ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

Статичное равновесие Курно – Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек[1)]

Дюсуше О.М.

В классе линейных функций спроса и издержек фирм исследуется проблема статичного равновесия Курно с использованием некооперативных статических и стратегических рефлексивных игр различных порядков. В статье вводятся: концепция конкурентоспособности фирмы в равновесии Курно для n фирм; определение предположительных вариаций как первых производных от функций постоянной прибыли Штакельберга; и понятие последовательно-группового порядка в игре n персон. Анализируются и отвергаются доводы Бреснахана (1981) о противоречивости предположений Курно. Теоремы Бергстрома и Вэриана (1985) и Новшека (1985) проверяются с использованием концепции конкурентоспособности фирм. Получено решение статичной задачи Курно, показано, что решение является равновесным по Нэшу, и проведен анализ сходимости к равновесию Курно – Нэша процессов стратегических рефлексивных игр различных порядков. Исследование сходимости показало: 1) процесс рефлексивных игр последовательного порядка сходится, независимо от числа неконкурентоспособных фирм; 2) если число фирм больше двух, процесс игр одновременного порядка расходится, а иначе сходится; 3) сходимость процесса игр последовательно-группового порядка зависит от начального выбора фирм и распределения по группам конкурентоспособных фирм, процесс может быть циклическим или сходится, исключением является случай, когда в группах не более двух фирм, и процесс сходится всегда.

Введение

В работе 1838 г. А. О. Курно [13] впервые рассмотрел аналитический подход к взаимодействию фирм, конкурирующих объемами выпуска на рынке однородной продукции. Курно исследовал состояние «стабильного» (stabl) равновесия рынка, когда каждая фирма максимизирует собственную прибыль, предполагая, что

Дюсуше О.М. – к.э.н., ГУ ВШЭ.

Статья поступила в Редакцию в декабре 2005 г.

1) Автор выражает искреннюю благодарность д.т.н., профессору Алескерову Ф.Т. и д.ф-м.н., с.н.с. Кукушкину Н.С. за поддержку темы статьи и замечания, способствующие улучшенному изложению материала, за который автор несет ответственность.

объем выпуска конкурентов «фиксирован», и другим фирмам не выгодно отклониться от равновесия для получения «мгновенной прибыли», т.е. в современных терминах – статичное равновесие при полной информации или в терминах теории игр – некоалициoонное (некооперативное) равновесие Курно – Нэша в статической игре. Курно рассматривал обобщенное выражение убывающей функции рыночного спроса и обобщенное выражение функции издержек фирм, выделяя для анализа *симметричного* равновесия случаи нулевых и ненулевых, *одинаковых предельных* издержек. Он показал на примере двух фирм, как фирмы рассматривают предполагаемый выбор конкурента и корректируют собственный выбор в поиске равновесия, используя условия первого порядка[2)], а также показал, что изменение числа фирм (при одинаковых издержках) позволяет рассматривать монополию и совершенную конкуренцию как предельные случаи равновесной структуры рынка олигополии. Идеи, заложенные в основание подхода Курно, определили отправную точку исследований взаимодействия фирм на олигополистических рынках.

Существует значительное количество теоретических и прикладных исследований олигополии в условиях конкуренции по мощности, объемам выпуска, ценам или параметрам дифференциации продуктов при однократном или повторяемом взаимодействии, одновременном или последовательном входе (или ходе), сигнализировании, хищническом ценообразовании и других особенностях стратегического поведения фирм, где используются методы условной оптимизации и теории игр. Однако загадки статичного равновесия Курно не разгаданы до конца.

Во-первых, простая, ставшая хрестоматийной модель симметричного равновесия Курно при линейном спросе и одинаковых, пропорциональных объему выпуска издержках фирм оставила неясной логику связи между предпосылкой Курно о фиксированном выпуске конкурентов и наклоном функции реакции (назовем ее проблемой предположительных вариаций). Это подтверждается приведенными ниже материалами публикаций 1981–2000 гг. в ведущих западных журналах и издательствах, где утверждается тезис о несоответствии предпосылок или «противоречивости» (inconsistency) равновесия Курно [9, 10, 12, 19, 26] и др.

Во-вторых, сам вопрос существования равновесия при конкуренции Курно не получил еще ясного экономического истолкования [22] и др.

