Динамическая модель общего равновесия при наличии рынка акций

Андрияшин А.В., Поспелов И.Г., Фомченко Д.С.

Статья посвящена исследованию модели межвременного равновесия. Цель работы – изучение вопроса о принципиальной возможности использования модели межвременного равновесия для описания переходных процессов в экономике. Рассмотрена модель экономики, в которой действуют два агента: фирма-производитель и собственник-потребитель, которые агрегированно представляют производственную и непроизводственную сферы экономики. Получено полное решение задачи при любых начальных условиях. Исследована эффективность равновесия и приведены примеры переходных процессов, получающихся при различных соотношениях горизонта планирования фирмы и собственника.

Введение

Основой большинства подходов к описанию рыночной экономики служит понятие *экономического равновесия*. В статических моделях формализация понятия равновесия не вызывает особых затруднений, но когда мы переходим к экономической динамике, формальное описание равновесия вызывает хорошо известные трудности. Трудности эти проистекают из того, что в динамической экономической системе спрос и предложение рациональных субъектов оказываются зависящими не только от текущих значений информационных переменных (цен, процентов, курсов), но и от значений этих показателей, ожидаемых в будущем. Среди различных описаний динамического равновесия [7] выделяется своей полной самосогласованностью модель *межвременного равновесия*. Эта модель предполагает, что экономические агенты в процессе взаимодействия согласуют не только текущие, но и все будущие значения информационных переменных – цен, курсов, процентов и т. п.

Детерминированная модель межвременного равновесия строится по следующей схеме:

- Выделяется некоторый набор экономических агентов, каждый из которых определяет текущие и будущие спрос и предложение на материальные блага и фи-

Андрияшин А.В. – студент II курса магистратуры ГУ ВШЭ.
Поспелов И.Г. – д. ф.-м. н., профессор, заведующий сектором математического моделирования экономических структур ВЦ РАН, профессор кафедры математической экономики и эконометрики ГУ ВШЭ.
Фомченко Д.С. – студент II курса магистратуры ГУ ВШЭ.

Статья поступила в Редакцию в июне 2003 г.

нансовые инструменты так, чтобы максимизировать свой функционал полезности при присущих агенту технологических и институциональных ограничениях и при известных текущих и будущих значениях информационных переменных, заданных как произвольные функции времени.

• Фактическое производство и распределение благ, а также фактические значения информационных переменных определяются из условия равенства спроса и предложения в текущий и все будущие моменты времени.

Таким образом, для исследования модели межвременного равновесия требуется решить несколько задач оптимального управления с неопределенными переменными параметрами (информационными переменными), а потом найти эти информационные переменные из условий равновесия для решений указанных оптимизационных задач.

Подобного рода модели систематически применялись для изучения различных макроэкономических явлений, например [6] и [8]. Однако поиск межвременного равновесия – трудная с математической точки зрения задача, и примеров исследованных до конца моделей межвременного равновесия известно немного, например в [6] и [8] рассматриваются только стационарные равновесия. Поскольку мы планируем в дальнейшем использовать подобные модели для описания переходных процессов, здесь находим полное решение задачи, пусть и на очень упрощенной модели.

В данной работе исследуется межвременное равновесие в однопродуктовой модели экономики, состоящей из двух агрегированных агентов: *потребителя-собственника* и *фирмы-производителя*. Особенность модели в том, что в ней изучается равновесие не только на рынке товаров, но и на фондовом рынке. Ради того, чтобы исследовать модель до конца, мы не рассматриваем рынок ресурсов, т.е. игнорируем необходимость использовать в производстве труд и природные ресурсы.

1. Постановка задачи о межвременном равновесии

1.1. Описание функционирования экономики

Рассматривается замкнутая рыночная экономика без участия государства, в которой производится *единственный однородный продукт*, который в равной мере может быть использован на потребление и накопление. Единственным фактором производства служат капитальные затраты того же самого продукта. Для простоты производственная функция считается линейной, а капитальные затраты – обратимыми. Функционирование экономики описывается в непрерывном времени[1]), причем временное равновесие рассматривается на *конечном*, но достаточно большом периоде времени $[0,T]$.

В описанных предположениях основной макроэкономический баланс приобретает вид:

$$Y(t) = C(t) + b\frac{\partial}{\partial t}Y(t), \tag{1.1}$$

[1]) Мы принимаем непрерывное описание потому, что решать оптимизационные задачи аналитически в непрерывном времени существенно легче, чем в дискретном.

где $Y(t)$ – чистый выпуск (реальный), $C(t)$ – реальное потребление, $b\frac{\partial}{\partial t}Y(t)$ – капитальные затраты, пропорциональные приросту выпуска $\frac{\partial}{\partial t}Y(t)$ с постоянным коэффициентом *приростной фондоемкости*[2] – b.

Обратимость капиталовложений означает, что мы допускаем отрицательные значения $\frac{\partial}{\partial t}Y(t)$, т.е. считаем, что производственные мощности, созданные за счет капитальных затрат, могут быть мгновенно и без потерь превращены обратно в продукт, из которого были созданы.

Объем производства потребления и накопления определяется двумя агентами: *потребителем-собственником* и *фирмой-производителем*. Агенты взаимодействуют на двух рынках: *товарном рынке*, на котором произведенный фирмой продукт делится на потребление и накопление, и *фондовом рынке,* где определяются сбережения и инвестиции и доходы потребителя.

Производство и капитальные затраты осуществляет *фирма*. Фирма располагает неотрицательным запасом денег $W(t)$ и имеет обязательства перед собственниками – акции – в объеме $A(t)$, по которым она выплачивает дивиденды в сумме $Z(t)$ в единицу времени. Средства на инвестиции и выплату дивидендов приносит продажа произведенного продукта $Y(t)$ по цене $p(t)$ на товарном рынке, а также продажа выпущенных акций $\frac{\partial}{\partial t}A(t)$ на фондовом рынке по курсу $s(t)$. В результате запас денег фирмы изменяется со временем в соответствии с уравнением финансового баланса (cash flow):

$$\frac{\partial}{\partial t}W(t) = p(t)Y(t) - Z(t) + s(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}A(t)\right) - p(t)b\left(\frac{\partial}{\partial t}Y(t)\right). \qquad (1.2)$$

Собственник-потребитель, который в модели представляет всю совокупность домашних хозяйств в экономике, располагает неотрицательными запасами денег $M(t)$ и акций $S(t)$. Каждая акция приносит в единицу времени доход $r(t)$. На полученные доходы собственник приобретает на товарном рынке потребительский продукт $C(t)$ по цене $p(t)$, а на фондовом рынке – новые акции $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{S}(t)$ по курсу $s(t)$.

[2] Фактически $Y(t)$ – это производственная мощность, т.е. *запас* основных производственных фондов, измеренный максимальным выпуском продукции в единицу времени, который эти фонды могут обеспечить. По смыслу это – запас (фазовая переменная), но по размерности – это поток. Именно поэтому в модели появляется пересчетный коэффициент приростной фондоемкости b, имеющий размерность времени и смысл характерного срока строительства.

Поэтому изменение запаса денег у собственника описывается уравнением финансового баланса

(1.3) $$\frac{\partial}{\partial t}M(t)=r(t)S(t)-s(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}S(t)\right)-p(t)C(t).$$

Поскольку, кроме собственника, других держателей акций в рассматриваемой экономике нет, собственник должен скупить все выпущенные фирмой акции, т.е.

(1.4) $$S(t)=A(t),$$

а все выплаченные фирмой дивиденды должны быть распределены по этим акциям

(1.5) $$r(t)S(t)=Z(t).$$

Легко видеть, что из финансовых балансов (1.2), (1.3) в силу (1.1), (1.4), (1.5) следует тождество (закон Вальраса):

(1.6) $$\left(\frac{\partial}{\partial t}M(t)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial t}W(t)\right)=0,$$

которое означает, что суммарный запас денег у агентов не меняется.

Запасы денег агентам в модели, по существу, не нужны (деньги вполне ликвидны). Поэтому естественно считать начальные запасы $M(0)$ и $W(0)$ равными 0. Тогда из тождества (1.6) и требования неотрицательности $M(t)$ и $W(t)$ получится, что

(1.7) $$M(t)=0,\quad W(t)=0 \quad \text{при всех} \quad t\in[0,T].$$

Тем не менее при анализе задач межвременного равновесия, в которых агенты планируют свои запасы независимо друг от друга, удобнее использовать балансы в общей форме (1.2), (1.3), а соотношение (1.7) рассматривать как одно из условий согласования планов агентов.

1.2. Описание поведения фирмы

Предполагается, что фирма действует в интересах акционеров, стремясь максимизировать полезность их *будущих реальных доходов* $R(t)$.

(1.8) $$\int_0^T V\left(R(t)\right)e^{-\Delta t}dt\to\max$$

где Δ − предпочтение времени, а

(1.9) $$R(t)=\frac{Z(t)}{p(t)}.$$

В качестве функции полезности $V(\cdot)$ рассматриваем функцию с постоянным относительным отвращением к риску (CRRA):

$$V(R)=\frac{R^{1-\text{B}}}{1-\text{B}}\text{, при } \text{B}\neq 1; \quad V(R)=\ln R \text{ при } \text{B}=1; \tag{1.10}$$

где $\text{B}>0$ − относительное отвращением к риску по Эрроу − Пратту.

