайной величины Z и детерминированной величины. Тогда линейная комбинация случайных величин Y и Z с коэффициентами 1 и -1 соответственно, очевидно, является детерминированной величиной. Аналогичная ситуация может быть со случайными процессами. Может существовать их линейная комбинация, которая является стационарной.

Прежде чем анализировать формальные последствия определения коинтеграции и различные примеры, давайте рассмотрим, что означает существование коинтегрирующих процессов содержательно. Если $x_t, y_t \sim CI(1,1)$, то каждый из процессов является процессом типа случайного блуждания, который имеет стохастический тренд. А коинтеграция означает, что стохастические тренды этих процессов движутся в унисон друг с другом, поэтому еще говорят, что они имеют общий стохастический тренд. Если попробовать изобразить это свойство графически, то мы получим следующую символическую картинку:

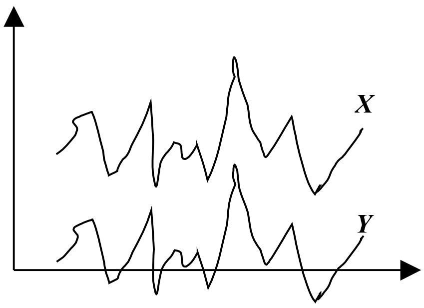

Рис. 1.

График демонстрирует, что существует некоторое соотношение между двумя экономическими величинами (линейная комбинация $\alpha x_t + \beta y_t$), которое является стационарным процессом. Соотношение можно переписать в виде $y_t = \gamma x_t + u_t$, где u_t – стационарный процесс. Если взять математическое ожидание от обеих частей, то оказывается, что зависящие от времени математические ожидания нестационарных процессов x_t и y_t связаны детерминированным соотношением: между ними существует долгосрочная связь. Вот в чем существенная разница. Коинтеграция совместима с понятием долгосрочного равновесия. Хотя каждый из нестационарных процессов «блуждает» случайным образом, наличие коинтеграции «заставляет» их «блуждать» вместе, не уходя далеко друг от друга. Поскольку термин «случайное блуждание» происходит из шуточной задачи описания траектории движения пьяного в чистом поле, можно проиллюстрировать коинтеграцию как движение в чистом поле двух пьяных, связанных эластичным жгутом. Каждый движется сам по себе, но далеко разойтись они не могут.

Если же любая линейная комбинация двух процессов является нестационарной (процессы не коинтегрированы), то окрестность любого соотношения между переменными наблюдается с нулевой вероятностью. Мы отмечали, что одним из свойств нестационарного процесса является бесконечно возрастающая дисперсия, что влечет за собой возвращение к исходной точке с вероятностью нуль и уход от нее сколь угодно далеко. И поэтому говорить о равновесном соотношении бессмысленно с содержательной и статистической точек зрения. Если же существует стационарное соотношение, то экономически это означает, что оно наблюдается очень часто, и его можно рассматривать, как долгосрочное равновесие. А если нет коинтегрирующего соотношения, то просто бессмысленно называть равновесием то значение, к которому процесс практически никогда не вернется.

Следовательно, коинтегрирующее соотношение соответствует тому, что между рассматриваемыми величинами существует долгосрочное равновесие. И тогда общая динамика поведения показателей может быть разложена на две составляющие: долгосрочное поведение и краткосрочное поведение. Причем долгосрочное поведение описывается коинтегрирующим соотношением. Посмотрим, как описывается краткосрочное поведение. Пусть коинтегрирующее соотношение представляется в нормированном виде следующим образом: $y_t = \gamma x_t + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t \sim WN$ − белый шум. Поскольку $x_t, y_t \sim I(1)$ являются процессами $I(1)$, то процессы их разностей Δx_t и Δy_t являются процессами типа $I(0)$, т.е. стационарными. Содержательно Δx_t и Δy_t описывают собой краткосрочные изменения исходных переменных. Поэтому уже знакомая нам модель коррекции ошибками (ECM) $\Delta y_t = \alpha \cdot \Delta x_t + \beta(y_{t-1} - \gamma x_{t-1}) + \nu_t$ связывает между собой стационарную величину Δy_t, стационарную Δx_t и стационарное коинтегрирующее соотношение. Поскольку выражение в скобках является стационарным, экономическая интерпретация модели коррекции ошибками сохраняется такой же, как если бы переменные y_t и x_t были стационарными. Краткосрочное изменение переменной y_t зависит от краткосрочного изменения переменной x_t и от отклонения от долгосрочного равновесия в предыдущий момент времени. То есть вводится коррекция в зависимости от того, на сколько переменные отклонились от своего долгосрочного равновесия. Напомним, что экономически такой подход оказался очень плодотворным. Выяснилось, что можно в одном уравнении совместить вместе краткосрочное и долгосрочное поведение. Отметим, что ECM имеет один и тот же вид как для стационарных, так и для нестационарных, но коинтегрированных переменных.

Теперь убедимся, что коинтегрированные процессы существуют. Рассмотрим, следуя Энглу и Грэнжеру [4, p. 263], следующий пример. Пусть случайные процессы X_t и Y_t определены следующим образом. $X_t + \beta Y_t = u_t$, $X_t + \alpha Y_t = \nu_t$. Пусть также $u_t = u_{t-1} + \varepsilon_{1t}$ и $\nu_t = \rho \nu_{t-1} + \varepsilon_{2t}$, где ε_{1t} *и* ε_{2t} − некоррелированные белые шумы. При условии, что $|\rho| < 1$, ν_t является стационарным процессом, а u_t − случайным блужданием без дрейфа. Другими словами: $u_t \sim I(1)$, $\nu_t \sim I(0)$. Совместное распределение X_t и Y_t полностью определяется приведенными уравнениями. Отметим, что имеет смысл рассматривать модель только при $\alpha \neq \beta$, так как иначе система противоречива.

Определим порядок интеграции процессов X_t и Y_t. Для этого перейдем от структурной к приведенной форме модели, т.е. разрешим систему относительно X_t и Y_t. Получаем:

$$X_t = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}u_t - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\nu_t \sim I(1)$$

$$Y_t = -\frac{1}{\alpha-\beta}u_t + \frac{1}{\alpha-\beta}\nu_t \sim I(1) \cdot$$

Очевидно, что каждый из процессов X_t и Y_t является процессом первого порядка интеграции. В то же время, очевидно, что существует их линейная комбинация $X_t + \alpha Y_t$, равная стационарному процессу, поэтому они являются коинтегрированными в смысле ранее данного определения. Поэтому $X_t, Y_t \sim CI(1,1)$.

Приведенный простой пример подсказывает, что свойство коинтеграции связано с представлением многомерного случайного процесса в виде линейной модели. Особенно удобным оказалось использование VAR-модели. Наличие или отсутствие коинтеграции можно установить по значениям характеристических корней VAR-модели.

Начнем с простейшего случая модели VAR(1) для двумерного процесса. Сохраняя обозначения предыдущей главы, рассмотрим модель

$$\begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}}_{A_1} \begin{pmatrix} X_{t-1}^1 \\ X_{t-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t^1 \\ \varepsilon_t^2 \end{pmatrix}.$$

В предыдущей главе мы уже использовали приведение системы к простейшей форме, применяя диагональный вид матрицы A_1 для случая, когда собственные числа этой матрицы различны. Оказывается, это представление позволяет исчерпывающе исследовать свойство коинтеграции.

Без потери общности перейдем к центрированным переменным. Пусть собственные числа матрицы A_1 различны: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Как и в предыдущей лекции, определим вектор новых переменных соотношением $\vec{y}_t = C^{-1}\vec{x}_t$, где C − матрица, столбцы которой являются собственными векторами, соответствующими собственным числам λ_1 и λ_2 соответственно.

В новых переменных система уравнений распадается на два отдельных уравнения:

$$y_t^1 = \lambda_1 y_{t-1}^1 + \eta_t^1$$

$$y_t^2 = \lambda_2 y_{t-1}^2 + \eta_t^2,$$

где через $\vec{\eta}_t$ обозначен преобразованный векторный белый шум.

Как мы уже установили ранее, если хотя бы одно из собственных чисел превышает по модулю единицу, то хотя бы одна из компонент вектора $\vec{y}_t$ не приводится к стационарному процессу взятием последовательных разностей. Но тогда этим свойством обладают и компоненты процесса $\vec{x}_t$, так как его компоненты являются линейными комбинациями компонент вектора $\vec{y}_t$ (напомним, что $\vec{x}_t = C\vec{y}_t$). Поэтому в дальнейшем мы не будем рассматривать случай «взрывной» нестационарности. Если же оба корня по модулю меньше единицы, то компоненты процесса $\vec{x}_t$ являются стационарными, и вопрос о коинтеграции не возникает.