В-третьих, идея Курно выявления равновесия путем оптимальных откликов фактически используется в теории игр различных направлений. В рамках классической теории Неймана – Моргенштерна, например в работах – [14, 17] и др., рассматриваются повторяемые динамические игры. В рамках теории хаоса ключевой считается работа Д. Ранда по исследованию процессов повторяемых статических игр на отрезке допустимых откликов с одновершинной функцией реакции [24]. Результаты исследований теории хаоса можно найти, например, в работах [20, 23] и др. Также появилось новое направление – теория рефлексивных игр [3], где поиск равновесия рассматривается как ментальный, а не динамический процесс. Однако применение рефлексивных игр и сравнительный анализ *влияния раз-*

[2)] Курно рассматривал условия первого порядка в виде кривых на плоскости объемов выпуска двух фирм. Кривые принято называть функциями реакции (reaction curve, reaction correspondence). Изложение подхода Курно на языке оригинала и в переводе В.К. Дмитриева можно найти в [1].

личных типов упорядочения отклика n игроков на равновесие Курно в статической игре, насколько мне известно, не привлекли еще достаточного внимания[3]. Эти три вопроса рассматриваются в контексте настоящей статьи.

В статье 1898 г., посвященной детальному анализу работы Курно, И. Фишер назвал анализ олигополии «блестящим и наводящим на размышления, но не свободным от серьезных возражений» [15]. В детальном анализе работы Курно он, признавая справедливость результата при условиях Курно, находил, по его мнению, ошибку в предпосылке поведения фирм: «Ошибка, которую можно обнаружить в рассуждении, находится в допущении, что индивид будет действовать при условии, что выпуск его конкурента − постоянный[4], и будет стремиться только так регулировать собственный выпуск, чтобы обеспечить наибольшую прибыль» [15]. Фишер считал, что логичнее рассматривать конкуренцию ценами и мощностями, как это сделал Эджворт (1897)[5]. Заметим, что не только представления о конкуренции путем изменения различных управляемых параметров (объемов, цен, мощностей и др.), но и само понятие равновесия в экономической теории (и теории игр), а также логика поиска равновесия нуждались в тот период в более глубоком обосновании.

Фундаментальные основы равновесия в экономических моделях были заложены позже. Во-первых, в результате математических исследований П. Боля (1904), Л. Брауэра (1910) и С. Какутани (1941)[6] доказаны варианты так называемой «Теоремы о неподвижной точке», которая утверждает, что отображение (непрерывное или полунепрерывное сверху) выпуклого компакта в себя содержит, по крайней мере, одну неподвижную точку. Во-вторых, в рамках математической теории вероятностей и теории игр (последняя выделилась в самостоятельной направление, по-видимому, в 1928 г.) результаты фундаментальных исследований Д. Бернулли, П. Лапласа, Э. Бореля, Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна[7] и др. позволили создать Дж. Ф. Нэшу знаковую работу по некооперативному равновесию в игре *n* персон[8] [21], а также теорему о существовании равновесия в сме-

[3] Кукушкин [17, с. 107] сравнивает влияние только двух типов упорядочения откликов на результаты повторяемых игр (одновременного и последовательного), но подробно не анализирует эту проблему.

[4] Курно использовал термин «фиксированный», а не «постоянный»: «Владелец (фирма) 1 не может влиять прямо на *фиксацию* D2», D2 − выпуск второй фирмы в задаче дуополии («Le propriétaire 1 ne peut pas influer directement sur la fixation de D2», цит. по монографии Дмитриева [1, с. 459].

[5] Там же.

[6] Цит. по изданию [2]. Там же можно найти ссылки на переводы работ Х. Никайдо (1972) и М. Интриллигатора (1975), излагающих эти подходы.

[7] Имеются в виду темы исследований: модель «С.Петербургский парадокс» Бернулли (1732); принципы оптимальности Лапласа (1814); матричные игры и частные теоремы существования равновесия в смешанных стратегиях Бореля (1921); основания современной теории игр Неймана (1928); теория игр Неймана и Моргенштерна (1944) (цит. по материалам статьи Н.Н. Воробьева «Игр теория» в [2]).