Функционал ожидаемой полезности (1.8) обычно вводится аксиоматически, как выражение субъективных интересов агента [5]. Однако фирма все же не вполне самостоятельный агент. Цель ей в той или иной степени ставят собственники. Поэтому одним из вопросов, который исследуется в данной работе, является вопрос о том, как зависит результирующее равновесие от параметров функционала фирмы Δ и B.

Величины

$$A(t)\geq 0\,,\; W(t)\geq 0\,,\; Y(t)\geq 0\,,\; Z(t)\geq 0 \tag{1.11}$$

при *заданных начальных значениях*

$$W(0)=0\,,\; A(0)\geq 0\,,\; Y(0)\geq 0\,,$$

фирма может планировать по своему усмотрению в рамках баланса (1.2) на интервале $[0,T]$. В частности, мы не накладываем ограничений на целевое использование средств от продажи акций и, таким образом, не исключаем возможности организации «пирамиды»: выплаты дивидендов по старым акциям за счет продажи новых. Кроме того, допускается скупка фирмой собственных акций $\left(\frac{\partial}{\partial t}A(t)<0\right)$.

Величины цены $p(t)$ и курса акций $s(t)$ представляют собой прогнозы и при решении задачи фирмы считаются *заданными*.

Что происходит после момента T нас не интересует, поскольку мы в конечном итоге будем рассматривать равновесие при $T\to\infty$. Однако будем требовать, чтобы фазовые переменные в конце процесса удовлетворяли линейному терминальному ограничению:

$$W(T)+a_A A(T)+a_Y Y(T)\geq 0\,. \tag{1.12}$$

Как мы увидим ниже, коэффициенты a_A, a_Y в этом ограничении однозначно определяются требованием разрешимости задачи, а само это ограничение приобретает смысл неотрицательности собственных средств фирмы. Если же совсем не накладывать терминальных ограничений, задача фирмы не будет иметь решений с «хорошими» двойственными переменными.

Итак, задача фирмы − это задача оптимального управления (1.8) при ограничениях (1.9), (1.2), (1.11), (1.12). Ее решение задает:

- предложение продукта $Y(t)$ и спрос на фондообразующий продукт $b\frac{\partial}{\partial t}Y(t)$ на товарном рынке;

- предложение акций $A(t)$ на фондовом рынке;
- план выплаты дивидендов $Z(t)$;
- спрос фирмы на деньги $W(t)$

в каждый момент времени $t \in [0,T]$ в зависимости от прогноза цены $p(t)$ и курса акций $s(t)$ на весь период $[0,T]$.

1.3. Описание поведения собственника

Предполагается, что собственник ведет себя рационально. Он стремится максимизировать полезность своего *будущего реального потребления* $C(t)$.

(1.13)
$$\int_0^T U\left(C(t)\right)e^{-\delta t}dt \to \max ,$$
$$U(C) = \frac{C^{1-\beta}}{1-\beta} \quad \text{при} \quad \beta \neq 1 \qquad U(C) = \ln C \ \text{ при } \ \beta = 1 ,$$

где δ – предпочтение времени, а β – отвращение к риску собственника.

Собственник решает задачу (1.13) за счет выбора величин

(1.14) $$M(t) \geq 0 , \quad S(t) \geq 0 , \quad C(t) \geq 0$$

в рамках баланса (1.3) при заданных начальных условиях

(1.15) $$M(0) = 0 , \quad S(0) \geq 0$$

и заданных прогнозах цены $p(t)$, доходности $r(t)$ и курса акций $s(t)$.

Как и в задачу фирмы в задачу собственника мы включаем линейное терминальное условие общего вида:

(1.16) $$M(T) + a_S S(T) \geq 0 .$$

Задача собственника – это, по сути, стандартная задача выбора оптимального разделения дохода на потребление и накопление [3, 5]. Именно это – задача оптимального управления (1.13) при ограничениях (1.14), (1.3), (1.16). Ее решение задает:

- спрос на потребительский продукт $C(t)$ на товарном рынке;
- спрос на акции $S(t)$ на фондовом рынке;
- спрос собственника на деньги $M(t)$

в каждый момент времени $t \in [0,T]$ в зависимости от прогноза цены $p(t)$, доходности $r(t)$ и курса акций $s(t)$ на весь период $[0,T]$.

1.4. Условия равновесия

Главное предположение модели межвременного равновесия состоит в том, что прогнозы и планы агентов оправдываются. Это означает, во-первых, что цену и курс агенты прогнозируют *одинаково*. Это предположение мы уже использовали выше неявно, когда одинаково обозначали цену и курс в задачах фирмы и собственника. Во-вторых, оправдание планов означает, что планы агентов удовлетворяют соотношениям балансов (1.1), (1.4), (1.5).

Содержательно эти балансы описывают результаты взаимодействия агентов в рамках определенных институтов.

Баланс (1.1) означает выравнивание предложения продукта фирмой $Y(t)$ и спроса на потребительский продукт со стороны собственника $C(t)$, а также спроса на фондообразующий продукт $b\left(\frac{\partial}{\partial t}Y(t)\right)$ со стороны фирмы в процессе обмена продукта на деньги на товарном рынке. Аналогично баланс (1.4) описывает результат выравнивания спроса собственника на акции $S(t)$ и предложения акций фирмой $A(t)$ в процессе обмена акций на деньги на фондовом рынке.

Особо следует остановиться на балансе (1.5). Он тоже описывает результат взаимодействия агентов, но уже не обмена, а *передачи доходов по праву собственности*. Если бы собственник у фирмы был фактически один, то естественнее было бы предполагать, что он знает не доходность $r(t)$, а сам поток дивидендов $Z(t)$. Для таких условий информированности собственника тоже можно построить модель равновесия, но результат будет иной, нежели тот, что излагается ниже. Таким образом, несмотря на предельную агрегированность рассматриваемой модели, записывая соотношение (1.5), мы все же учитываем фактическую множественность собственников и возможность торговать правами собственности.

1.5. Регулярное межвременное равновесие

С формальной точки зрения решение задачи равновесия состоит в определении траекторий *информационных переменных*: цены $p(t)$, доходности $r(t)$ и курса акций $s(t)$ таких, что

- задачи оптимального управления фирмы и собственника разрешимы (возможно неоднозначно);
- из множества оптимальных траекторий $A(t)$, $W(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, $M(t)$, $S(t)$, $C(t)$ этих задач можно выбрать траектории, удовлетворяющие условиям равновесия (1.1), (1.4), (1.5).

Формально балансы (1.1), (1.4), (1.5) дают три уравнения на три неизвестных $p(t)$, $r(t)$, $s(t)$, но, как обычно бывает в задачах равновесия, эти уравнения зависимы (см. тождество (1.6)), поэтому информационные переменные в равновесии определятся неоднозначно. Насколько именно − увидим ниже, а сейчас обратимся к требованию разрешимости задач агентов.

Несмотря на внешнюю простоту формулировок, задачи агентов относятся к классу весьма сложных задач оптимального управления. Если исключить величину $Z(t)$ с помощью равенства (1.9), то обе задачи можно записать в единой форме:

$$\int_{0}^{T} f(P(t))e^{-\chi t}dt \to \max \quad \text{по } Q(t), \mathbf{X}(t), P(t), \mathbf{Y}(t) \tag{1.17}$$

при заданных начальных условиях $\mathbf{X}(0) \geq 0, Q(0) = 0$ и ограничениях

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(t) = \mathbf{r}(t)\mathbf{X}(t) - \mathbf{s}(t)\mathbf{Y}(t) - p(t)P(t); \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y}(t);$$

$$Q(t) \geq 0, \quad \mathbf{X}(t) \geq 0, \quad P(t) \geq 0; \tag{1.19}$$

$$Q(T) + \mathbf{aX}(T) \geq 0; \tag{1.20}$$

где $Q(t)$ – запас денег, $\mathbf{X}(t)$ – *вектор* прочих запасов, $P(t)$ – «полезное потребление», $\mathbf{Y}(t)$ – *вектор* прочих потоков, $\mathbf{r}(t)$ – *вектор* «доходностей», $\mathbf{s}(t)$ – *вектор* «курсов», $p(t)$ – цена продукта, а в более общем плане, дефлятор «полезных расходов» – потребительских расходов для собственника и дивидендов для фирмы, $\mathbf{a}$ – вектор коэффициентов терминального условия, χ – предпочтение времени, а $f(\cdot)$ – функция полезности типа CRRA. Расшифровку этих обозначений для фирмы и собственника см. в опр. 2.

Решение задачи (1.17) – (1.20) будем искать в классе кусочно-непрерывных функций $P(t) \geq 0$, $\mathbf{Y}(t)$ и соответственно кусочно-дифференцируемых функций $Q(t)$, $\mathbf{X}(t)$.

Задача (1.17) – (1.20) – это неавтономная задача оптимального управления с фазовыми ограничениями. Для такой задачи нелегко даже просто выписать полную систему необходимых условий оптимальности [1].