Пусть теперь $\lambda_1 = 1$ и $|\lambda_2| < 1$. Тогда $y_t^1 \sim I(1)$, $y_t^2 \sim I(0)$, и обе компоненты вектора $\vec{x}_t$, как линейные комбинации процессов нулевого и первого порядков интеграции, будут первого порядка интеграции. Но нельзя забывать, что справедливо и обратное: компоненты вектора $\vec{y}_t$ являются линейными комбинациями компонент вектора $\vec{x}_t$. Следовательно, существует линейная комбинация процессов x_t^1 и x_t^2, первого порядка интеграции каждый, являющаяся стационарным процессом. Коэффициенты этой линейной комбинации являются элементами второй строки матрицы C^{-1}. В соответствии с определением процессы x_t^1 и x_t^2 коинтегрированы.

В предыдущей лекции мы ввели в рассмотрение матрицу $\Pi = I - A_1$ и отметили, что собственные векторы матриц Π и A_1 совпадают, а их собственные числа дополняют друг друга до единицы. Поэтому условие наличия одного единичного собственного числа у матрицы A_1 означает наличие одного нулевого собственного числа у матрицы Π, а это, в свою очередь, эквивалентно равенству единице ранга матрицы Π. Используя диагональное представление матрицы Π, получаем:

$$\Pi = C\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1-\lambda_2) \end{pmatrix}C^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1-\lambda_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda_2)c_{12} \\ (1-\lambda_2)c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь через c_{ij} обозначены элементы матрицы C, а через $\tilde{c}_{ij}$ − элементы матрицы C^{-1}. Обратим внимание, что матрица Π разложена в произведение (факторизована) двух прямоугольных матриц: вектора-столбца на вектор-строку, причем вектор-строка представляет собой коинтегрирующий вектор. Еще раз подчеркнем, что это просто вторая строка матрицы, обратной матрице, составленной из собственных векторов матрицы Π.

Пусть теперь $\lambda_1 = \lambda_2$. В этом случае, как мы уже упоминали, существует невырожденная матрица P, такая что $P^{-1}A_1P = J$ и $A_1 = PJP^{-1}$, где J − жорданова матрица: $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Определив вектор $\vec{y}_t = P^{-1}\vec{x}_t$ ($\vec{x}_t = P\vec{y}_t$), получаем систему соотношений:

$$y_t^1 = \lambda_1 y_{t-1}^1 + y_{t-1}^2 + \eta_t^1$$
$$y_t^2 = \lambda_2 y_{t-1}^2 + \eta_t^2.$$

При $|\lambda| < 1$ второе уравнение представляет собой стационарную модель AR(1), а первое − стационарную модель ADL(1,1), и о коинтеграции речь не идет.

Если же $\lambda = 1$, то из второго уравнения следует, что y_t^2 является случайным блужданием, т.е. $y_t^2 \sim I(1)$. Поскольку первое уравнение сводится к виду $\Delta y_t^1 = y_{t-1}^2 + \eta_t^1$, то для достижения стационарности нужно еще раз взять последовательную разность. Это означает, что $y_t^1 \sim I(2)$. Поскольку $\vec{x}_t = P\vec{y}_t$, его обе компоненты являются процессами порядка интеграции 2. В то же время существует их линейная комбинация (y_t^2), чей порядок интеграции равен 1. Следовательно, эти компоненты коинтегрированы: $x_1, x_2 \sim CI(2,1)$. Оба собственных числа матрицы Π равны в этом случае нулю, а ее ранг равен 1. В этом случае матрица $\Pi = P\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{p}_{11} & \tilde{p}_{12} \\ \tilde{p}_{21} & \tilde{p}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_{11} \\ -p_{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{p}_{21} & \tilde{p}_{22} \end{pmatrix}$ также факторизуется в произведение прямоугольных матриц, и вторая из них дает коинтегрирующий вектор.

Наконец, при равенстве собственных чисел может тем не менее существовать два линейно независимых собственных вектора, соответствующих этому собственному числу. В этом случае матрицы A_1 и Π приводятся к диагональной форме, и система уравнений для вектора $\vec{y}_t$ принимает вид: $y_t^1 = y_{t-1}^1 + \eta_t^1$, $y_t^2 = y_{t-1}^2 + \eta_t^2$. Обе компоненты относятся к типу $I(1)$, поэтому обе компоненты вектора x_t^1 также относятся к типу $I(1)$, а коинтегрирующей комбинации нет. Заметим, что матрица Π в этом случае состоит из одних нулей, и ее ранг равен 0.

Теперь рассмотрим случай модели VAR(1) для трехмерного случайного вектора, матрица A_1 имеет 3 собственных числа, и набор возможностей несколько расширяется. Начнем со случая, когда $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$, $\lambda_3 = 1$ и $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Тогда матрица C из собственных векторов существует, и система уравнений для компонент вектора $\vec{y}_t$ распадается на отдельные уравнения:

$$\begin{aligned} y_t^1 &= \lambda_1 y_{t-1}^1 + \eta_t^1 \\ y_t^2 &= \lambda_2 y_{t-1}^2 + \eta_t^2 \\ y_t^3 &= y_{t-1}^3 + \eta_t^3 . \end{aligned}$$

Очевидно, что третья компонента будет типа $I(1)$, а две остальные − типа $I(0)$. Поэтому все компоненты вектора $\vec{x}_t$ будут типа $I(1)$, в то же время две их линейные комбинации, соответствующие переменным y_t^1 и y_t^2, будут стационарными. Это означает, что переменные x_t^1, x_t^2, x_t^3 коинтегрированы, и существует два линейно независимых коинтегрирующих вектора. Эти два вектора определяют линейное подпространство, каждый элемент которого будет коинтегрирующим вектором. Эта ситуация препятствует непосредственной интерпретации коинтегрирующих векторов как долгосрочных зависимостей между переменными, ведь теперь таких соотношений бесконечно много.

Ранг матрицы Π равен 2 и вновь совпадает с числом линейно независимых коинтегрирующих векторов. Ничего принципиально не меняет случай, когда $\lambda_1 = \lambda_2$. В этом случае y_t^3 по-прежнему процесс типа $I(1)$, y_t^2 – типа $I(0)$, а y_t^1 определяется моделью ADL(1, 1) и также является стационарным, т.е. типа $I(0)$. Все компоненты вектора $\vec{x}_t$ являются процессами типа $I(1)$, а переменные y_t^2 и y_t^3 являются стационарными линейно независимыми комбинациями компонент вектора $\vec{x}_t$, т.е. существует два линейно независимых коинтегрирующих вектора.

Матрица Π легко приводится либо к диагональному виду:

$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, либо к виду $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, что дает соответственно

$$\Pi = C\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}C^{-1} = \left((1-\lambda_1)\begin{pmatrix} \\ 1 \\ \ \end{pmatrix} \quad (1-\lambda_2)\begin{pmatrix} \\ 2 \\ \ \end{pmatrix} \right)\begin{pmatrix} (\quad 1 \quad) \\ (\quad 2 \quad) \end{pmatrix},$$

либо $$\Pi = P\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \left((1-\lambda)\begin{pmatrix} \\ 1 \\ \ \end{pmatrix} \quad (1-\lambda)\begin{pmatrix} \\ 2 \\ \ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \\ 1 \\ \ \end{pmatrix} \right)\begin{pmatrix} (\quad 1 \quad) \\ (\quad 2 \quad) \end{pmatrix}.$$

Через $\begin{pmatrix} \\ 1 \\ \ \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \\ 2 \\ \ \end{pmatrix}$ обозначены первый и второй столбцы матрицы C или P, а через $(\quad 1 \quad)$ и $(\quad 2 \quad)$ – соответствующие строки матрицы C^{-1} или P^{-1}. В обоих случаях матрица Π разложена в произведение прямоугольных матриц размерностью $(n \times r)$ и $(r \times n)$ соответственно, где n – размерность вектора $\vec{x}_t$, а r – ранг матрицы Π. При этом строки второй из матриц являются коинтегрирующими векторами. В литературе почему-то принято обозначать эти матрицы строчными греческими буквами α и β^T, и факторизация записывается в виде $\Pi = \alpha\beta^T$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, а $|\lambda_3| < 1$. Если при этом кратному собственному числу $\lambda_1 = 1$ соответствует только один собственный вектор, то система уравнений для вектора $\vec{y}_t = P^{-1}\vec{x}_t$ принимает вид:

$$y_t^1 = y_{t-1}^1 + y_{t-1}^2 + \varepsilon_t^1$$

$$y_t^2 = y_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2$$

$$y_t^3 = \lambda_3 y_{t-1}^3 + \varepsilon_t^3.$$

Очевидно, что $y_t^3 \sim I(0)$, $y_t^2 \sim I(1)$, $y_t^1 \sim I(2)$. Все компоненты вектора $\vec{x}_t$ относятся тогда к типу $I(2)$, и существуют две коинтегрирующие линейные комбинации. Одна из них, соответствующая y_t^2, понижает порядок интеграции до 1, а вторая, соответствующая y_t^3, понижает порядок до 0. Ранг матрицы Π равен 2, ее факторизация в виде $\Pi = \alpha\beta^T$ опять имеет место.