[8] Нэш защитил докторскую диссертацию в 1950 г., а в 1994 г. получил нобелевскую премию за пионерные исследования некооперативного равновесия в теории игр. Его работы доступны на сайте: http://math.claremontmckenna.edu/moneill/Math188/papers/default.htm, текст диссертации можно найти на сайте Принстонского университета.

шанных стратегиях, «известные доказательства которой опираются на теоремы о неподвижной точке»[9].

Однако упомянутые теоремы не всегда определяют алгоритмы поиска неподвижных точек, а также не учитывают влияния экономических ограничений на равновесие, например таких, как неотрицательность объема выпуска фирмы, цены или прибыли. Поэтому в экономической теории значительную роль играют предметные исследования моделей, в том числе модели Курно.

Существует ряд работ, где определенные требования к свойствам функции спроса и (одинаковых или различных) издержек фирм формулируются как *необходимые условия* равновесия в модели Курно. При анализе определенного класса моделей (например, в классе линейных функций) подобные требования можно рассматривать как параметрические ограничения. Широко известной и часто цитируемой является работа 1985 г. В. Новшека [22], где он критикует необходимые условия теорем существования равновесия Курно в работах М. Мак-Мануса и Ф. Сидаровски и С. Яковица. Новшек обосновывает уточнение необходимых условий существования равновесия n фирм в теореме 3 [22], однако необходимые условия этой теоремы не являются полными, как будет показано.

Основной целью настоящей статьи является решение задачи Курно в статической постановке, анализ *предположительных вариаций* в подходе Курно и возможностей поиска статичного равновесия с использованием стратегических рефлексивных игр для случая линейного спроса и линейных издержек. В отличие от случая функций спроса и издержек общего вида, когда возникает проблема поиска неподвижных точек, здесь существование и единственность равновесия доказываются непосредственно методами линейной алгебры, и внимание обращено на проблемы конкурентоспособности фирм, свойства статичного равновесия и адекватность процесса рефлексии. В условиях полной информации *статичная* постановка задачи соответствует в терминах теории игр *статической* игре (неоклассический подход). Статичная постановка имеет прикладное значение, когда конъюнктура рынка (спрос и издержки фирм) в очередном периоде меняется малопредсказуемым образом, что характерно для быстротекущих экономических, переходных процессов[10]. Включение в модель фиксированных издержек фирм позволяет рассмотреть не только вопрос о конкурентоспособности, но также вопрос об убыточности конкурентоспособных фирм. Решение вопроса убыточности фирм в статичной постановке задачи выходит за рамки неоклассической теории и требует привлечения институционального подхода, когда фирмы могут руководствоваться определенными нормами поведения и выбирать в качестве исхода игры не «неподвижную» точку равновесия, а «фокальную точку», которая без предвари-

---

[9] Цит. по материалам статьи Е.Б. Яновской «Нэша теорема» в [2].

[10] В статье предполагается, что фирмы получают полную информацию о конъюнктуре рынка только после входа на рынок, когда фиксированные затраты, например на НИР, лицензии, инвестиции в специфические активы, предварительный сбор информации о конъюнктуре рынка и заключение контрактов (что, в целом, можно рассматривать как плату за вход), уже сделаны. Возможны различные варианты содержательной трактовки фиксированных издержек, в том числе как трансакционных, т.е. привлечение институционального подхода.

тельных соглашений обеспечивает более привлекательный Парето-оптимум для всех фирм.

Стратегические рефлексивные игры позволяют (следуя за Курно) использовать ментальные процессы поиска решений, приводящие к равновесию статической игры. Формально множество динамических игр содержит рефлексивные игры[11)], поэтому результаты могут представлять интерес для сравнения с исследованиями некоторых динамических игр. Особенность рефлексивных стратегических игр состоит в том, что каждая фирма играет с фантомными игроками[12)] на основе эмпатии, т.е. *размышляет* о наилучшем собственном выборе, с учетом наилучших откликов остальных конкурентов. Рефлексивные размышления фирм заключаются в применении формулы: если каждый из конкурентов догадывается, что хотят выбрать его соперники, то каким будет его наилучший отклик (реакция) и отклик на отклики и т.д. В рамках подхода рефлексивных игр можно рассмотреть проблему влияния *последовательно-группового порядка* выбора (ходов) игроков, т.е. правил игры, отличных от повторяемых статических или последовательных игр, и подобные правила могут иметь прикладное значение.