Однако любая система условий оптимальности для задачи с ограничениями обычно включает требование максимизации *функционала Лагранжа:*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{\psi\,\tilde{\varphi},\xi,\tilde{\rho},\Phi}\left[Q(t),\mathbf{X}(t),P(t),\mathbf{Y}(t)\right] = \int_0^T \psi(t)\left(\mathbf{Y}(t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{X}(t)\right)dt + \\
&+\int_0^T \left(f(P(t))e^{-\chi t} + \xi(t)\left(\mathbf{r}(t)\mathbf{X}(t) - \mathbf{s}(t)\mathbf{Y}(t) - p(t)P(t) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t)\right)\right)dt + \\
&+\int_0^T \left(\tilde{\varphi}(t)\mathbf{X}(t) + \tilde{\rho}(t)Q(t)\right)dt + \tilde{\Phi}\left(Q(T) + \mathbf{aX}(T)\right) \to \max_{Q(\cdot),\mathbf{X}(\cdot),\mathbf{Y}(\cdot),P(\cdot)\geq 0}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

без ограничений, при некоторых значениях *двойственных переменных* $\boldsymbol{\psi}(t), \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t), \xi(t), \tilde{\rho}(t), \tilde{\Phi}$, которые надо выбрать так, чтобы в точке максимума функционала Лагранжа выполнялись *условия дополняющей нежесткости*[3].

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{r}(t)\mathbf{X}(t)-\mathbf{s}(t)\mathbf{Y}(t)-p(t)P(t)-\frac{\partial}{\partial t}Q(t)=0;\\
&\mathbf{Y}(t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{X}(t)=0;\\
&\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)\mathbf{X}(t)=0, \quad \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)\geq 0, \quad \mathbf{X}(t)\geq 0;\\
&\tilde{\rho}(t)Q(t)=0, \quad \tilde{\rho}(t)\geq 0, \quad \mathrm{Q}(t)\geq 0;\\
&\tilde{\Phi}\left(Q(T)+\mathbf{aX}(T)\right)=0, \ \tilde{\Phi}\geq 0, \ Q(T)+\mathbf{aX}(T)\geq 0.
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

С другой стороны, выполнение условий (1.21), (1.22) всегда *достаточно* для оптимальности траектории. На этот простой факт редко обращают внимание, поэтому ниже приведем его доказательство (см. утв. 1).

Вся проблема состоит в том, в каком классе объектов следует искать двойственные переменные. Если мы хотим решить задачу (1.17) − (1.20) для произвольных (интегрируемых) функций $p(t)$, $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{s}(t)$, то в качестве двойственных переменных $\tilde{\rho}(t), \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ придется рассматривать обобщенные функции (плотности неотрицательных мер общего вида, [1]), т.е. объекты чрезвычайно сложные для анализа.

Нам, однако, в конечном счете нужны решения задач (1.17) − (1.20) не при произвольных, а при равновесных, т.е. естественно согласованных с задачами агентов функциях $p(t)$, $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{s}(t)$. Опыт изучения задач оптимизации, связанных с экономической проблематикой, показывает, что в равновесии двойственные переменные обычно имеют самостоятельный содержательный смысл денежных оценок факторов производства или платы за возможность нарушать ограничения. Эти величины, как и цены, должны меняться со временем достаточно регулярно.

В связи с этим мы предлагаем с самого начала искать только такие решения задач агентов, которым соответствуют достаточно регулярные двойственные переменные, а именно обычные функции, достаточно гладкие для того, чтобы в функционале Лагранжа можно было выполнить интегрирование по частям. Точнее это выражается следующими определениями.

Определение 1. *Регулярным решением* задачи агента называется набор *прямых* $\langle Q(t), \mathbf{X}(t), P(t), \mathbf{Y}(t)\rangle$ и *двойственных* $\langle \xi(t), \tilde{\rho}(t), \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \tilde{\Phi}\rangle$ переменных такой, что

1) функции $Q(t), \mathbf{X}(t), P(t), \mathbf{Y}(t)$ доставляют максимум функционалу Лагранжа по множеству всех кусочно-дифференцируемых функций $Q(t)$, $\mathbf{X}(t)$, удовлетворяющих заданным начальным условиям, и множеству кусочно-непрерывных функций $P(t)\geq 0, \mathbf{Y}(t)$;

[3] Мы не «снимаем» множителем Лагранжа ограничение $P(t)\geq 0$, потому что, как мы увидим ниже, оно в решении выполняется автоматически.

2) функции $\xi(t)$, $\boldsymbol{\psi}(t)$ абсолютно непрерывны, а функции $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$, $\tilde{\rho}(t)$ – измеримы;

3) почти всюду на $[0,T]$ выполнены условия дополняющей нежесткости.

Утверждение 1. Регулярное решение является решением задачи (1.17) – (1.20) и в обычном смысле.

Доказательство. В силу неравенств на прямые переменные, включенных в условия (1.22), набор прямых переменных $\langle Q(t), \mathbf{X}(t), P(t), \mathbf{Y}(t)\rangle$ из регулярного решения является *допустимым* для задачи (1.17) – (1.20), причем в силу тех же условий (1.22)

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\psi},\tilde{\boldsymbol{\varphi}},\xi,\tilde{\rho},\tilde{\Phi}}\left[Q(t), \mathbf{X}(t), P(t), \mathbf{Y}(t)\right] = \int_0^T f(P(t))e^{-\chi t}dt .$$

Пусть теперь $\left\langle \tilde{Q}(t), \tilde{\mathbf{X}}(t), \tilde{P}(t), \tilde{\mathbf{Y}}(t)\right\rangle$ – какой-нибудь другой набор функций, допустимый для задачи (1.17) – (1.20). Тогда в силу неотрицательности двойственных переменных $\tilde{\rho}(t)$, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$, $\tilde{\Phi}$

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\psi},\tilde{\boldsymbol{\varphi}},\xi,\tilde{\rho},\tilde{\Phi}}\left[\tilde{Q}(t), \tilde{\mathbf{X}}(t), \tilde{P}(t), \tilde{\mathbf{Y}}(t)\right] \ge \int_0^T f(\tilde{P}(t))e^{-\chi t}dt .$$

Но, поскольку функционал Лагранжа достигает максимума при $\langle Q(t), \mathbf{X}(t), P(t), \mathbf{Y}(t)\rangle$,

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\psi},\tilde{\boldsymbol{\varphi}},\xi,\tilde{\rho},\tilde{\Phi}}\left[Q(t), \mathbf{X}(t), P(t), \mathbf{Y}(t)\right] \ge \mathcal{L}_{\boldsymbol{\psi},\tilde{\boldsymbol{\varphi}},\xi,\tilde{\rho},\tilde{\Phi}}\left[\tilde{Q}(t), \tilde{\mathbf{X}}(t), \tilde{P}(t), \tilde{\mathbf{Y}}(t)\right].$$

Таким образом, $\int_0^T f(P(t))e^{-\chi t}dt \ge \int_0^T f(\tilde{P}(t))e^{-\chi t}dt$ для любого допустимого набора $\left\langle \tilde{Q}(t), \tilde{\mathbf{X}}(t), \tilde{P}(t), \tilde{\mathbf{Y}}(t)\right\rangle$, что и требовалось доказать.

Это утверждение собственно и означает, что, как говорилось выше, условия (1.21), (1.22) всегда достаточны для оптимальности – не требуется даже вогнутости задачи. В дальнейшем, рассматривая межвременные равновесия, мы будем требовать не просто разрешимости, а существования регулярных решений задач агентов. В связи с этим вводим следующее определение.

Определение 2. *Регулярным равновесием* называется набор *прямых* $\langle W(t), Y(t), A(t), Z(t), M(t), S(t), C(t)\rangle$, информационных $\langle p(t), s(t), r(t)\rangle$ и *двойственных* $\left\langle \xi_W(t), \tilde{\rho}_W(t), \tilde{\phi}_Y(t), \tilde{\phi}_A(t), \psi_Y(t), \psi_A(t), \tilde{\Phi}_W, \xi_M(t), \tilde{\rho}_M(t), \tilde{\phi}_S(t), \tilde{\phi}_S(t), \psi_S(t), \tilde{\Phi}_M\right\rangle$ переменных такой, что

1) функции $p(t)$, $s(t)$, $r(t)$ ограничены и интегрируемы на $[0,T]$;

2) наборы

$$Q(t)=W(t),\mathbf{X}(t)=\langle Y(t),A(t)\rangle,P(t)=\frac{Z(t)}{p(t)},\mathbf{Y}(t)=\left\langle \frac{\partial}{\partial t}Y(t),\frac{\partial}{\partial t}A(t)\right\rangle; \tag{1.23}$$

$$\xi(t)=\xi_W(t),\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)=\left\langle \tilde{\phi}_Y(t),\tilde{\phi}_A(t)\right\rangle,\tilde{\rho}(t)=\tilde{\rho}_W(t),\tilde{\Phi}=\tilde{\Phi}_W$$

при $\mathbf{r}(t)=\langle 0,p(t)\rangle$, $\mathbf{s}(t)=\langle -s(t),bp(t)\rangle$ образуют регулярное решение задачи фирмы (1.8);

3) наборы

$$Q(t)=M(t),\mathbf{X}(t)=\langle S(t)\rangle,P(t)=C(t)\,,\mathbf{Y}(t)=\left\langle \frac{\partial}{\partial t}S(t)\right\rangle; \tag{1.24}$$

$$\xi(t)=\xi_M(t),\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)=\left\langle \tilde{\phi}_S(t)\right\rangle,\tilde{\rho}(t)=\tilde{\rho}_M(t),\tilde{\Phi}=\tilde{\Phi}_M \tag{1.25}$$

при $\mathbf{r}(t)=\langle r(t)\rangle$, $\mathbf{s}(t)=\langle s(t)\rangle$ образуют регулярное решение задачи собственника (1.13);

4) почти всюду на $[0,T]$ выполняются условия равновесия (1.1), (1.4), (1.5).