Если же кратному единичному собственному значению соответствует два линейно независимых собственных вектора, то VAR-модель для вектора $\vec{y}_t$ распадается на уравнения для отдельных компонент.

$$\begin{aligned} y_t^1 &= y_{t-1}^1 + \varepsilon_t^1 \\ y_t^2 &= y_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 \\ y_t^3 &= \lambda_3 y_{t-1}^3 + \varepsilon_t^3 . \end{aligned}$$

Тогда $y_t^3 \sim I(0)$, y_t^2, $y_t^1 \sim I(1)$. Компоненты вектора $\vec{x}_t$ будут процессами типа $I(1)$, и существует лишь одна коинтегрирующая комбинация, соответствующая y_t^3. Ранг матрицы Π равен 1, и она может быть представлена в виде произведения вектора-столбца на вектор-строку, которая и является коинтегрирующим вектором.

Осталось рассмотреть случай, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Этому трехкратному собственному числу может соответствовать один, два или три линейно независимых собственных вектора. Если такой вектор один, то для вектора $\vec{y}_t$ получается следующая система:

$$\begin{aligned} y_t^1 &= y_{t-1}^1 + y_{t-1}^2 + \eta_t^1 \\ y_t^2 &= y_{t-1}^2 + y_{t-1}^3 + \eta_t^2 \\ y_t^3 &= y_{t-1}^3 + \eta_t^3 . \end{aligned}$$

Компонента $y_{t-1}^3 \sim I(1)$, компонента $y_{t-1}^2 \sim I(2)$, и компонента $y_{t-1}^1 \sim I(3)$. Все компоненты вектора $\vec{x}_t$ будут типа $I(3)$, и существует две коинтегрирующие комбинации, имеющие порядок интеграции 2 (соответствует y_t^2) и 1 (соответствует y_t^3). Ранг матрицы Π вновь равен числу линейно независимых коинтегрирующих векторов, т.е. двум.

Если собственному числу соответствует два собственных вектора, то для вектора $\vec{y}_t$ получается следующая система:

$$\begin{aligned} y_t^1 &= y_{t-1}^1 + y_{t-1}^2 + \eta_t^1 \\ y_t^2 &= y_{t-1}^2 + \eta_t^2 \\ y_t^3 &= y_{t-1}^3 + \eta_t^3 . \end{aligned}$$

Компоненты $y_{t-1}^2, y_{t-1}^3 \sim I(1)$ и компонента $y_{t-1}^1 \sim I(2)$. Все компоненты вектора $\vec{x}_t$ будут типа $I(2)$, и существует только одна коинтегрирующая комбинация порядка интеграции 1 (соответствует y_t^2). Ранг матрицы Π вновь равен числу линейно независимых коинтегрирующих векторов, т.е. единице.

Наконец, если собственному числу соответствуют три линейно независимых собственных вектора, то система уравнений для вектора $\vec{y}_t$ распадается на 3 отдельных уравнения:

$$y_t^1 = y_{t-1}^1 + \eta_t^1$$
$$y_t^2 = y_{t-1}^2 + \eta_t^2$$
$$y_t^3 = y_{t-1}^3 + \eta_t^3 .$$

Все компоненты вектора $\vec{y}_t$ являются интегрированными процессами порядка 1. Все компоненты вектора $\vec{x}_t$ также будут типа $I(1)$, и не существует ни одной коинтегрирующей комбинации. Ранг матрицы Π, состоящей теперь из одних нулей, вновь равен числу линейно независимых коинтегрирующих векторов, т.е. нулю.

Оказывается, результат рассмотрения удобнее и элегантнее выразить в терминах ранга матрицы Π, чем в количестве единичных корней матрицы A_1. Мы фактически установили, что если двумерный или трехмерный случайный процесс имеет представление в виде модели VAR(1) и среди его характеристических корней ни один по модулю не превышает единицы, то количество коинтегрирующих линейно независимых векторов между компонентами процесса в точности равно рангу матрицы $\Pi = I - A_1$. При этом вовсе не обязательно пользоваться VAR-моделью, важно лишь, чтобы многомерный процесс допускал VAR(1) представление. Сразу отметим, что ранг матрицы Π равен числу нулевых собственных чисел этой матрицы.

Осталось обобщить этот вывод на случай процесса любой размерности и общую модель VAR(p). Обобщение на многомерный процесс достаточно очевидно из цепочки предыдущих рассуждений. И, наконец, рассмотрим общий случай модели VAR(p): $\vec{y}_t = A_1\vec{y}_{t-1} + ... + A_p\vec{y}_{t-p} + \vec{\varepsilon}_t$. Это уравнение можно переписать в другом виде после таких же преобразований, как и при выводе уравнения ADF-теста:

$$\Delta\vec{y}_t = -\Pi\vec{y}_{t-1} + B_1\Delta\vec{y}_{t-1} + ... + B_{p-1}\Delta\vec{y}_{t-p+1} + \vec{\varepsilon}_t .$$

Здесь матрица $\Pi = I - A_1 - A_2 - ... - A_p$, а матрицы $B_1,.., B_{p-1}$ выражаются через матрицы $A_1,..., A_p$ следующим образом: $B_j = -\sum_{i=j+1}^{p} A_i$. Доказательство того, что наличие коинтеграции связано с вырожденностью матрицы Π, или, более точно, что количество коинтегрирующих векторов в точности равно рангу матрицы Π, требует использования блочных матриц и останется за рамками нашего курса. Доказательство можно найти, например, для $p = 2$ в учебнике Джонстона и Ди Нардо [12]. Идея доказательства заключается в стандартном сведении системы разностных уравнений порядка p для n переменных к системе разностных уравнений первого порядка, но для pn переменных. Матрица преобразованной системы обладает блочной структурой, а характеристические уравнения исходной и преобразованной систем совпадают. Эта часть доказательства и является наиболее сложной технически. Для исходного уравнения, как мы уже упоминали, характеристическое уравнение имеет вид: $\det(\lambda^p I - \lambda^{p-1} A_1 - ... - A_p) = 0$. Следовательно, существование единичного корня у исходного уравнения эквивалентно существованию нулевого корня у вышеприведенной матрицы Π. С помощью рассуждений, аналогичных проведенным выше, мы приходим к следующему заключению. Ранг матрицы $\Pi = I - A_1 - A_2 - ... - A_p$ равен числу линейно независимых коинтегрирующих векторов. Этот показатель принято называть *коинтегрирующим рангом*.

Итак, если между компонентами вектора $\vec{y}_t$ существуют коинтегрирующие соотношения, то их количество равно количеству нулевых собственных чисел матрицы Π, причем не все коинтегрирующие соотношения дают стационарные линейные комбинации.

Лекция 15

Коинтеграционная регрессия и тестирование коинтеграции

До сих пор мы рассматривали коинтеграцию как некоторое сугубо теоретическое свойство. Посмотрим, что меняет наличие этого свойства для оценивания регрессий с нестационарными переменными. Вернемся к рассмотренному в предыдущей лекции примеру Грэнжера и Энгла: случайные процессы X_t и Y_t определены следующими соотношениями: $X_t + \beta Y_t = u_t$, $X_t + \alpha Y_t = v_t$, где $u_t = u_{t-1} + \varepsilon_{1t}$, и $v_t = \rho v_{t-1} + \varepsilon_{2t}$ (ε_{1t} и ε_{2t} − некоррелированные белые шумы). Мы уже установили, что X_t и Y_t коинтегрированы. Пусть у нас есть выборка объема T из обеих переменных. Попробуем построить обычную регрессию X_t на Y_t методом наименьших квадратов. Как мы помним, в этом случае существует опасность получить в результате кажущуюся регрессию. Удивительная вещь заключается в следующем. Несмотря на то, что X_t и Y_t являются процессами типа $I(1)$, оказывается, что в случае, если процессы коинтегрированы, оценка МНК коэффициентов регрессии становится состоятельной. И можно, несмотря на нестационарность переменных, применять обычные регрессионные методы.