Задача находится на стыке теории отраслевых рынков и теории игр и требует соответствия терминов. Некооперативное взаимодействие (конкуренция) фирм на рынке рассматривается как статическая бескоалиционная игра, а фирмы – как игроки. Ход игрока совпадает с (чистой) стратегией и эквивалентен выбору фирмой объема выпуска. Платежная функция в статической игре определяет прибыль-выигрыш (или убыток-проигрыш). В рефлексивной игре рассматривается только сходимость (или несходимость) откликов к определенному аттрактору, который анализируется на соответствие с решением статической игры (платежи не рассматриваются).

В первом разделе статьи рассматриваются предпосылки модели статической игры, постановка задачи конкуренции n фирм с различными линейными издержками, условия конкурентоспособности и безубыточности фирм и инструменты анализа равновесия в условиях неопределенности выбора конкурентов: кривые постоянной прибыли Штакельберга, их производные как функции *предположительных вариаций* и функции реакции (на сумму предполагаемых объемов выпуска конкурентов). В разделе 2 рассматривается проблема предположительных вариаций и «противоречивости» предпосылок Курно, в разделе 3 – теорема равновесия и анализ равновесия с точки зрения неоклассического и институционального подходов, теоремы Бергстрома и Вэриана [6] и Новшека [22], в разделе 4 – влияние порядка оптимальных откликов в рефлексивной игре n фирм на сходимость к статическому равновесию.

---

11) При этом моменты времени соответствуют шагам рефлексии. В динамических повторяемых играх можно было бы анализировать картельное равновесие, например, сравнивая дисконтированный поток платежей при стратегиях «кооперироваться в картельном равновесии» или «отклониться и вернуться к равновесию Нэша». Если первая сумма доминирует, то картельное равновесие существует. Однако в статической и релевантной рефлексивной игре дисконтирование платежей не имеет смысла, и достижение картельного равновесия может основываться на других условиях (определяемых подходами институциональной экономики).

12) См., например, [3].

1. Постановка задачи статической игры Курно

1.1. Краткий перечень предпосылок модели статической игры

1. Линейные функции рыночного спроса и полных издержек n фирм;
2. Однородность продукции;
3. Конкуренция объемами выпуска;
4. Единая рыночная цена;
5. Отсутствие ограничений мощности фирм;
6. Отсутствие коалиций;
7. Максимизация прибыли каждой фирмой;
8. Полная информация по п. 1;
9. Совершенное знание или рациональные ожидания фирм относительно пп. 2–8.

Основные формулы, пояснение предпосылок и поведения фирм приводятся ниже.

1.2. Конъюнктура рынка

Рассматривается рынок однородного продукта, где спрос определен линейной функцией (обратной функцией спроса в зависимости от совокупного выпуска n фирм):

(1) $$P(Q) = a - b \cdot Q.$$

На рынке присутствуют фирмы, конкурирующие объемами выпуска однородной продукции. Условия конкуренции таковы, что каждая из фирм независимо и конфиденциально предлагает Аукционеру (назовем его Аукционером Курно) продать произведенный ею выпуск q_i по единой рыночной цене. Считается, что если суммарный объем превышает емкость рынка ($Q \geq a/b$), фирмы несут потери в объеме полных издержек. Полные издержки фирм имеют вид:

(2) $$TC_i(q_i) = c_i \cdot q_i + F_i, \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

где q_i – объем выпуска; c_i – предельные издержки; F_i – фиксированные издержки фирмы i.

Аукционер определяет рыночную цену в соответствии с (1), исходя из суммы объемов выпуска фирм: $Q = \sum q_i$. Конъюнктура рынка определяется параметрами спроса и издержек фирм, а также числом конкурирующих фирм, и эта информация полностью доступна всем фирмам при «входе» на рынок до подачи заявок Аукционеру.