Утв. 1 показывает, что, рассматривая регулярные равновесия, мы не выходим за рамки исходного интуитивного понимания межвременного равновесия. Однако, требуя регулярности, мы рискуем вовсе потерять решения, поэтому здесь следует проявлять определенную осторожность. В частности, как будет видно ниже, если исключить из задач агентов терминальные условия, эти задачи не будут иметь регулярных решений в равновесии.

Общее обсуждение и исследование регулярных равновесий и происхождения терминальных условий в задачах межвременного равновесия приводится в [4], однако задача, рассматриваемая здесь, несколько выходит за рамки этих обсуждений.

2. Решение задачи о межвременном равновесии

2.1. Необходимые и достаточные условия регулярной оптимальности

В условиях регулярного равновесия в функционале Лагранжа можно выполнить интегрирование по частям, в результате чего функционал примет вид:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{\psi,\tilde{\varphi},\xi,\tilde{\rho},\tilde{\Phi}}\left[Q(t),\mathbf{X}(t),P(t),\mathbf{Y}(t)\right]=\boldsymbol{\psi}(0)\mathbf{X}(0)+\xi(0)Q(0)+\\
&+\int_0^T\Big(f(P(t))e^{-\chi t}-\xi(t)p(t)P(t)\Big)dt+\int_0^T\left(\frac{\partial}{\partial t}\xi(t)+\tilde{\rho}(t)\right)Q(t)dt+\\
&+\int_0^T\left(\xi(t)\mathbf{r}(t)+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\psi}(t)+\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)\right)\mathbf{X}(t)dt+\int_0^T\big(\boldsymbol{\psi}(t)-\xi(t)\mathbf{s}(t)\big)\mathbf{Y}(t)dt+\\
&+Q(T)\big(\Phi-\xi(T)\big)+\big(\tilde{\Phi}\,\mathbf{a}-\boldsymbol{\psi}(T)\big)\mathbf{X}(T)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Ясно, что это выражение достигает максимума по кусочно-дифференцируемым функциям $\mathbf{X}(t)$, $Q(t)$ с заданными начальными условиями и по кусочно-непрерывным функциям $P(t) \geq 0$, $\mathbf{Y}(t)$ тогда и только тогда, когда почти всюду на $[0,T]$ обращаются в 0 производные по $Q(t), \mathbf{X}(t), P(t), \mathbf{Y}(t)$ подынтегрального выражения в (2.1), а также производные (2.1) по $Q(T), \mathbf{X}(T)$

(2.2) $$f'(P(t))e^{-\chi t} = \xi(t)p(t),$$

(2.3) $$\frac{\partial}{\partial t}\xi(t) + \tilde{\rho}(t) = 0,$$

(2.4) $$\xi(t)\mathbf{r}(t) + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\psi}(t) + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t) = 0,$$

(2.5) $$\boldsymbol{\psi}(t) = \xi(t)\mathbf{s}(t),$$

(2.6) $$\tilde{\Phi} = \xi(T),$$

(2.7) $$\tilde{\Phi}\mathbf{a} = \boldsymbol{\psi}(T).$$

Строгое доказательство этого факта содержится в [4].

Таким образом, для того чтобы наборы прямых $\langle Q(t), \mathbf{X}(t), P(t), \mathbf{Y}(t) \rangle$ и двойственных $\langle \xi(t), \tilde{\rho}(t), \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \tilde{\Phi} \rangle$ переменных образовывали регулярное решение задачи агента (1.17) – (1.20), *необходимо и достаточно*, чтобы почти всюду на $[0,T]$ выполнялись равенства (2.2) – (2.7) и условия дополняющей нежесткости (1.22).

Полученные условия можно существенно упростить.

Заметим, во-первых, что в силу неотрицательности двойственных переменных $\tilde{\rho}(t), \tilde{\Phi}$ из (2.3), (2.6) следует, что непрерывная функция $\xi(t)$ неотрицательна при всех $t \in [0,T]$.

Рассмотрим теперь условие (2.2). Поскольку функция $P(t)$ – кусочно-непрерывна, то она ограничена на $[0,T]$, а тогда в силу свойств функции полезности $f(\cdot)$ выполнено неравенство $P(t) > 0$, а левая часть уравнения (2.2) положительна и отделена от 0 на $[0,T]$. Значит $\xi(t)$ тоже отделена от 0 и в силу (2.6)

(2.8) $$\Phi > 0.$$

Из (2.8) в силу последнего условия в (1.22) следует, что терминальное условие в регулярном равновесии *выполняется как равенство*

(2.9) $$Q(T) + \mathbf{a}\mathbf{X}(T) = 0.$$

Поскольку функции $\xi(t)>0$ и $\boldsymbol{\psi}(t)$ – абсолютно непрерывны, из (2.5) следует, что информационные переменные $\mathbf{s}(t)$ в регулярном равновесии должны быть почти всюду равны абсолютно непрерывным функциям. Очевидно, что переопределение $\mathbf{s}(t)$ на множестве меры 0 не нарушает условий равновесия, можно считать, что сами функции $\mathbf{s}(t)$ в регулярном равновесии *абсолютно непрерывны*. Это означает, что абсолютно непрерывными должны быть траектории курса акций $s(t)$ и цены $p(t)$, из которых составлены вектор-функции $\mathbf{s}(t)$. Но тогда из (2.2) следует, что цена $p(t)$ положительна и отделена от 0 на $[0,T]$.

При абсолютно непрерывных $\mathbf{s}(t)$ равенство (2.5) выполняется для всех $t\in[0,T]$. При $t=T$ оно дает соотношение $\boldsymbol{\psi}(T)=\xi(T)\mathbf{s}(T)$, из которого в силу (2.6), (2.7), (2.8) вытекает, что задача агента имеет регулярное решение, *только если коэффициенты терминального условия согласованы с ценами*

$$\mathbf{a}=\mathbf{s}(T).$$

Этот результат избавляет нас от необходимости обсуждать вопрос о том, как агенты оценивают свои запасы в конце процесса. В рамках рассматриваемой модели они должны оценивать их просто по сложившимся к концу курсам.

Заметим, что если бы мы вовсе не ставили терминального ограничения, то получили бы условия оптимальности $\xi(T)=0$ и $\boldsymbol{\psi}(T)=0$, для обеспечения которых, как легко проверить, пришлось бы допустить в момент T неограниченные потоки: либо реальные $P(t)$, либо номинальные $p(t)P(t)$.

После того, как получены эти выводы, можно исключить из системы условий оптимальности двойственную переменную $\boldsymbol{\psi}(T)$, а также вспомогательную прямую переменную $\mathbf{Y}(t)$. Можно также исключить двойственные переменные $\xi(t)$ и $\tilde{\Phi}$. Для этого введем вместо $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t),\tilde{\rho}(t)$ нормированные величины (см. (2.3)):

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)}{\xi(t)},\qquad \rho(t)=\frac{\tilde{\rho}(t)}{\xi(t)}=-\frac{1}{\xi(t)}\frac{\partial}{\partial t}\xi(t).$$

Уравнение (2.4) в этих переменных после исключения $\boldsymbol{\psi}(T)$ примет вид $\mathbf{r}(t)-\rho(t)\mathbf{s}(t)+\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}(t)+\boldsymbol{\varphi}(t)=0$, а поскольку $\xi(t)>0$, в неравенствах в составе условий дополняющей нежесткости (1.22) $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t),\tilde{\rho}(t)$ можно просто заменить на $\boldsymbol{\varphi}(t),\rho(t)$. Наконец, поскольку правая часть (2.2) абсолютно непрерывна, функцию $P(t)$ тоже можно считать абсолютно непрерывной. Взяв от обеих частей уравнения (2.2) логарифмическую производную, получим:

$$-\frac{\nu}{P(t)}\frac{\partial}{\partial t}P(t)-\chi=-\rho(t)+\iota(t), \tag{2.10}$$

где $\nu = -\dfrac{f''(P(t))}{f'(P(t))}P(t) = const > 0$ – отвращение агента к риску ($\nu = \mathrm{B}$ для фирмы и $\nu = \beta$ для собственника), а $\iota(t) = \dfrac{1}{p(t)}\dfrac{\partial}{\partial t}p(t)$ – темп инфляции. Постоянная интегрирования в уравнении (2.10) в конечном счете определится из терминального условия (2.9), так что для решения задачи агента $\xi(t)$ и $\tilde{\Phi}$ определять не обязательно[4].

Итак, приходим к следующему утверждению.

Утверждение 2.

1) Если регулярное равновесие существует, то траектории цены $p(t)$ и курса акций $s(t)$ абсолютно непрерывны, причем

$$p(t) > 0 \qquad \text{при} \quad t \in [0, T].$$

2) Поведение агентов в регулярном равновесии описывается условиями:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(t) = \mathbf{r}(t)\mathbf{X}(t) - \mathbf{s}(t)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{X}(t) - p(t)P(t); \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t) = \frac{\left(\rho(t) - \iota(t) - \chi\right)}{\nu}P(t); \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \rho(t)\mathbf{s}(t) - \mathbf{r}(t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}(t); \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{X}(t) = 0, \quad \boldsymbol{\varphi}(t) \geq 0, \quad \mathbf{X}(t) \geq 0; \tag{2.14}$$

$$\rho(t)Q(t) = 0, \quad \rho(t) \geq 0, \quad Q(t) \geq 0; \tag{2.15}$$

$$Q(T) + \mathbf{s}(T)\mathbf{X}(T) = 0; \tag{2.16}$$

причем начальные значения $\mathbf{X}(0) \geq 0, Q(0) = 0$ заданы.