Давайте посмотрим, почему это так. Оценка коэффициента наклона в регрессии $X_t = \alpha + \gamma Y_t + \varepsilon_t$ будет выражена известным выражением $\hat{\gamma} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum y_t^2}$. Поскольку математические ожидания обеих переменных равны нулю, можно заменить в этом выражении строчные буквы прописными. Используем приведенную форму нашей системы:

$$X_t = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} u_t - \frac{\beta}{\alpha - \beta} v_t$$

$$Y_t = -\frac{1}{\alpha - \beta} u_t + \frac{1}{\alpha - \beta} v_t.$$

Используя теорему Слуцкого и тот факт, что дисперсия стационарного процесса v_t постоянна, а дисперсия процесса случайного блуждания u_t стремится к бесконечности, получим:

$$p\lim \hat{\gamma} = \frac{p\lim\left(\frac{1}{T}\sum x_t y_t\right)}{p\lim\left(\frac{1}{T}\sum y_t^2\right)} = \frac{Cov\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}u_t - \frac{\beta}{\alpha-\beta}v_t, -\frac{1}{\alpha-\beta}u_t + \frac{1}{\alpha-\beta}v\right)}{\mathrm{var}\left(-\frac{1}{\alpha-\beta}u_t + \frac{1}{\alpha-\beta}v\right)} =$$

$$= \frac{-\alpha\,\mathrm{var}(u_t) - \beta\,\mathrm{var}(v_t)}{\mathrm{var}(u_t) + \mathrm{var}(v_t)} \xrightarrow[T\to\infty]{} -\alpha$$

Следовательно, оценка МНК коэффициента наклона является состоятельной оценкой нормированного коинтегрирующего соотношения. Более того, можно показать, что скорость сходимости оценки выше, чем в случае оценки МНК для стационарных регрессий [22]. Поскольку дисперсия случайного блуждания растет пропорционально T, скорость сходимости при наличии коинтеграции пропорциональна $\frac{1}{T}$, в то время как для стационарных регрессоров скорость сходимости пропорциональна только $\frac{1}{\sqrt{T}}$. Это свойство оценок МНК при наличии коинтеграции называют *суперсостоятельностью*.

Однако регрессия X_t на Y_t использует не всю информацию, содержащуюся в исходной модели. Умножим второе из уравнений приведенной формы на α и сложим с первым уравнением. Получим $X_t + \alpha Y_t = \upsilon_t = \rho\upsilon_{t-1}$. Стандартным образом получаем:

$$X_t + \alpha Y_t - \rho(X_{t-1} + \alpha Y_{t-1}) = \upsilon_t - \rho\upsilon_{t-1} = \varepsilon_{2t},$$
$$\text{или } \Delta X_t = -\alpha\Delta Y_t + (\rho-1)(X_{t-1} + \alpha Y_{t-1}) + \varepsilon_{2t}.$$

Полученное выражение представляет собой уже знакомую нам модель коррекции ошибками, в котором коинтегрирующее соотношение играет роль долгосрочного соотношения между переменными. Эта модель соответствует модели ADL(1,1) с нестационарными регрессорами, а именно: $X_t = \rho X_{t-1} - \alpha Y_t - \rho\alpha Y_{t-1} + \varepsilon_{2t}$. Понятно, что ECM и ADL(1,1) являются различными параметризациями одной и той же модели. При этом, если оценивать модель в виде ECM методом наименьших квадратов, то как объясняемая переменная ΔX_t, так и регрессоры ΔY_t и $(X_{t-1} + \alpha Y_{t-1})$ являются стационарными. Поэтому оценки коэффициентов ECM-представления заведомо состоятельны. Поскольку оценки ADL-представления однозначно пересчитываются через оценки ECM-представления, они также состоятельны.

Общий результат, полученный Симсом, Стоком и Уотсоном [21], состоит в следующем. Если при некоторой параметризации модели параметр может быть выражен как коэффициент при переменной типа $I(0)$, обычные тестовые статистики для этого коэффициента асимптотически справедливы. Более того, если при некоторой параметризации модели подмножество параметров является коэффициентами при переменных типа $I(0)$, обычные тестовые статистики для этого подмножества коэффициентов асимптотически справедливы. Доказательство этого чрезвычайно важного результата выходит за рамки нашего курса. Обратите внимание, что для применимости обычных тестовых процедур и таблиц распределений достаточно принципиальной возможности подходящей параметризации, вовсе не требуется оценивать коэффициенты именно этой параметризации. Например, это означает, что оценки методом наименьших квадратов ECM и ADL представлений асимптотически эквивалентны, если переменные коинтегрированы. Впрочем, в конечных выборках эквивалентность не гарантирована, и существует обширная литература, где обсуждаются преимущества той или иной параметризации в конечных выборках.

Общий вывод таков: одни и те же методы оценивания и диагностические процедуры применимы как для стационарных, так и для нестационарных регрессоров типа $I(1)$, если последние коинтегрированы. Поэтому ключевым вопросом является тестирование наличия коинтеграции нестационарных процессов. Первая тестовая *двухшаговая* процедура была предложена Энглом и Грэнжером [4]. Рассмотрим ее на примере регрессии между двумя рядами типа $I(1)$.

1 шаг. Убеждаемся, что оба регрессора относятся к типу $I(1)$. Строим обычную регрессию переменной X_t на переменную Y_t методом наименьших квадратов.

2 шаг. Проверяем остатки регрессии на стационарность. Если остатки являются стационарным временным рядом, то процессы X_t и Y_t коинтегрированы. Если же остатки относятся к типу $I(1)$, то коинтеграция отсутствует. Если процессы коинтегрированы, то регрессия, построенная на первом шаге, называется *коинтегрирующей (cointegrating regression).*

Для проверки порядка интеграции остатков авторы предложили применять тест Дикки−Фуллера, но критические значения таблиц этого теста в данном случае не годятся. Вспомните, что таблицы получены в результате моделирования Монте−Карло для сгенерированного случайного блуждания. В этом же случае исследуемый процесс получен в результате процедуры метода наименьших квадратов, т.е. является «оцененным». В частности, сумма ошибок равна 0. Таблицы критических значений для процедуры Энгла−Грэнжера были приведены в работе Мак-Киннона [14]. Они больше по абсолютной величине, чем критические значения статистики Дикки−Фуллера τ_μ для того же уровня значимости. Другими словами, критические значения теста на наличие коинтеграции лежат левее критических значений теста Дикки−Фуллера. Например, на уровне значимости 5% для $T = 100$, отсутствия лагов и тренда в модели критическое значение для теста Дикки−Фуллера равно −1,945, а для теста на наличие коинтеграции соответствующее значение равно −3,396. Поскольку нулевая гипотеза заключается в наличии единичного корня у ряда остатков, т.е. в *отсутствии коинтеграции*, критические значения смещены в сторону гипотезы о наличии коинтеграции. В вышеупомянутой работе Мак-Киннон предложил аппроксимирующую формулу для расчета критических чисел, которая и используется в большинстве специализированных компьютерных программ. Эта аппроксимирующая функция носит название поверхности отклика и представляется следующим образом:

$$C(\alpha, T) = k_0 + \frac{k_1}{T} + \frac{k_2}{T^2},$$

где $C(\alpha,T)$ – односторонняя α-процентная точка для выборки размера T, k_0 – асимптотическое значение критической величины, а два вторых слагаемых выражают поправки на конечность выборки. Мак-Киннон привел таблицу значений параметров поверхности отклика k_0, k_1, k_2 в зависимости от числа наблюдений T и количества регрессоров в тестовом уравнении без учета константы. Включение и невключение линейного тренда в исходное уравнение регрессии дает два набора таблиц критических значений.

Линейный тренд также может быть добавлен в коинтегрирующее соотношение, что требует дополнительных таблиц. Необходимость включения линейного тренда в коинтегрирующее соотношение может возникнуть в следующем случае. Исследование нестационарности ADF-тестом может показать наличие детерминированного тренда и единичного корня одновременно у одной из исследуемых переменных. Если вторая переменная (или не все из переменных в общем случае) не содержит детерминированный тренд, следует включить его в коинтегрирующее соотношение, в противном случае невозможно обеспечить «баланс» слагаемыми различного типа в коинтегрирующем уравнении. Если более чем одна переменная содержит наряду с единичным корнем детерминированный тренд, то эти детермированные тренды могут, вообще говоря, компенсировать друг друга. Но чтобы допустить возможность отсутствия такой компенсации и тестировать ее, следует все же включить детерминированный тренд в коинтегрирующее соотношение. Ситуацию, когда две переменные обе содержат детерминированный тренд, и эти тренды компенсируют друг друга, иногда называют *детерминированной коинтеграцией*.

Отметим также, что существуют ситуации, когда экономическая теория предписывает определенный коэффициент в долгосрочном соотношении (равновесии). Например, в классической теории потребления по Кейнсу предполагается единичная долгосрочная эластичность потребления по располагаемому доходу. Для данных, выраженных в логарифмах, это означает, что нам заранее известен коинтегрирующий вектор (1 −1). В этом случае на первом шаге процедуры Энгла−Грэнжера нет нужды оценивать регрессию, и остатки получаются просто вычитанием переменных. Теперь проверка гипотезы о наличии коинтеграции может быть проведена непосредственно по таблицам теста Дикки−Фуллера, так как остатки более не являются «оценкой».