1.3. Особенности максимизации прибыли фирмами в модели Курно

Фирмы рациональны в том смысле, что используют полную информацию о конъюнктуре рынка и не только знают все условия окружения, но знают, что все фирмы об этом знают и используют это для максимизации собственной прибыли[13]. Каждая фирма максимизирует прибыль при отсутствии (явных) соглашений об объеме выпуска (коалиций) и ограничений мощности. Рыночная цена и прибыль фирмы с номером i зависит от неизвестного суммарного объема выпуска конкурентов $q^e_{-i} = \sum_{i \neq j} q_j = Q - q_i$. Поэтому мы анализируем поведение фирм в условиях неизвестных, ожидаемых значений выпуска конкурентов и уровня прибыли, которые маркируются верхним индексом «e». Прибыль фирмы i приведена к технически удобному виду:

$$\pi^e_i = \left(a - b \cdot \left(q_i + q^e_{-i}\right) - c_i\right) \cdot q_i - F_i = b \cdot \left(Q_{ci} - \left(q_i + q^e_{-i}\right)\right) \cdot q_i - F_i, \tag{3}$$

где $Q_{ci} = \dfrac{a - c_i}{b}$ – объем совершенно конкурентного выпуска при ценообразовании по предельным издержкам $P = c_i$, называемый «совершенно конкурентный объем фирмы i».

Тождественное преобразование выражения прибыли (3) позволяет выразить связь (ожидаемого) выпуска конкурентов и (управляемого) собственного выпуска фирмы. Эта связь обобщает для случая n фирм представление *кривых постоянной прибыли Штакельберга*[14] на специфических «плоскостях» $\{q_i, q^e_{-i}\}$:

$$q^e_{-i} = Q_{ci} - q_i - \frac{\pi^e_i + F_i}{b q_i}, \tag{4}$$

где $\Pi_i^e = \pi_i^e + F_i$ – валовая прибыль, т.е., прибыль без учета фиксированных издержек.

Кривые Штакельберга (4) – это *эквивалент целевой функции прибыли* фирмы i в условиях неопределенности выпуска конкурентов. Ситуация неопределенности требует предположений о поведении фирм.

1.4. Поведение фирм в статической игре

Решения фирмы рассматриваются в n-мерном пространстве выпуска фирм, малодоступном графической интерпретации выбора. Однако, задавая различные значения параметра прибыли, можно рассмотреть обобщение карты кривых постоянной прибыли Штакельберга для фирмы i, где представлены все возможные сочетания суммы выпуска конкурентов и фирмы i (например, на рис. 1, где кри-

---

[13] Общее знание о рациональности фирм будем называть «совершенным знанием» в отличие от «совершенной информации», применяемой к знанию предыстории игры в динамических играх.

[14] Штакельберг [25] считал (в противоположность Бертрану [7] и Фишеру[15]), что при однородных продуктах *ценовая* конкуренция невозможна, и разработал для анализа конкуренции по *объемам фирм дуополии* графический метод анализа кривых постоянной прибыли (изопрофит) на плоскости объемов выпуска фирм. Он рассматривал типы поведения фирм – «лидер» и «последователь», и считал, что в случае симметричных типов равновесие невозможно. Мы рассматриваем поведенческие предпосылки фирм олигополии вне этих типов Штакельберга.

вые Штакельберга маркированы значениями прибыли фирмы i[15] при нулевых фиксированных издержках F_i. Если $F_i > 0$, то характер кривых Штакельберга не изменяется, но маркировка кривых уменьшается на величину фиксированных издержек F_i).

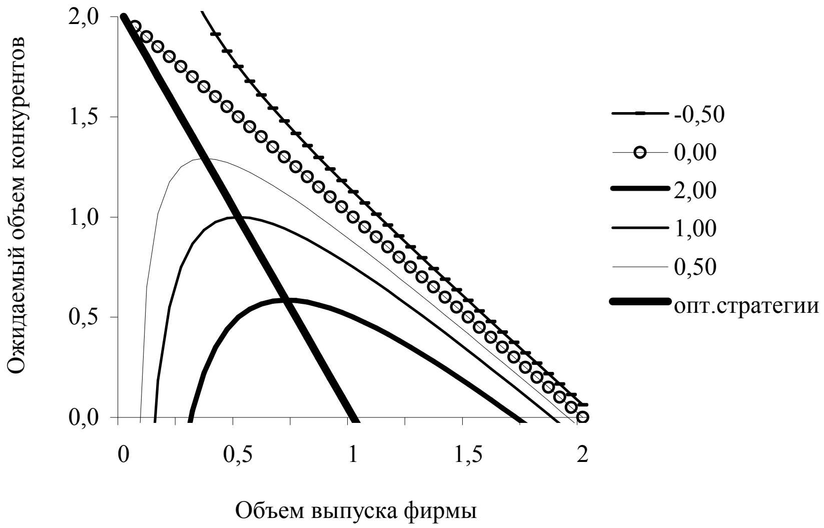


Рис. 1. Карта кривых постоянной прибыли Штакельберга и совокупность стратегий фирмы при неопределенности выбора объема выпуска конкурентов. Параметры модели: a=10; b=4; c=2, F=0.