2.2. Интеграл собственного капитала

Уравнение финансового баланса (2.11) можно переписать следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial t}(Q(t) + \mathbf{s}(t)\mathbf{X}(t)) = \left(\mathbf{r}(t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}(t)\right)\mathbf{X}(t) - p(t)P(t). \tag{2.17}$$

На оптимальной траектории агента в силу условий (2.13), (2.14), (2.15)

---

[4] При желании, найдя все прямые переменные, $\xi(t)$ можно определить из (2.2), а затем $\tilde{\Phi}$ из (2.6). При этом неравенство $\tilde{\Phi} > 0$ и уравнение (2.3) выполнятся автоматически.

$$\left(\mathbf{r}(t)+\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}(t)\right)\mathbf{X}(t)=\rho(t)\mathbf{s}(t)\mathbf{X}(t)+\varphi(t)\mathbf{X}(t)$$
$$=\rho(t)\mathbf{s}(t)\mathbf{X}(t)+\rho(t)Q(t)+\varphi(t)\mathbf{X}(t)=\rho(t)\big(Q(t)+\mathbf{s}(t)\mathbf{X}(t)\big).$$

Таким образом, для величины

$$\Omega(t)=Q(t)+\mathbf{s}(t)\mathbf{X}(t) \tag{2.18}$$

из (2.17), (2.16) получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega(t)=\rho(t)\Omega(t)-p(t)P(t)\,,\qquad \Omega(T)=0\,. \tag{2.19}$$

С точки зрения теории оптимального управления величина $\Omega(t)$ представляет собой аналог *интеграла движения* гамильтоновой системы условий оптимальности. По теореме Нетер наиболее интересные интегралы движения связаны с симметрией задачи. Как показано в [4], интеграл $\Omega(t)$ имеет то же происхождение – он возникает вследствие того, что задача агента однородна относительно запасов $Q(t), \mathbf{X}(t)$.

С экономической точки зрения, как мы увидим ниже, и как в более общем случае показано в [4], величину $\Omega(t)$ можно интерпретировать как *собственный капитал* агента. Соотношение (2.18) представляет собой, по существу, отчетный баланс в остатках – оно выражает собственный капитал через денежные оценки запасов (активов и пассивов).

Соотношения (2.19) показывают, что на оптимальной траектории собственный капитал должен совпадать с приведенной суммой планируемых «полезных расходов» $p(t)P(t)$ (дивидендов для фирмы и потребительских расходов для собственника)

$$\Omega(t)=\int_t^T p(u)P(u)e^{-\int_t^u \rho(v)dv}du\,. \tag{2.20}$$

Можно сказать и по-другому. Как будет видно ниже, член $\rho(t)\Omega(t)$ соответствует *балансовой прибыли* агента – разнице доходов и затрат с учетом прибыли от переоценки запасов. Тогда двойственная переменная $\rho(t)$ выражает *доходность капитала* агента, а правая часть уравнения в (2.19) показывает, что капитал образуется из *нераспределенной прибыли.*

Наконец, заметим, что выражение (2.20) положительно при $t\neq T$. Известно, что отрицательность собственного капитала – это характерный признак «финансовой пирамиды». Таким образом, наложенные выше терминальные ограничения, следствием которых является выражение (2.20), фактически исполняют роль условия отсутствия пирамиды (no ponzi game condition), которое обычно накладывается в задачах финансового планирования. Кроме того, из (2.20), (2.18) вытекает следующее утверждение.

Утверждение 3. Регулярное равновесие существует, только если начальные условия для обоих агентов удовлетворяют неравенствам

$$\Omega(0) = Q(0) + \mathbf{s}(0)\mathbf{X}(0) = \mathbf{s}(0)\mathbf{X}(0) > 0 .$$

Надо, правда, помнить, что в этих неравенствах $\mathbf{X}(0) \geq 0$ заданы, а $\mathbf{s}(0)$ определяются из условий равновесия, причем некоторые компоненты этих векторов заведомо отрицательны (см. опр. 1).

2.3. Режимы, реализующиеся в регулярном равновесии

На этом мы заканчиваем общие обсуждения и переходим к построению регулярного равновесия (1.23) – (1.25). Условия дополняющей нежесткости (2.14), (2.15) описывают альтернативные *режимы* оптимального функционирования агентов. Оказывается, что в регулярном равновесии во все моменты времени может реализоваться только вполне определенный набор режимов.

Прежде всего, напомним, что если запасы денег в начале у агентов нулевые, то в равновесии они такими и останутся всегда (1.7). Поэтому в регулярном равновесии условие (2.15) сводится к условию:

$$Q(t) = 0,\ \rho(t) \geq 0 . \tag{2.21}$$

Как было показано выше, в равновесии $p(t) > 0$, $C(t) > 0$ так, что потребительские расходы собственника положительны. В отсутствии запаса денег, (1.7), положительные расходы требуют положительного запаса акций (см. (1.3)), а положительное потребление требует положительного выпуска (см. (1.1)) так, что в равновесии

$$S(t) = A(t) > 0 , \qquad Y(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T) .$$

В силу (1.23), (1.24) эти неравенства означают, что в равновесии условия дополняющей нежесткости (2.14) для обоих агентов реализуются как

$$\varphi(t) = 0, \quad \mathbf{X}(t) > 0 . \tag{2.22}$$

2.4. Решение задачи фирмы

Согласно утв. 2 решение задачи фирмы описывается системой (2.11) – (2.16), для наборов

$$Q(t) = W(t), \mathbf{X}(t) = \langle A(t), Y(t) \rangle, P(t) = \frac{Z(t)}{p(t)}, \mathbf{Y}(t) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} A(t), \frac{\partial}{\partial t} Y(t) \right\rangle ;$$

$$\varphi(t) = \langle \phi_A(t), \phi_Y(t) \rangle, \rho(t) = \rho_W(t) \ \text{при} \ \mathbf{r}(t) = \langle 0, p(t) \rangle ,$$

$$\mathbf{s}(t) = \langle -s(t), bp(t) \rangle .$$

С учетом (2.21), (2.22) эта система приобретает вид:

(2.23) $$p(t)Y(t)+s(t)\frac{\partial}{\partial t}A(t)-bp(t)\frac{\partial}{\partial t}Y(t)-Z(t)=0\ ;$$

(2.24) $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Z(t)}{p(t)}\right)=\frac{\left(\rho_W(t)-\iota(t)-\Delta\right)}{\mathrm{B}}\left(\frac{Z(t)}{p(t)}\right);$$

(2.25) $$-\rho_W(t)s(t)+\frac{\partial}{\partial t}s(t)=0\ ;$$

(2.26) $$\rho_W(t)bp(t)-p(t)-b\frac{\partial}{\partial t}p(t)=0\ ;$$

(2.27) $$-s(T)A(T)+bp(T)Y(T)=0\ .$$

Исключая из (2.25), (2.26) $\rho_W(t)$, получаем связь между информационными переменными: курсом акций $s(t)$ и ценой $p(t)$:

(2.28) $$s(t)=s(0)e^{\frac{t}{b}}e^{\left(\int_0^t \iota(u)du\right)},\quad \iota(t)=\frac{1}{p(t)}\frac{\partial}{\partial t}p(t)\,.$$

Таким образом, система (2.24) − (2.26) вырождена: при выполнении соотношения (2.28) она имеет много решений, а при его нарушении − ни одного. Неоднозначность оптимального поведения фирмы можно интерпретировать как бесконечную эластичность функции предложения акций $A(t)$. При нарушении связи (2.28) между $s(t)$ и $p(t)$ фирма либо не выпускает акции, либо стремится разместить их бесконечно много. При соблюдении связи (2.28) объем эмиссии акций фирме безразличен.

В силу зависимости системы (2.24) − (2.26) уравнение (2.23) удобно заменить вытекающим из (2.24) − (2.26) уравнением (2.19) для капитала фирмы:

(2.29) $$\Omega(t)=p(t)bY(t)-s(t)A(t)\,,$$

а терминальное условие (2.27) − условием $\Omega(T)=0$. Дифференциальные уравнения (2.19), (2.24) легко решаются и с учетом (2.26) дают выражения для $Z(t)$ и $\Omega(t)$:

(2.30) $$Z(t)=\frac{\Omega(0)\left(1-\mathrm{B}-\Delta b\right)e^{\left(\frac{(1-\Delta b)t}{\mathrm{B}b}\right)}e^{\left(\int_0^t \iota(u)du\right)}}{\mathrm{B}\left(e^{\left(\frac{(1-\mathrm{B}-\Delta b)T}{\mathrm{B}b}\right)}-1\right)b}\ ;$$

$$\Omega(t)=\Omega(0)e^{\frac{t}{b}}e^{\left(\int_0^t \iota(u)du\right)}\left(1-\frac{e^{\left(\frac{(1-\mathrm{B}-\Delta b)t}{\mathrm{B}b}\right)}-1}{e^{\left(\frac{(1-\mathrm{B}-\Delta b)T}{\mathrm{B}b}\right)}-1}\right). \quad (2.31)$$

Из выражений для капитала (2.31), (2.29), с учетом (2.28), получаем связь между предложением акций $A(t)$ и предложением продукта $Y(t)$:

$$\Omega(0)e^{\frac{t}{b}}\left(1-\frac{e^{\left(\frac{(1-\mathrm{B}-\Delta b)t}{\mathrm{B}b}\right)}-1}{e^{\left(\frac{(1-\mathrm{B}-\Delta b)T}{\mathrm{B}b}\right)}-1}\right)=-s(0)e^{\frac{t}{b}}A(t)+bp(0)Y(t). \quad (2.32)$$

По отдельности величины $A(t)$ и $Y(t)$ из решения задачи фирмы не определяются, но зато требование разрешимости задачи фирмы фиксирует связь (2.28) между ценой продукта и курсом акций.