Если тест Энгла−Грэнжера показал наличие коинтеграции, то возможно описать в модели не только долгосрочное равновесие, но и динамику движения к этому долгосрочному равновесию. Для этого разумно добавить в исходную регрессию дополнительный регрессор – коинтегрирующее соотношение в предыдущий момент времени. Это означает, что мы строим Error correction model. Обратите внимание, насколько полезней этот подход подхода Бокса−Дженкенса, из которого следует, что если процессы оказываются нестационарными типа $I(1)$, то во избежание кажущейся регрессии мы строим регрессию первой разности ΔX_t на первую разность ΔY_t. При переходе к разностям всякая информация о долгосрочной взаимосвязи рядов теряется. Понятие коинтеграции помогает резко улучшить ситуацию. Теперь кроме составляющих, описывающих краткосрочное поведение, полученная модель связывает и долгосрочное, и краткосрочное поведение.

Мы уже упоминали, что наличие коинтеграции позволяет оценивать модель и в виде ADL-представления. Это представление также отражает и краткосрочное, и долгосрочное поведение, но его параметры уже не допускают непосредственной интерпретации. Но для того, чтобы быть уверенным, что оценивание ADL-модели приведет к состоятельным оценкам ее параметров, нужно предварительно установить наличие коинтеграции переменных. Оба метода оценки асимптотически эквивалентны, но в конечных выборках дают несколько разные оценки. Сток [22] показал, что в конечных выборках процедура Энгла–Грэнжера дает несколько большее смещение оценок коэффициентов.

Тест Йохансена

Основные из применяемых в настоящее время тестов наличия коинтеграции [24] основаны на связи количества коинтегрирующих векторов с рангом матрицы Π в VAR-представлении многомерного временного ряда, а следовательно, с количеством нулевых собственных чисел этой матрицы. Мы рассмотрим лишь один из тестов, предложенный Йохансеном в серии работ [9, 11, 12]. Пожалуй, этот тест является наиболее популярным и входит в большинство специализированных компьютерных пакетов, в частности в Eviews.

Первым шагом в реализации теста Йохансена является оценка модели VAR(p) для заданного k-мерного временного ряда

$$\vec{Y}_t = \{\vec{\mu} + t\vec{\beta}\} + A_1\vec{Y}_{t-1} + \ldots + A_p\vec{Y}_{t-p} + \vec{\varepsilon}_t .$$

По сравнению с ранее рассматриваемой моделью в нее добавлены векторы линейного тренда и допускается ненулевое математическое ожидание для каждой из компонент. Фигурные скобки указывают, что модель может не содержать ни одного из этих слагаемых, может включать только вектор свободных членов, а может включать оба дополнительных слагаемых. Разумеется, обычные условия для остатков модели предполагаются выполненными: остатки гомоскедастичны и не коррелированны. Первоначально Йохансен требовал также нормальности остатков, но в 1995 г. ослабил это условие до требования, чтобы остатки не очень сильно отличались от Гауссова белого шума [10]. Мы уже рассматривали тесты для проверки этих свойств.

Порядок модели p выбирают обычно с использованием информационных критериев Акаике и Шварца среди моделей, прошедших диагностику остатков. При переборе моделей включают/исключают также свободные член и линейный тренд. Возможно также проверить гипотезу о том, что порядок VAR-модели равен p, против альтернативной гипотезы, что ранг равен $q < p$. Для проверки используется тест отношений правдоподобия. Если вектор случайных возмущений является гауссовым белым шумом, то логарифм функции правдоподобия для T наблюдений и k-мерной переменной принимает следующий вид [7]:

$$\ln l = const + \frac{T}{2}\ln\left|\hat{\Omega}^{-1}\right| ,$$

где $\hat{\Omega}$ – оценка ковариационной матрицы остатков VAR-модели. Отношение правдоподобий поэтому принимает вид:

$$LR = -2(\ln l_q - \ln l_p) = T(\ln\left|\hat{\Omega}_q^{-1}\right| - \ln\left|\hat{\Omega}_p^{-1}\right|).$$

При справедливости нулевой гипотезы, т.е. если порядок модели равен p, эта статистика распределена асимптотически как хи-квадрат с числом степеней свободы равным $k^2(p-q)$.

После оценки VAR-модели в тесте Йохансена рассчитывается оценка матрицы $\Pi = I - A_1 - A_2 - ... - A_p$, соответствующая ECM-представлению модели $\Delta\vec{y}_t = \{\vec{\mu} + t\vec{\beta}\} + -\Pi\vec{y}_{t-1} + B_1\Delta\vec{y}_{t-1} + ... + B_{p-1}\Delta\vec{y}_{t-p+1} + \vec{\varepsilon}_t$. Нулевой гипотезой является то, что ранг матрицы Π не превышает некоторого числа $r < k$. В качестве альтернативной гипотезы используется $H_1: rank\,\Pi = k$, или $H_1: rank\,\Pi = r+1$. Статистика для проверки нулевой гипотезы против первой из приведенных альтернативных имеет вид $-T\sum_{i=r+1}^{k}\ln(1-\tilde{\lambda}_i)$ и называется *trace statistic*. Название связано с тем, что статистика пропорциональна сумме логарифмов собственных чисел матрицы (остальные $(k-r)$ собственных чисел считаются нулевыми), т.е. следу матрицы. Для проверки против второй альтернативной гипотезы тестовая статистика принимает вид: $-T\ln(1-\tilde{\lambda}_{r+1})$ и называется *max statistic*. Название связано с тем, что статистика пропорциональна логарифму максимального из собственных чисел матрицы, считающихся нулевыми. В приведенных выражениях через $\tilde{\lambda}_i$ обозначена оценка максимального правдоподобия i-го корня полученного Йохансеном уравнения. При этом предполагается, что корни упорядочены в порядке убывания.

В пакете Eviwes применяется *trace statistic*. В этом пакете последовательно перебираются значения r от 0 до k. Если нулевая гипотеза $r = 0$ не отвергается уже на первом шаге, то процесс нестационарный, и коинтеграции не существует. Если гипотеза $r = 0$ отвергается, на следующем шаге проверяется гипотеза $r = 1$. Если она не отвергается, то коинтегрирующий ранг равен 1. Если же гипотеза отвергается, то переходим к проверке нулевой гипотезы $r = 2$, и так далее. Стационарности исследуемого многомерного процесса соответствует отвержение нулевой гипотезы при всех $r < k$.

Распределения обеих тестовых статистик не стандартны, и их критические значения получены моделированием Монте−Карло. Таблицы критических чисел зависят от того, входят ли детерминированный тренд и свободный член в VAR-уравнение, и входит ли линейный член в коинтегрирующее соотношение. В пакете Eviews реализованы следующие пять возможностей:

- ни свободный член, ни тренд не входят ни в VAR-уравнение, ни в коинтегрирующее соотношение;
- свободный член входит в коинтегрирующее соотношение, ни свободный член ни тренд не входят в VAR-уравнение;
- свободный член входит как в коинтегрирующее соотношение, так и в VAR-уравнение;
- свободный член и тренд входят в коинтегрирующее соотношение, тренд не входит в VAR-уравнение;

• свободный член и тренд входят в коинтегрирующее соотношение, тренд входит в VAR-уравнение.

Первые два случая подразумевают отсутствие детерминированного тренда в данных, два следующих – наличие детерминированного тренда в данных, а последний допускает наличие квадратичного детерминированного тренда в данных. Нужный вариант теста обычно выбирают исходя из характера поведения данных и теоретических представлений о виде долгосрочного соотношения между переменными.

Самый простой случай – это отсутствие свободного члена как в коинтегрирующем уравнении, так и в VAR-модели. Это означает, что математические ожидания всех рассматриваемых переменных равны нулю. Визуальная инспекция данных и проверка выборочных средних на равенство нулю обычно достаточны для отказа от такой спецификации теста Йохансена (первой в нашем списке).

Часто коинтегрирующее уравнение содержит свободный член из теоретических соображений. Так, при моделировании производственной функции типа Кобба–Дугласа или функции потребления с постоянной склонностью к потреблению стандартной процедурой является переход к линейной в логарифмах модели. При этом масштабирующий множитель, входящий в исходную спецификацию модели, переходит при логарифмировании в свободный член (константу) уравнения долгосрочного равновесия. Раз коинтеграция существует, то матрица $\Pi = \alpha\beta^T$ может быть факторизована, и ECM представление в этом случае может быть записано в виде: $\Delta\vec{y}_t = -\alpha\begin{pmatrix}\beta^T \\ \vec{\gamma}^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{y}_{t-1} \\ 1\end{pmatrix} + B_1\Delta\vec{y}_{t-1} + \ldots + B_{p-1}\Delta\vec{y}_{t-p+1} + \vec{\varepsilon}_t$. Через $\begin{pmatrix}\beta^T \\ \vec{\gamma}^T\end{pmatrix}$ здесь обозначена блочная матрица, нижний блок которой является вектор-строкой, составленной из входящих в коинтегрирующие соотношения констант. Вектор $\begin{pmatrix}\vec{y}_{t-1} \\ 1\end{pmatrix}$, в свою очередь, содержит в нижнем блоке число 1. Другими словами, в ECM-модели константы входят только в «долгосрочную часть» и отсутствуют в «краткосрочной». При переходе от ECM-представления к VAR-модели мы должны «смириться» с присутствием свободного члена и в VAR-модели.