Из анализа карты кривых постоянной прибыли фирмы i следует, что при объеме выпуска конкурентов, превышающем «совершенно конкурентный объем» ($q^e{}_{-i} \geq Q_{ci}$), ожидаемый уровень валовой прибыли фирмы i будет отрицательным, и не следует участвовать в конкуренции ($q_i = 0$). При условиях $q^e{}_{-i} < Q_{ci}$ и отсутствии ограничений мощности для фиксированного (заранее неизвестного) выпуска конкурентов фирма получит максимальный уровень прибыли, если выберет собственный объем q_i в точке касания кривой Штакельберга горизонтали $q^e{}_{-i}$.

Таким образом, определено компактное множество допустимых стратегий (ходов) каждой фирмы i: $q_i \in [0, Q_{ci}] \in R^+$, и (если оно существует) компактное множество равновесных исходов статической игры в R^{n+} с соответствующими платежами согласно (3).

[15] Валовая прибыль Π_i положительна, если предельные издержки меньше рыночной цены. При *положительной* валовой прибыли кривые Штакельберга: 1) вогнутые, 2) одномодальные, 3) через каждую точку можно провести только одну кривую, 4) чем меньше параметр Π_i, тем выше расположена кривая, 5) с уменьшением параметра Π_i значение моды убывает. При нулевом значении Π_i кривая Штакельберга является линейной, а при отрицательном − выпуклой и не имеет экстремума (рис. 1). Доказательства этих свойств могут быть получены методами математического анализа из (4).

При изменении $q^e{}_{-i}$ в интервале $q^e{}_{-i} < Q_{ci}$ точки касания определяются условием равенства нулю производной кривой Штакельберга, или *условием нулевых предположительных вариаций Курно* :

(5) $$\frac{dq_{-i}^e}{dq_i} = \frac{\pi_i^e + F_i}{bq_i^2} - 1 = 0.$$

Уравнение (5) задает связь оптимального выпуска и прибыли при условии $q_{-i} = q^e{}_{-i}$:

(6) $$\pi_i^e = bq_i^2 - F_i.$$

В математической форме приведенные выше рассуждения фирмы («производить или не производить, и если производить, то «каким образом») могут быть получены подстановкой (6) в выражение прибыли (3), что дает произведение двух сомножителей равных нулю и определяет полную функцию реакции (для каждого i).

(7) $$(Q_{ci} - 2q_i - q_{-i}^e) \cdot q_i = 0.$$

Первое из двух выражений может быть получено из условий первого порядка (см. ниже (8)). «Производить» означает равенство нулю первого сомножителя (7) при ожиданиях $q^e{}_{-i} < Q_{ci}$, где объем выпуска фирмы зависит от функции реакции $q_i = (Q_{ci} - q_{-i}{}^e)/2$. «Не производить» означает $q_i = 0$, поэтому производная полной функции реакции имеет неустранимый разрыв в точке $q_{-i}{}^e = Q_{ci}$.

2. Проблема предположительных вариаций и «противоречивости предпосылок» Курно

2.1. Предположительные вариации в задаче конкуренции фирм олигополии

Замечание Фишера, критикующего предположение Курно о фиксированном выпуске конкурентов [15], фактически наталкивает на плодотворную мысль − анализировать предположительные вариации выпуска конкурентов. В работе 1924 г. А. Боули [8] для *симметричного случая одинаковых фирм* ввел в обращение представления (beliefs) относительно предположительных вариаций[16)] выпуска конкурентов как некие *константы*.