Из условий оптимальности поведения фирмы вытекает еще одно условие на равновесную траекторию цены. Поскольку $\rho_W(t)\geq 0$, из (2.26) следует неравенство

$$\iota(t)=\frac{1}{p(t)}\frac{\partial}{\partial t}p(t)>-\frac{1}{b}, \quad (2.33)$$

которое означает, что на равновесной траектории не может быть слишком сильной дефляции.

2.5. Решение задачи собственника

Согласно утв. 2 решение задачи собственника описывается системой (2.11) – (2.16):

$$Q(t)=M(t), \mathbf{X}(t)=\langle S(t)\rangle, P(t)=C(t), \mathbf{Y}(t)=\left\langle \frac{\partial}{\partial t}S(t)\right\rangle;$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\langle\tilde{\phi}_S(t)\rangle, \rho(t)=\rho_M(t) \text{ при } \mathbf{r}(t)=\langle r(t)\rangle,\ \mathbf{s}(t)=\langle s(t)\rangle.$$

С учетом (2.21), (2.22) эта система приобретает вид:

$$r(t)S(t)-s(t)\frac{\partial}{\partial t}S(t)-p(t)C(t)=0 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}C(t)=\frac{\left(\rho_M(t)-\iota(t)-\delta\right)}{\beta}C(t) \quad (2.35)$$

$$\rho_M(t)s(t)-r(t)-\frac{\partial}{\partial t}s(t)=0 \quad (2.36)$$

$$s(T)S(T)=0. \quad (2.37)$$

Решение этой системы задает спрос собственника на рынке товаров $C(t)$ и рынке ценных бумаг $S(t)$. Напомним, что в силу (2.21) в равновесии доходность капитала собственника $\rho_M(t)$ неотрицательна. Из (2.36) следует, что даже в случае нулевой нормы выплаты дивидендов $r(t)=0$ капитал растет за счет роста курсовой стоимости акций $s(t)$.

2.6. Описание равновесия

Траектории цен $p(t)$, курса акций $s(t)$ и нормы дивидендов $r(t)$ должны формально определится из балансов (1.1), (1.4), (1.5). Подставляя спрос собственника на акции $S(t)$ с учетом (2.28) и поток дивидендов $Z(t)$ (2.30) в условие дележа (1.5) и полагая

$$G(t)=e^{\int_0^t \frac{r(u)}{s(u)}du}, \quad \omega=\frac{\Omega(0)}{s(0)A(0)}=\frac{p(0)bY(0)}{s(0)A(0)}-1>0, \tag{2.38}$$

получим для функции $G(t)$ нелинейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial G(t)}{\partial t}\left(\int_t^T G^{\frac{1-\beta}{\beta}}(u)e^{\frac{1-\beta-\delta b}{\beta b}u}du\right)=\frac{\omega\left(1-\mathrm{B}-\Delta b\right)e^{\frac{1-\mathrm{B}-\Delta b}{\mathrm{B}b}t}}{\mathrm{B}\left(e^{\frac{1-\mathrm{B}-\Delta b}{\mathrm{B}b}T}-1\right)b}\left(\int_0^T G^{\frac{1-\beta}{\beta}}(u)e^{\frac{1-\beta-\delta b}{\beta b}u}du\right) \tag{2.39}$$

и начальное условие

$$G(0)=1. \tag{2.40}$$

Утверждение 4. Для того чтобы при заданных начальных условиях

$$A(0)=S(0)>0, \quad Y(0)>0, \quad M(0)=W(0)=0$$

существовало регулярное равновесие, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\omega>0$ уравнение (2.39) имело положительное абсолютно непрерывное решение $G(t)$, удовлетворяющее условиям (2.40).

Доказательство. Необходимость уже доказана. Докажем достаточность, т.е. построим регулярное равновесие исходя из положительной абсолютно непрерывной функции $G(t)$, удовлетворяющей (2.39), (2.40) при некотором $\omega>0$. Прежде всего заметим, что при $G(t)>0$ из (2.39), (2.40) следует положительность второго сомножителя в левой части (2.39), а из $\omega>0$ следует положительность правой части (2.39). Таким образом, $\frac{\partial}{\partial t}G(t)>0$ и из определения $G(t)$ (2.38) можно найти реальную норму выплаты дивидендов:

(2.41) $$\frac{r(t)}{s(t)} = \frac{1}{G(t)} \frac{\partial}{\partial t} G(t) > 0 .$$

Зададим теперь произвольно абсолютно непрерывную траекторию цены $p(t) > 0$ так, чтобы выполнялось условие (2.33). Тогда из (2.28) можно определить с точностью до начального значения номинальный курс акций $s(t)$. Значение $s(0)$ определяется по ω и начальным условиям из (2.38). При этом начальное значение капитала фирмы окажется положительным.

(2.42) $$s(t) = \frac{p(t)e^{\frac{t}{b}}}{\omega+1} \frac{bY(0)}{A(0)} > 0,$$

$$\Omega(0) = p(0)bY(0) - s(0)A(0) = \frac{\omega}{\omega+1} p(0)bY(0) > 0$$

Итак, информационные переменные в равновесии определены. Они определяют положительные доходности (см. (2.25), (2.36)):

$$\rho_M(t) = \iota(t) + \frac{1}{b} > 0 \, , \;\; \rho_W(t) = \frac{\frac{\partial}{\partial t} G(t)}{G(t)} + \iota(t) + \frac{1}{b} > 0 \, .$$

Подставляя выражение для $\rho_W(t)$ в (2.35), получим с точностью до множителя выражение для потребления:

(2.43) $$C(t) = C(0)\big(G(t)\big)^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{1-\delta b}{b}t} ,$$

а из (2.34), (2.37) с учетом (2.41), (2.43), (2.42) − выражение для объема размещенных акций:

(2.44) $$A(t) = S(t) = C(0)\frac{p(0)}{s(0)} G(t) \int_t^T \big(G(u)\big)^{\frac{1-\beta}{\beta}} e^{-\delta u} du > 0 .$$

Начальное значение $p(0)$ выше мы задали, а $s(0)$ нашли так, что из (2.44) по заданному $A(0) > 0$ однозначно определяется начальное потребление $C(0) > 0$.

Теперь из (2.32) определится выпуск $Y(t)$, который будет положительным, поскольку капитал фирмы остается положительным вдоль всей траектории. Утверждение доказано.

2.7. Существование и единственность равновесия: логарифмическая полезность

Вопрос о разрешимости системы (2.39), (2.40) и тем самым о существовании равновесия в общем случае остается открытым. Уравнение (2.39) стандартными приемами сводится к дифференциальному уравнению вида:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right)y(x)=ay^2(x)+2by(x)x+cx^2+fy(x)+gx,$$

которое, насколько нам известно, не решается в квадратурах. Для того чтобы получить из функции $y(x)$ функцию $G(t)$, надо выполнить еще две квадратуры и решить два конечных трансцендентных уравнения.

Можно, однако, выделить случай, когда система (2.39), (2.40) решается без труда − это случай логарифмической функции полезности потребителя $\beta=1$ (см. (1.13)). При $\beta=1$ решение уравнения (2.39) сводится к квадратуре и для реальной нормы выплаты дивидендов (2.41) получается выражение

$$\frac{s(t)}{r(t)}=\int_0^t\frac{\left(e^{-\delta t}-e^{-\delta T}\right)e^{\left(\frac{(1-\mathrm{B}-\Delta b)u}{\mathrm{B}b}\right)}}{\left(e^{-\delta u}-e^{-\delta T}\right)e^{\left(\frac{(1-\mathrm{B}-\Delta b)t}{\mathrm{B}b}\right)}}du+\frac{\mathrm{B}b\left(e^{\left(\frac{(1-\mathrm{B}-\Delta b)T}{\mathrm{B}b}\right)}-1\right)}{\omega\left(1-\mathrm{B}-\Delta b\right)\left(e^{-\delta T}-1\right)},\tag{2.45}$$

которое, в частности, показывает, что если $\beta=1$, то равновесие существует при всех положительных $\mathrm{B},\Delta,T,b,\delta$ для любого $\omega>0$.