Кроме того, само VAR-представление может включать свободный член, даже если долгосрочное равновесие не подразумевает константы. Ведь априори не всегда есть основания отрицать ненулевое математическое ожидание всех компонент многомерного случайного процесса. В этом случае переход к ECM-представлению даст вектор констант в «краткосрочной части» модели, независимо от наличия/отсутствия констант в «долгосрочной части». Но если компоненты вектора данных интегрированы, то наличие константы в уравнении краткосрочного поведения означает наличие дополнительного детерминированного тренда в данных. Ситуация полностью аналогична случайному блужданию с дрейфом. Таким образом, наличие вектора свободных членов в VAR-модели может соответствовать двум качественно очень разным случаям:

• если вектор свободных членов VAR-модели полностью переходит в коинтеграционные соотношения ECM-представления, то порожденные такой моделью данные не демонстрируют наличия детерминированного тренда;

• если вектор свободных членов VAR-модели переходит не только в коинтеграционные соотношения ECM-представления, но и в дополнительный вектор свободных членов «краткосрочной части», то порожденные такой моделью данные демонстрируют наличие детерминированного тренда.

Поэтому, если визуальная инспекция данных и предварительные оценки свидетельствуют об отсутствии в данных линейного тренда, а в долгосрочном соотношении тренд должен присутствовать, мы выбираем вторую из пяти вышеуказанных возможностей. Если же анализ свидетельствует в пользу наличия детерминированного тренда в данных, то мы предпочитаем третью возможность.

Аналогично рассматривается случай включения линейного тренда в коинтегрирующее соотношение. Если линейный тренд из VAR-модели при переходе в ECM-представление входит только в «долгосрочную часть», то порождаемые данные должны демонстрировать детерминированный линейный тренд, и для тестирования коинтеграции следует использовать четвертую из возможностей. Если же тренд переходит и/или в «краткосрочную часть», данные должны демонстрировать уже квадратичный детерминированный тренд. Для такого случая предназначена пятая возможность применения теста Йохансена. К сожалению, в литературе и в описаниях компьютерных пакетов эти пять опций описаны в терминах отсутствия/наличия константы и тренда в VAR-модели и коинтегрирующем уравнении, хотя по сути речь идет не о VAR, а о «краткосрочной части» ECM-представления. Наше рассмотрение показывает, что наиболее употребительными, подходящими к экономическим данным являются вторая и третья опции теста Йохансена.

Наше рассмотрение теста Йохансена до сих пор ограничивалось выяснением коинтегрированы или нет переменные. В случае положительного ответа на поставленный вопрос следует приступить к оценке модели. Йохансен предложил не только процедуру тестирования коинтеграции, но и процедуру оценивания коинтегрирующих векторов. Такая оценка (методом максимального правдоподобия) в настоящее время является составной частью большинства компьютерных реализаций теста Йохансена. Вспомним, что коинтегрирующие векторы являются столбцами матрицы β из разложения $\Pi = \alpha\beta^T$. Возможность факторизации матрицы явно указывает на наличие линейных соотношений между ее элементами. В свою очередь, это означает, что учет этих ограничений при оценивании даст более эффективные оценки коэффициентов модели. Такой учет может быть осуществлен путем оценки модели в форме ECM с прямым включением в нее долгосрочных соотношений (обобщение процедуры Энгла–Грэнжера), либо в VAR-представлении, оценивая каждое из уравнений методом наименьших квадратов при ограничениях.

Серьезной практической проблемой является обнаружение нескольких коинтегрирующих векторов. Если существует лишь одно коинтегрирующее соотношение между компонентами вектора, его можно трактовать как долгосрочное равновесие между этими переменными. В случае нескольких коинтегрирующих соотношений, существует несколько линейных комбинаций компонент, которые являются стационарными. А это означает, как мы уже отмечали, что любая линейная комбинация этих линейных комбинаций также является стационарной. И поэтому сложно выявить комбинации, которые можно содержательно интерпритировать как экономические равновесия. Можно сослаться, например, на опыт построения функции спроса на деньги Йохансеном и Джузелиусом [12] для Дании и Финляндии. Для Дании использовалась выборка квартальных данных с I кв. 1974 г. по III кв. 1987 г. (55 наблюдений). Для Финляндии выборка включала 67 наблюдений с I кв. 1958 г. по III кв. 1984 г. Для Дании было получено одно коинтегрирующее соотношение, которое хорошо трактуется и дает возможность построить содержательную теоретически модель спроса на деньги. А во втором случае, для Финляндии, было получено три коинтегрирующих соотношения, и интерпретация построенных соотношений в значительной степени затруднена.

Лекция 16

Модели с условной гетероскедастичностью

Моделирование цен активов на современных финансовых рынках часто приводит к тому, что временные ряды неплохо могут быть аппроксимированы моделью случайного блуждания. Этот эмпирический факт не противоречит теории эффективных рынков, но в то же время теория эффективных рынков допускает более широкий класс моделей. В этих моделях приращения процесса не обязательно должны быть независимы и иметь одинаковое распределение. Существенно, чтобы процесс был таким, что допускал бы так называемую «честную игру» (fair play), чтобы невозможно было достичь гарантированного выигрыша, основываясь на прошлой информации. Такое расширение класса процессов случайного блуждания достигается введением понятия *мартингала* (*martingale*). В английском языке слово martingale имеет два значения: часть конской сбруи, препятствующая лошади задирать голову слишком высоко, и система назначения ставок в азартной игре, при которой ставка удваивается при каждом проигрыше. Как мы увидим, свойства процесса-мартингала действительно позволяют провести некоторые аналогии с этими житейскими понятиями.

Формально мартингалом называется стохастический процесс y_t, обладающий следующими свойствами:

- математическое ожидание процесса конечно для любого момента времени t;
- Условное математическое ожидание процесса на основе всей информации, известной к моменту s, равно значению процесса в момент s: $E(y_t|\Omega_s) = y_s$ для всех $s \le t$, где Ω_s − совокупность всей информации к моменту s. Это свойство носит название мартингального.

При анализе одномерного дискретного временного ряда вся информация к некоторому моменту времени s представляет собой просто реализацию процесса на отрезке [1, s], и мартингальное свойство может быть переписано в виде $E(y_t|y_{1s} y_2,..., y_s) = y_s$ для всех $s \le t$. Это означает, что условное математическое ожидание приращения процесса равно нулю, и прогноз приращения мартингала, обеспечивающий минимальную среднеквадратическую ошибку, равен нулю. В соответствии с этим определением случайное блуждание является частным случаем мартингала. При анализе реальных финансовых временных рядов часто встречаются и иные процессы, для которых мартингальное равенство может быть заменено неравенством $E(y_t | y_1, y_2, ..., y_s) \geq y_s$ для всех $s \leq t$. Такой процесс называется *субмартингалом.* Если же неравенство выполняется с противоположным знаком, процесс называется *супермартингалом.*

Исходя из мартингального свойства, мартингал может быть записан в эквивалентной форме, очень напоминающей случайное блуждание $y_t = y_{t-1} + \eta_t$, где η_t называется мартингальным приращением, или мартингальной разностью. Свойства процесса η_t должны быть такими, чтобы гарантировать выполнение мартингального равенства. При этом процесс η_t не обязательно должен быть стационарным, например, может существовать зависимость между условными моментами процесса, условная дисперсия мартингальной разности η_t может зависеть от прошлого, а процесс y_t останется мартингалом.

Практика работы на финансовых рынках выявила еще некоторые черты реальных процессов, которые не очень хорошо описывались уже разработанными моделями. В 1982 г. Энглом [3] была предложена модель, получившая название модели с условной гетероскедастичностью (autoregressive conditional heteroskedastisity, обычно используемая аббревиатура ARCH, или ARCH-модель). Энгл предложил эту модель, чтобы описать хорошо известную из практики черту поведения многих финансовых рядов: кластеризацию волатильности, когда периоды большой изменчивости показателя сменяются периодом малой изменчивости. В то же время статистическая проверка постоянства дисперсии (как меры изменчивости) не отвергает гипотезы о гомоскедастичности.