В рассмотренной постановке задачи Курно условия первого порядка с учетом предположительных вариаций имеют вид:

(8) $$\frac{d\pi_i^e}{dq_i} = b \cdot \left[Q_{ci} - 2q_i - q_{-i}^e - q_i \cdot \frac{dq_{-i}^e}{dq_i} \right] = 0.$$

[16)] Термин «предположительные вариации» (conjectural variation) был введен позже Р. Фришем в работе 1933 г. [16].

Попытка анализа *первообразной* предположительных вариаций в обобщенной форме в работе 1981 г. Дж. Лейтнера [18] привела к заключению о множественности «локальных предположительных равновесий» без объяснений экономического смысла подобного разнообразия. На наш взгляд, множественность подобных «равновесий» напоминает ситуацию расчистки рынка (market clearing) в условиях так называемой «народной теоремы», когда при совпадении определенных («рациональных»[17]) ожиданий выбора конкурентов доступно широкое множество «равновесий», и проблема состоит *только* в обосновании поведения фирм. Представление о предположительных вариациях как о *константах* в работах 1983 г. Бойера и Моро [5] и Альфа [26] породило путаницу предположительных вариаций с наклоном функции реакции. Крайнюю позицию относительно проблемы предположительных вариаций заняли Бреснахан [9, 10] и Колдвел [12], считающие предположения Курно противоречивыми.

Как уже отмечалось, первообразную для суммы предположительных вариаций можно определить из уравнения прибыли (3), считая величину прибыли параметром для построения карты кривых Штакельберга и анализа фокальных точек, в том числе картеля. Заметим, что при постоянной прибыли предположительные вариации изменяются в широком диапазоне и могут иметь различные знаки (рис. 2). Фиксированные ненулевые предположительные вариации (*константы*) изменяют функцию реакции (8).

2.2. «Парадокс противоречивости» предпосылок Курно

Что касается подхода Курно, когда предположение фиксированного, равновесного выпуска конкурентов при отсутствии ограничений мощности порождает *нулевые* предположительные вариации, путаница и упреки в противоречивости подхода состоят в том, что *a* priori нулевые предположительные вариации Курно не соответствуют частным производным объема конкурентов по объему фирмы в соотношениях первого порядка. Именно этот «парадокс» позволил Бреснахану утверждать [9, с. 934], что «никакие попытки выбрать среди Бертрана[18], Курно и их последующих конкурентов не могут быть основаны на математической корректности». Колдвелл [12] пришел к парадоксальному заключению, что *корректность предположений не является необходимой для равновесия* в какой-либо из моделей монополистической, монополистически конкурентной или конкурентной фирмы. В учебнике по теории отраслевых рынков Мартин [19, с. 28–29] со ссылкой на работу Бреснахана [9] пишет: «...предположения Курно некорректны. Каждая фирма действует так, как если бы ее конкуренты не реагировали на изменения

---

[17] В названии статьи Лейтнера [18] слово «рациональный» взято в кавычки.

[18] В противоположность подходу Курно, Бертран в работе 1883 г. [7] показал, что *ценовая* конкуренция двух фирм приводит к единой равновесной цене, соответствующей цене рынка совершенной конкуренции, а не дуополии Курно. Бертран предполагал, что *фирмы устанавливают цены*, а количества устанавливает рынок. Решение Бертрана показало высокую чувствительность моделей олигополии к изменению предпосылок конкуренции. Позже была предложена классификация управляемых переменных конкуренции (субституты и комплементы) в зависимости от знака (− или +) второй смешанной производной прибыли фирмы по собственной переменной и переменной конкурента [11].

выпуска, когда функции реакции конкурентов показывают, что они реагируют... Отсюда следует в модели с линейным спросом и постоянными предельными издержками, что предположения Курно противоречивы. Поведенческие предположения Курно приписывают нулевой наклон функции реакции другой (фирмы), когда в действительности наклон функции реакции соперника равен $-1/2$. Иначе говоря, в модели Курно каждая фирма ошибается относительно способа реагирования другой фирмы. Рассмотрим случай Бертрана, где предположительные вариации равны -1. Функции реакции двух фирм совпадают, и рынок имитирует конкурентный случай. Каждая фирма верит, что наклон функции реакции другой фирмы -1, и это так в действительности. Следовательно, предположения Бертрана непротиворечивы. Эти результаты валидны, только если предельные издержки постоянные. Если существует дизэкономия от масштаба, возможно, что непротиворечивые предположительные производные лежат между значениями 0 и -1 (Бреснахан, 1981). С этой точки зрения замечание о непротиворечивости выглядит веским. Без совместимости (consistency) любой исход от конкуренции до монополии может быть равновесным с подходящими предположениями. Налагая требования, чтобы ожидания фирм о поведении соперников были корректны, мы элиминируем большинство из этих исходов и устанавливаем единственное равновесие с совместимыми предположениями».