Утв. 4 показывает, что регулярные равновесия в модели не единственны, причем эта неединственность носит двоякий характер. Во-первых, если равновесие существует при какой-то траектории изменения цен $p(t)$, то оно будет существовать и при любой другой функции $p(t)$, удовлетворяющей (2.33). Это не удивительно. Поскольку запасов денег агенты не держат, инфляция в рамках модели практически эквивалентна деноминации, которая не должна менять по существу поведения субъектов экономики. При изменении $p(t)$ равновесные траектории реальных величин $Y(t)$ и $C(t)$, как легко проверить, не меняются. Ограничение (2.33) на дефляцию возникает потому, что в рамках модели агенты могут захотеть копить деньги и это оказывается выгодным, когда темп падения цены становится выше реальной доходности производства, которая в принятой линейной модели составляет величину b^{-1}. Неединственность равновесия, связанную с возможностью по-разному масштабировать цены, можно считать несущественной.

Более существенна неоднозначность $\omega>0$ в (2.39). Как следует из общих соображений и как видно для логарифмической полезности (2.45), система (2.39), (2.40), если вообще имеет решения, то в целом интервале значений ω. В то же время траектории реальных величин для разных ω различны.

Из доказательства утв. 4 можно усмотреть, что выбор величины ω фактически эквивалентен выбору начального значения реального курса акций $\frac{s(0)}{p(0)}$. Если считать, что это значение наследуется из предыстории экономической системы, то полученную равновесную траекторию можно рассматривать как идеализированное описание переходного процесса. Именно так мы будем трактовать равновесные траектории в разделе 4 ниже. Но прежде, чем сделать это, оценим равновесные траектории с точки зрения потребителя.

3. Эффективность межвременного равновесия

3.1. Задача оптимального планирования потребления

Как это принято в исследованиях моделей равновесия, сравним равновесную траекторию потребления с траекторией потребления, которая получилась бы, если бы собственник мог непосредственно планировать производство в своих интересах. В последнем случае собственник решает задачу (1.13) за счет выбора величин $C(t), Y(t)$ в рамках баланса (1.1) при заданном начальном условии $Y(0) \geq 0$.

Выше положительность выпуска получалась автоматически, поэтому в задаче планирования потребуем только, чтобы выпуск был неотрицательным в конце $Y(T) \geq 0$, а потом просто проверим, что на найденной оптимальной траектории он всюду положителен.

Задача планирования – это стандартная задача теории экономического роста. Нужно найти такое разделение дохода на потребление и накопление (инвестиции), которое было бы оптимальным с точки зрения общества, в данном случае – агрегированного собственника, представляющего всю совокупность домашних хозяйств.

3.2. Решение задачи оптимального планирования

Задача планирования относится к тому же типу, что и задача (1.17) – (1.20), и для нее также верно утв. 1. Это означает, что для нахождения оптимальной траектории достаточно найти точку максимума функционала Лагранжа[5)]

$$\begin{aligned} (3.1)\qquad & \mathcal{L}_{\zeta,\Psi}\left[C(t),Y(t)\right] = \\ & = \int_0^T \left(U(C(t))e^{-\delta t} + \zeta(t)\left(Y(t) - C(t) - b\frac{\partial}{\partial t}Y(t) \right) \right) dt + \Psi\, Y(T) \end{aligned}$$

по $C(t), Y(t)$ при некотором наборе двойственных переменных $\langle \zeta(t), \Psi \rangle$, которые надо выбрать так, чтобы в точке максимума функционала Лагранжа выполнялись условия дополняющей нежесткости:

$$\begin{aligned} (3.2)\qquad & Y(t) - C(t) - b\frac{\partial}{\partial t}Y(t) = 0 \\ & \Psi Y(T) = 0; \quad \Psi \geq 0, \quad Y(T) \geq 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что функционал (3.1) вогнутый, поэтому точку его максимума можно найти стандартной процедурой интегрирования по частям и последующим варьированием по прямым переменным. В результате получится система уравнений:

[5)] Поскольку в задаче планирования нет фазовых ограничений, это условие, как можно показать из принципа максимума, будет и необходимым.

(3.3) $$U'(C(t))e^{-\delta t} = \zeta(t)\,, \quad b\frac{\partial}{\partial t}\zeta(t) + \zeta(t) = 0\,, \quad \Psi = b\zeta(T)\,.$$

В силу свойств функции полезности $U(\cdot)$, $C(t) > 0$. Поэтому левая часть первого уравнения положительна, а значит $\zeta(t) > 0$. Но тогда из последнего соотношения следует, что $\Psi > 0$, а это означает, что терминальное ограничение $Y(T) \ge 0$ выполняется как равенство. Исключая из (3.2), (3.3) величины $\zeta(t)$ и Ψ, получаем систему условий:

(3.4) $$C(t) + b\frac{\partial}{\partial t}Y(t) = Y(t)\,, \quad \frac{\partial}{\partial t}C(t) = \frac{\frac{1}{b} - \delta}{\beta}C(t)\,, \ Y(T) = 0\,;$$

Она легко решается и дает следующее выражение оптимальной траектории:

(3.5) $$C(t) = \frac{Y(0)\left(1 - \beta - \delta b\right)e^{\left(\frac{(1-\delta b)t}{b\beta}\right)}}{\beta\left(e^{\left(\frac{T(1-\beta-\delta b}{b\beta}\right)} - 1\right)}$$

(3.6) $$Y(t) = \frac{Y(0)\left(1 - e^{\left(\frac{(1-\beta-\delta b)(t-T)}{\beta b}\right)}\right)e^{\frac{t}{b}}}{1 - e^{\left(-\frac{T(1-\beta-\delta b)}{b\beta}\right)}}\,.$$

Оба выражения положительны при всех значениях параметров, так что они будут оптимальны и в задаче с ограничением $Y(t) \ge 0$.

3.3. Условия эффективности равновесия

Условия оптимальности (3.4) задачи планирования определяют единственную *эффективную траекторию*, (3.5), (3.6). Равновесные траектории, заданные как решение системы (2.23) − (2.27), (2.34) − (2.37), (1.4), (1.5), не единственны. Выясним, существуют ли среди равновесных траекторий эффективные.

Утверждение 5.

1. Все равновесные траектории неэффективны.

2. Для логарифмической полезности потребителя ($\beta = 1$) при любой полезности фирмы среди равновесных траекторий имеются траектории сколь угодно близкие к эффективным.

3. На равновесных траекториях, близких к эффективной (при любом β), доход собственников образуется в основном не за счет выплаты дивидендов, а за счет роста курса акций, собственный капитал фирмы близок к 0, и фирма выпускает положительный объем акций при всех t, в том числе и при $T \to \infty$.

$$\frac{r(t)}{s(t)} << \frac{1}{s(t)}\frac{\partial}{\partial t}s(t), \quad s(0)A(0) \approx p(0)bY(0),$$

(3.7)

$$A(t) \approx A(0)\frac{1-e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}(t-T)}}{1-e^{-\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}T}} > 0$$

Доказательство. Если бы эффективная траектория была равновесной, то величина (3.5) удовлетворяла бы уравнению (2.35). В силу (2.36) и условия равновесия (2.28) это возможно только при $r(t)=0$. Но при этом из (2.38) $G(t)=1$, а эта функция удовлетворяет уравнению (2.39) только при $\omega = 0$ [6]. Но тогда $\Omega(0)=0$, а при нулевом собственном капитале, как показано в разделе 2.4, задача фирмы неразрешима. Таким образом, строго говоря, среди равновесных траекторий эффективной траектории нет.

Если равновесная траектория близка к эффективной, то $r(t)\approx 0$. В то же время доходность капитала собственника $\rho_M(t) = \frac{r(t)}{s(t)} + \frac{1}{s(t)}\frac{\partial}{\partial t}s(t)$ не может быть малой, так как она должна обеспечивать доходы, позволяющие реализовать потребление близкое к (3.5). Отсюда и следует первое соотношение в (3.7). При $r(t)\approx 0$ $G(t)\approx 1$, а такая функция подходит в (2.39) только при $\omega \approx 0$ в силу (2.38), откуда следует второе соотношение в (3.7).

Для логарифмической функции полезности из (2.45) следует, что при $\omega \to 0$ $\frac{r(t)}{s(t)} \to 0$, $G(t)\to 1$, а $s(0)A(0) \to p(0)bY(0)$. Из этих предельных соотношений, (2.43), (2.44), легко получить, что потребление $C(t)$ на равновесной траектории равномерно сходится к (3.5). Выпуски $Y(t)$ на равновесной траектории также сходятся к эффективной траектории выпусков (3.6), поскольку начальные значения одинаковы, а определяющие уравнения (первое уравнение в (3.4)) близки друг к другу.

Используя выражение для эффективного потребления (3.5) и условие нулевого начального капитала, можно вычислить предельную траекторию объема размещенных акций (3.7) на равновесных траекториях близких к эффективным.

Утверждение доказано.

Содержательно равновесия, близкие к эффективной траектории, можно охарактеризовать как равновесия с максимально возможным значением начального курса акций $s(0)$. Этот результат коррелирует с тем, который получен в [4] для случая, когда фирма не выпускает новых акций. Из аналогичных соображений авторы работы [6] выводят требование максимизации капитализации фирмы вместо требования максимизации функционала вида (1.8).

Ситуация, когда собственники основной доход получают за счет роста курса, характерна для японской экономики времен ее расцвета. Впрочем, при сопос-

[6] Множитель при ω в правой части (2.39) строго положителен при всех значениях параметров.