Начнем с простой авторегрессионной модели

$$y_t = \lambda y_{t-1} + \varepsilon_t, \ \varepsilon_t \sim SWN\ (0, \sigma^2).$$

Через $SWN\ (0, \sigma^2)$ обозначен так называемый сильный белый шум, для которого свойство некоррелированности заменено на свойство независимости. В этой модели условное математическое ожидание $E(y_t | y_{t-1}) = \lambda y_{t-1}$ представляет собой теоретическую регрессию и, естественно, зависит от времени *t*. Условная дисперсия $\mathrm{var}(y_t | y_{t-1}) = \sigma^2$ от времени не зависит. Соответственно безусловное математическое ожидание равно нулю, а безусловная дисперсия равна $\frac{\sigma^2}{1-\lambda^2}$. Энгл предложил рассматривать зависимость условной дисперсии от прошлого, он специфицировал эту зависимость в простейшем случае в линейном виде:

$$h_t = \mathrm{var}(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2.$$

Поскольку дисперсия случайной ошибки должна быть положительной, параметр α_0 также должен быть положительным, а параметр α_1 − неотрицательным. Процесс, определяемый соотношением

$$u_t = \varepsilon_t h_t^{1/2} = \varepsilon_t \left(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2\right)^{1/2}, \ \varepsilon_t \sim SWN\ (0, \sigma^2),$$

называется процессом ARCH(1). Параметр в скобках указывает наибольшую длину лага в уравнении для дисперсии. Рассмотрим свойства этого процесса.

Для сокращения записи обозначим условное математическое ожидание произвольного процесса y_t $E(y_t|y_1, y_2,..., y_{t-1})$ через $E_{t-1}(y_t)$. Вычисление условного математического ожидания процесса ARCH(1) дает

$$E_{t-1}(u_t) = \left(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2\right)^{1/2} E_{t-1}(\varepsilon_t) = 0 .$$

Применяя формулу итерированного случайного ожидания, получим

$$E(u_t) = E_0(E_1(...(E_{t-2}(E_{t-1}(u_t)))...) = 0 .$$

Следовательно, безусловное математическое ожидание процесса рано нулю.

Перейдем к расчету условной дисперсии процесса ARCH(1).

$$E_{t-1}(u_t^2) = \left(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2\right) E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2\left(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2\right).$$

Далее $E_{t-2}(E_{t-1}(u_t^2)) = E_{t-2}(\sigma^2(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2)) =$

$$= \sigma^2(\alpha_0 + \alpha_1 E_{t-2}(u_{t-1}^2)) = \sigma^2(\alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-2}^2)) = \sigma^2(\alpha_0 + \alpha_1\alpha_0 + \alpha_1^2 u_{t-2}^2).$$

Для нахождения безусловной дисперсии процесса вычисляем итерированные ожидания.

$$E(u_t^2) = E_0(E_1(...(E_{t-2}(E_{t-1}(u_t^2)))...) = \sigma^2\alpha_0\left(1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 + ... + \alpha_1^{t-1}\right) + \sigma^2\alpha_1^t u_0^2 .$$

Если уравнение AR(1) для дисперсии стационарно, то $|\alpha_1| < 1$, и перейдя к пределу при $t \to \infty$, получим $\mathrm{var}(u_t) = \dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\sigma^2$. Полученный результат показывает, что безусловная дисперсия процесса ARCH(1) не зависит от времени, т.е. сам процесс гомоскедастичен.

Условная автоковариация первого порядка равна нулю, так как $E_{t-1}(u_t u_{t-1}) = u_{t-1}E_{t-1}(u_t) = 0$. Очевидно, что автоковариации более высокого порядка также равны нулю. Мы видим, что процесс ARCH(1) является стационарным белым шумом. Попутно обратим внимание, что хотя значения процесса ARCH(1) некоррелированы, существует зависимость дисперсии возмущения от дисперсии предыдущего возмущения. Это означает, что некоторые тесты могут воспринять условную гетероскедастичность как свидетельство автокорреляции остатков. В частности, таким «недостатком» обладает популярный тест Дарбина–Уотсона. Поэтому наличие условной гетероскедастичности делает этот тест неприменимым.

Уже обозначение ARCH(1) подразумевает обобщение на процесс ARCH(p). Этот процесс определяется уравнением типа AR(p) для дисперсии $h_t = \mathrm{var}(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_p\varepsilon_{t-p}^2$, что дает для процесса ARCH(p) следующее выражение:

$$u_t = \varepsilon_t h_t^{1/2} = \varepsilon_t\left(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + ... + \alpha_p u_{t-p}^2\right)^{1/2}, \ \varepsilon_t \sim SWN\ (0, \sigma^2).$$

Очевидно, что как условное, так и безусловное математическое ожидание процесса ARCH(p) равно нулю. Условная дисперсия процесса фактически задана его определением: $E_{t-1}(u_t^2) = \sigma^2\left(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + ... + \alpha_p u_{t-p}^2\right)$, а безусловная дисперсия в результате применения формулы итерированного ожидания с последующим переходом к пределу будет сложной дробно-рациональной функцией от параметров $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_p$. Самое важное, что безусловная дисперсия не будет зависеть от времени, т.е. процесс по-прежнему будет гомоскедастичным. Так же сохранится свойство некоррелированности, поскольку это свойство не зависит от конкретного уравнения процесса, а лишь от равенства нулю условного математического ожидания. Таким образом, процесс ARCH(p) является случайным блужданием и мартингалом. Установленные свойства процесса ARCH(p) означают, что он является слабо стационарным.

Тестирование наличия условной гетероскедастичности в остатках модели или для исходного процесса не требует разработки новых специальных тестов. Нулевая гипотеза об отсутствии условной гетероскедастичности эквивалентна равенству нулю всех коэффициентов кроме коэффициента α_0 в уравнении дисперсии. Поэтому проверка состоит из следующих шагов.

1. Строим необходимую модель и получаем ряд остатков e_t. Если исследованию на условную гетероскедастичность подвергается одномерный ряд исходных данных, то этот шаг не нужен.

2. Методом наименьших квадратов оцениваем модель

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + ... + \alpha_p e_{t-p}^2 + \nu_t.$$

3. Проверяем гипотезу об адекватности регрессии, построенной на втором шаге: $H_0 : \alpha_1 = ... = \alpha_p = 0$ против естественной альтернативы $H_1 : \alpha_1^2 + ... + \alpha_p^2 > 0$.

Если нулевая гипотеза отвергается, то не только устанавливается присутствие условной гетероскедастичности, но и определяется длина наибольшего лага, входящего в уравнение (параметр p).

Оценивание моделей, в которых остатки проявляют условную гетероскедастичность, можно вести в том же ключе, что и для моделей с гетероскедастичными остатками, например после использования тестов Парка или Глейзера. Оцененное на втором шаге уравнение используется для расчета весов с последующим применением взвешенного метода наименьших квадратов или для преобразования переменных, что означает применение обобщенного метода наименьших квадратов с оцененной ковариационной матрицей. Так же как при использовании вышеупомянутых тестов Парка и Глейзера, существенной практической трудностью является возможность получения отрицательных или нулевых значений подкоренного выражения при расчете весов по обычной формуле

$$w_t = \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 e_{t-1}^2 + ... + \hat{\alpha}_p e_{t-p}^2}}.$$

Чтобы избежать этого, иногда вводят ограничения на параметры, например задавая характер убывания коэффициентов в уравнении

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + ... + \alpha_p e_{t-p}^2 + \nu_t.$$

Боллерслев [1] предложил обобщение ARCH-модели, позволяющее достичь большей гибкости. Он предложил добавить в уравнение для дисперсии зависимость от предыдущих значений дисперсии:

$$h_t = \mathrm{var}(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \gamma_1 h_{t-1} + \ldots + \gamma_q h_{t-q}.$$

Эта модель получила название обобщенная (generalized) ARCH, GARCH(p,q) – обобщенная авторегрессионная модель с условной гетероскедастичностью. В ней условная дисперсия подчиняется модели ADL(p,q) и зависит от предыдущих значений условной дисперсии и квадратов ошибок. Используя операторные полиномы, модель GARCH(p,q) может быть переписана в виде:

$$h_t = \mathrm{var}(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_p(L)\varepsilon_t^2 + \gamma_q(L)h_{t-1}.$$

Аналогично моделям типа ARMA можно перейти от модели GARCH(p,q) к ARCH-модели с бесконечным числом лагов:

$$h_t = \mathrm{var}(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-\gamma_q(L)} + \frac{\alpha_p(L)}{1-\gamma_q(L)}\varepsilon_t^2.$$

Такой переход возможен, если корни характеристического полинома $1-\gamma_q(L)$ лежат вне единичного круга (в данном случае удобней использовать характеристическое уравнение в такой форме). Если у полиномов $\alpha_p(L),\gamma_q(L)$ кроме того нет общих корней, то положительность дисперсии будет гарантирована, если все коэффициенты полинома бесконечной степени $\dfrac{\alpha_p(L)}{1-\gamma_q(L)}$ неотрицательны. Необходимые и достаточные условия этого были получены Нельсоном и Као [19]. Для процесса GARCH(1,1), заданного уравнением $h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 h_{t-1}$ и весьма популярного в настоящее время при моделировании финансовых рядов, эти условия означают неотрицательность всех трех параметров.