тавлении полученных здесь результатов с реальностью надо всегда помнить, что здесь мы полностью исключаем риск капиталовложений.

4. Исследование межвременного равновесия

4.1. Асимптотика равновесных траекторий при бесконечном горизонте планирования

Результаты предыдущего раздела показывают, что близость равновесной траектории к эффективной определяется в основном начальным значением курса (или, что то же самое, начальным собственным капиталом) фирмы и не зависит от вида функционала фирмы. Равновесные, но неэффективные траектории можно, таким образом, трактовать как переходные процессы «подстройки» курса от сложившегося в начале значения. Тем самым оправдывается надежда на то, что модели межвременного равновесия можно использовать для описания переходных процессов в экономике.

Здесь мы рассмотрим характер этих переходных процессов. Заметим, что даже когда равновесная траектория в целом далека от эффективной, они могут сближаться друг с другом со временем.

Для исследования этого вопроса об асимптотической близости равновесной и эффективной траекторий естественно перейти к бесконечному горизонту планирования, т. е. совершить в полученных выражениях предельный переход при $T \to \infty$.

При большом горизонте планирования и конечном t выражения (3.5) и (3.6) для эффективной траектории принимают следующий вид:

$$C(t) = \frac{Y(0)\left(\delta b + \beta - 1\right)}{\beta} e^{\left(\frac{1-\delta b}{b\beta} t\right)}, \quad Y(t) = Y(0) e^{\left(\frac{(1-\beta-\delta b)t}{\beta b}\right)} e^{\frac{t}{b}} \text{ при } 1-\beta-\delta b < 0;$$

$$C(t) = 0, \quad Y(t) = Y(0) e^{\frac{t}{b}} \text{ при } 1-\beta-\delta b > 0.$$

Результаты исследования асимптотики равновесных траекторий при всех возможных сочетаниях параметров модели приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1.

Области параметров		$\frac{r(t)}{s(t)}$	$C(t)$	$A(t) = S(t)$	$Y(t)$
$\Delta b - 1 + \mathrm{B} > 0$	A.1 $\delta \mathrm{B} b - \Delta b - \mathrm{B} + 1 > 0$ $\delta b > 1$ $\Delta b > 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
	A.2 $\delta \mathrm{B} b - \Delta b - \mathrm{B} + 1 > 0$ $\delta b < 1$ $\Delta b < 1$	$-$	$-$	$+$	$-$
	B.1 $\delta \mathrm{B} b - \Delta b - \mathrm{B} + 1 < 0, \delta \mathrm{B} b - \Delta b + 1 > 0$ $\delta b > 1$ $\Delta b > 1$	$-$	$-$	$+$	$-$

Продолжение таблицы

Области параметров		$\frac{r(t)}{s(t)}$	$C(t)$	$A(t)=S(t)$	$Y(t)$
	B.2 $\delta \mathrm{B}b-\Delta b-\mathrm{B}+1<0,\ \delta \mathrm{B}b-\Delta b+1>0$ $\delta b<1\ \Delta b<1$	−	−	+	−
	C.1 $\delta \mathrm{B}b-\Delta b-\mathrm{B}+1<0,\ \delta \mathrm{B}b-\Delta b+1<0$ $\delta b>1\ \Delta b>1$	+	+	+	+
	C.2 $\delta \mathrm{B}b-\Delta b-\mathrm{B}+1<0,\ \delta \mathrm{B}b-\Delta b+1<0$ $\Delta b>1,\ 0<\delta b<1$	+	−	+	−
$\Delta b-1+\mathrm{B}<0$	A $1-\delta b<0$	+	+	+	−
	B $1-\delta b>0$	+	+	+	−

Предельные положения равновесных траекторий для логарифмической функции полезности собственника ($\beta=1$) сопоставлялись с предельным положением эффективной траектории (3.5), (3.6), (3.7) и $r(t)\approx 0$ (см. доказательство утв. 5). Знак «+» означает, что равновесная и эффективная траектории в пределе сближаются, а знак «−», что они остаются различными все время. Перечисленные в табл. 4.1 случаи исчерпывают все возможные сочетания значений положительных параметров $b,\delta,\Delta,\mathrm{B}$.

Из приведенной таблицы можно сделать два вывода:

- Объем выпуска акций $A(t)=S(t)$ всегда сходится к эффективному значению, т.е. соответствует интересам собственника. Однако при этом объемы потребления и производства могут и не соответствовать этим интересам. Таким образом, судить об эффективности экономики по динамике фондового рынка нельзя даже в простейшей модели экономики.
- Асимптотика равновесных траекторий существенно зависит от соотношения параметров функции полезности собственника и фирмы. Асимптотическая эффективность будет обеспечена, если горизонт планирования собственника δ^{-1} достаточно большой, а горизонт планирования фирмы Δ^{-1}, напротив, достаточно короткий (случай C.2). В этом случае фирма, можно сказать, не имеет собственных интересов на перспективу и становится послушным инструментом в руках собственника, который, напротив, смотрит далеко вперед.

4.2. Примеры переходных процессов

Даже в случае асимптотического сближения равновесной и эффективной траектории по всем показателям (случай C.1 в табл. 4.1) на начальном участке равновесной траектории, как показывает рис. 1, может наблюдаться нетривиальный переходной процесс.

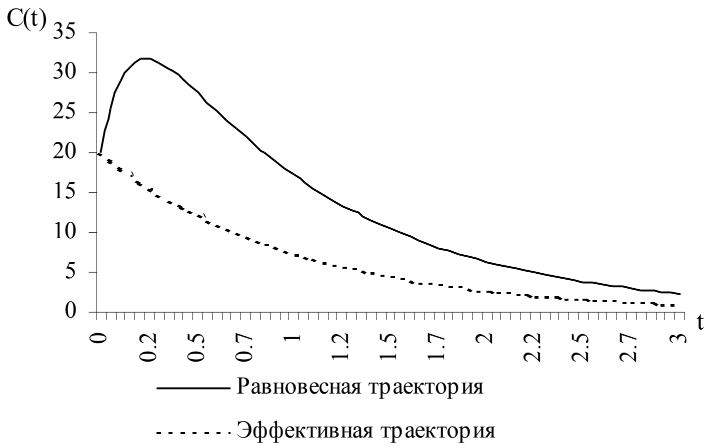

Рис. 1.

На рис. 1 сплошная линия изображает равновесную траекторию потребления, пунктирная – эффективную в случае коротких горизонтов планирования фирмы и длинных горизонтов планирования собственника.

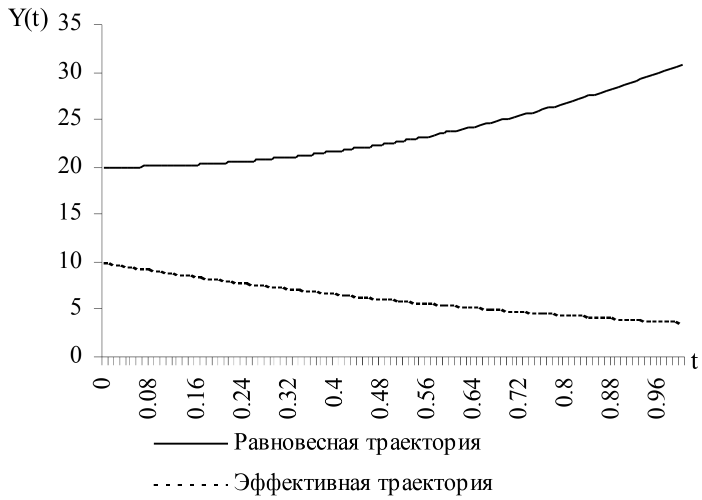

Рис. 2.

Когда у производителя горизонты планирования длинные, а у собственника – короткие (случай А в табл. 4.1), собственник получает планируемое потребление. Однако производство, как показывает рис. 2, на равновесной траектории растет, в то время как на эффективной траектории оно падает. Заметим, что с точки зрения последующих поколений равновесная траектория выглядит куда более благоприятной, чем эффективная.

Рис. 3.

В случае А.1, когда и собственник, и фирма имеют длинные и сравнимые горизонты планирования, равновесные и эффективные траектории сближаются по выпуску и по потреблению, однако, как показывает рис. 3, некое рассогласование функционалов приводит к тому, что на равновесной траектории остается постоянная и ненулевая реальная норма дивидендов.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев А.П.*, *Дикусар В.В.*, *Милютин А.А.*, *Чуканов С.А.* Необходимое условие в оптимальном управлении. М.: Наука, 1990.

2. *Малинво Э.* Лекции по микроэкономическому анализу. М.: Наука, 1973.

3. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.

4. *Поспелов И.Г.* Модели экономической динамики, основанные на равновесии прогнозов экономических агентов. М.: ВЦ РАН, 2003.

5. *Фишберн П.С.* Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.

6. *Brock W.A.*, *Turnovsky S.J.* The Analysis of Macroeconomic Policies in Perfect Foresight Equilibrium // International Economic Review. Vol. 22. Is. 1 (Feb., 1981). P. 179–209.

7. *Lucas R.E.*, *Sargent T.J.* Rational Expectations and Econometric Practice. London: Allen & Unwin, 1981.

8. *Turnovsky S.J.* Monetary Growth, Inflation and Economic Activity in a Dynamic Macro Model // NBER Working Paper. January 1987. № 2133.