Установить свойства моментов процесса GARCH(p,q) и ограничения на коэффициенты модели, при которых процесс GARCH(p,q) стационарен, значительно сложнее, чем для ARCH-процессов. Общие условия стационарности для процесса GARCH(p,q) в терминах лаговых операторов были выведены Бужеролем и Пикаром [2]. Для процесса GARCH(1,1), заданного уравнением $h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 h_{t-1}$, Нельсон [18] показал, что как u_t, так и h_t будут строго стационарны тогда и только тогда, когда $E(\ln(\beta_1 + \alpha_1 \dfrac{u_t^2}{h_t})) < 0$.

Для оценивания процессов GARCH(p,q) применяется метод максимального правдоподобия в предположении о гауссовости сильного белого шума ε_t. При увеличении порядка процесса GARCH трудности оценивания параметров быстро нарастают, так что широкое применение нашел, пожалуй, только процесс GARCH(1,1).

Было предложено много модификаций моделей GARCH, подробное рассмотрение которых выходит за рамки нашего курса. Следуя Миллсу [15], рассмотрим на примере модели GARCH(1,1) лишь основные идеи, положенные в основу таких модификаций.

Одна из наиболее ранних модификаций была предложена Тейлором [23] и развита Свертом [20]. В этой модели та же схема зависимости, что и в GARCH(1,1) применена к условному стандартному отклонению процесса, а не к условной дисперсии. Эта модель имеет вид $\sigma_t = \sqrt{h_t} = \alpha_0 + \alpha_1 |u_{t-1}| + \gamma_1 \sigma_{t-1}$. В ней усредненная условная дисперсия получается возведением в квадрат усредненного среднеквадратичного отклонения, а не усреднением квадрата отклонения. Благодаря неравенству Йенсена и выпуклости вниз квадратичной функции влияние больших отклонений в такой модели будет оказывать меньшее влияние, чем в модели GARCH.

При анализе многих финансовых проблем была замечена асимметрия реакции на отклонения, например инфляция «охотнее» увеличивается, чем уменьшается. На финансовых рынках волатильность более быстро реагирует на падение рынка, чем на его рост. В 1991 г. Нельсон [17] предложил модель, получившую название экспоненциальная (exponential) GARCH (EGARCH) для отражения такой асимметрии. Модель имеет вид: $\ln h_t = \alpha_0 + \alpha_1 f\left(\frac{u_{t-1}}{\sqrt{h_t}}\right) + \gamma_1 \ln h_{t-1}$, где

$$f\left(\frac{u_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}}\right) = \theta_1 \frac{u_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + \left(\left|\frac{u_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}}\right| - E\left(\left|\frac{u_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}}\right|\right)\right).$$

Функция $f(.)$ отражает реакцию на «новости» и связана с коррекцией текущего уровня волатильности $\ln h_t$ уровнем отклонения u_{t-1}. Очевидно, что реакция асимметрична. При выполнении условия $u_{t-1} > 0$ получаем $\frac{\partial f}{\partial u_{t-1}} = \theta_1 + 1$, а при $u_{t-1} < 0$ получаем $\frac{\partial f}{\partial u_{t-1}} = \theta_1 - 1$. Можно показать, что $f(u_{t-1})$ является сильным белым шумом с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией. Следовательно, процесс $\ln h_t$ подчиняется модели ARMA(1,1) и будет стационарным при выполнении условия $\gamma_1 < 1$.

Модели GARCH(1,1), EGARCH и модель Шверта могут быть представлены как частные случаи единой модели, предложенной Хиггинсом и Бера [8]. Эта общая модель носит название NARCH (Non-linear ARCH) и может быть представлена в следующем виде: $\sigma_t^\beta = \left(\sqrt{h_t}\right)^\beta = \alpha_0 + \alpha_1 f^\beta(u_{t-1}) + \gamma_1 \sigma_{t-1}^\beta$. Еще одним обобщением является пороговый ARCH-процесс: $\sigma_t^\beta = \left(\sqrt{h_t}\right)^\beta = \alpha_0 + \alpha_1 g^{(\beta)}(u_{t-1}) + \gamma_1 \sigma_{t-1}^\beta$, где $g^{(\beta)}(u_{t-1}) = \theta I(u_{t-1} > 0)|u_{t-1}|^\beta + \theta I(u_{t-1} \le 0)|u_{t-1}|^\beta$. Здесь через $I(.)$ обозначена функция-индикатор, равная 1 при выполнении условия, указанного в скобках, и равная нулю – в остальных случаях. При $\beta = 1$ получаем TARCH-модель (Threshold ARCH) [25], а при $\beta = 2$ получаем модель GJR, предложенную Глостеном, Джаганнатаном и Ранклем [5]. Количество модификаций модели GARCH к настоящему времени весьма велико, более полный обзор их можно найти в ранее цитированной монографии Т. Миллса [15].

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bollerslev T*. Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastisity // Journal of Econometrics. 1986. Vol. 31. P. 307–327.
2. *Bougerol P., Picard N*. Stationarity of GARCH Processes and of Some Nonnegative Time Series // Journal of Econometrics. 1992. Vol. 52. P. 115–128.
3. *Engle R.F*. Autoregressive Conditional Heteroskedastisity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation // Econometrica. 1982. Vol. 50. P. 987–1007.
4. *Engle R.F., Granger C.W.J*. Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing // Econometrica. 1987. Vol. 55. № 2. P. 251–276.
5. *Glosten L.R., Jagannathan R., Runkle D*. Relationship Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks // Journal of Finance. 1993. Vol. 48. P. 1779–1801.
6. *Granger C.W.J*. Some Properties of Time Series Data and Their Use in Econometric Model Specification // Journal of Econometrics. 1981. Vol. 16. № 1. P. 121–130.
7. *Hamilton J.D*. Time Series Analysis. Princeton University Press. 1994. P. 296.
8. *Higgins M.L., Bera A.K*. A Joint Test for ARCH and Bilinearity in the Regression Model // Econometrics Reviews. Vol. 7. P. 171–181.
9. *Johansen J*. Estimation and Hypothesis Testing of Cointegrating Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models // Econometrica. 1991. Vol. 59. P. 1551–1580.
10. *Johansen J*. Likelihood-based Inference in Cointegrating Vector Autoregressive Models. Oxford: Oxford University Press, 1995.
11. *Johansen J*. Statistical Ananlysis of Cointegrating Vectors // Journal of Economic Dynamics and Control. 1998. Vol. 12. P. 231–254.
12. *Johansen J., Juselius K*. Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration – With Application to the Demand for Money // Oxford Bulletin of Economics and Statistics. 1992. Vol. 54. P. 461–471.
13. *Johnston J., DiNardo J*. Econometric Methods. Fourth Edition. The McGrow-Hill Componies. Inc., 1997. P. 320.
14. *MacKinnon J.G*. Critical Values for Cointegration Tests, Chapter 13 // Long-Run Economic Relationships / R.F. Engle, C.W.J. Granger (eds.) Oxford University Press, 1991.
15. *Mills T*. The Econometric Modelling of Financial Time Series. Second Edition. Cambridge University Press, 1999.
16. *Nelson C.R., Plosser C.I*. Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implications // Journal of Monetary Economics. 1982. Vol. 10. P. 139–162.
17. *Nelson D.B*. Conditional Heteroskedastsity in Asset Returns // Econometrica. Vol. 59. P. 347–370.
18. *Nelson D.B*. Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model // Econometric Theory. 1990. Vol. 6. P. 318–34.
19. *Nelson D.B., Cao C.Q*. Inequality Constraints in Univariate GARCH Models // Journal of Business and Economic Statistics. 1992. Vol. 10. P. 229–235.
20. *Schwert G.W*. Why does Stock Market Volatility Change Over Time? // Journal of Finance. 1989. Vol. 44. P. 1115–1153.
21. *Sims C.A., Stock J.H., Watson M.W*. Inference in Linear Time Series Models with Some Unit Roots // Econometrica. 1990. Vol. 58. P. 113–144.
22. *Stock J. H*. Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegrating Vectors // Econometrica. 1987. Vol. 55. P. 1035–1056.
23. *Teylor S.J*. Modelling Financial Time Series. New York: Wiley, 1986.
24. *Watson M.W*. Vector Avtoregression and Cointegration // Handbook of Econometrics. 1994. Vol. 4. Amsterdam: North-Holland. P. 2844–2915.
25. *Zakoian J.M*. Threshold Heteroskedastic Models //Journal of Economic Dynamics and Control, 1994. Vol. 18. P. 931–955.