Заблуждение относительно «противоречивости» поведенческих предположений Курно, распространенное на учебную литературу, требует разъяснения.

Заметим, что подстановка выражения предположительных вариаций (4) в условия первого порядка (8) приводит их тождественно к нулю. Математический смысл этого тождества означает, что предположительные вариации являются решением дифференциального уравнения (8)[19], а экономический смысл – в том, что фирма, выбирая выпуск в условиях совершенного знания и рациональных ожиданий выпуска конкурентов, фактически выбирает условный максимум прибыли, т.е. соответствующую кривую Штакельберга (4). Заметим также, что, определяя условия первого порядка, мы предполагаем прибыль фиксированной величиной. Условный максимум прибыли и равенство нулю предположительных вариаций эквивалентны.

Когда фирма решает производить, равенство нулю первого сомножителя (7) или условий первого порядка (8) характеризует связь неизвестного оптимального выпуска конкурентов и оптимального решения фирмы. Графическое изображение этой связи представляет линию, проходящую через вершины функций постоянной прибыли Штакельберга, в рассмотренном случае это известная (линейная) функция реакции фирмы (рис. 1). В каждой точке функции реакции фирмы, включая заранее неизвестную равновесную точку, предположительные вариации конкурентов фирмы равны нулю[20], однако равновесной в нашем случае будет

[19] Можно рассматривать условия первого порядка (выражение в квадратных скобках (8)) как неоднородное дифференциальное уравнение относительно функции предположительных вариаций типа $dy/dx + y\ p(x) = q(x)$, где решение может быть получено, например, методом интегрирующего множителя.

[20] Иная закономерность имеет место в известной однократной динамической игре по модели Штакельберга, где «лидер» первым выбирает объем, а для «последователя» оптимальной является точка на его функции реакции, где достигается максимум прибыли лидера, и функция Штакельберга касается функции реакции последователя. Предположительные вариации лидера отрицательные, а у последователя – нулевые.

только одна точка, где предположительные вариации конкурентов *всех фирм* равны нулю.

2.3. Случай дуополии

Рассмотрим случай *дуополии*, заменяя в полученных ранее формулах индексы фирмы и ее конкурента: $i \to 1$, $-i \to 2$. Уравнение прибыли (3), записанное в форме параметрической кривой Штакельберга (4) для фирмы 1, имеет вид:

$$q_2^e = Q_{c1} - q_1 - \frac{\pi_1^e + F_1}{bq_1}. \tag{4а}$$

Условия первого порядка для фирмы 2

$$\frac{d\pi_2^e}{dq_2} = b \cdot \left[Q_{c2} - 2q_2 - q_1^e - q_2 \cdot \frac{dq_1^e}{dq_2} \right] = 0 \tag{8а}$$

с учетом предположения Курно принимают вид

$$Q_{c2} - 2q_2 - q_1^e = 0 \quad \text{или} \quad q_2 = (Q_{c2} - q_1^e)/2. \tag{8б}$$

Представляется логически некорректным сопоставлять предположительные вариации $dq^e{}_2/dq_1$ как производные из (4а) и наклон функции реакции $dq_2/dq^e{}_1$ из (8б), как это делается в приведенных источниках, независимо от того, равны они между собой в равновесии или нет (в равновесии Курно первая из них равна 0, а вторая равна $-1/2$). Выражение (4а) − эквивалент целевой функции прибыли фирмы 1, а выражение (8б) − условие первого порядка в выражении прибыли фирмы 2, где уже учтено условие нулевых предположительных вариаций фирмы 1.

В графическом изображении решение «парадокса противоречивости» для дуополии можно проанализировать путем построения карты кривых Штакельберга для первой и второй фирм на плоскости $\{q_1, q_2\}$ (рис. 2).

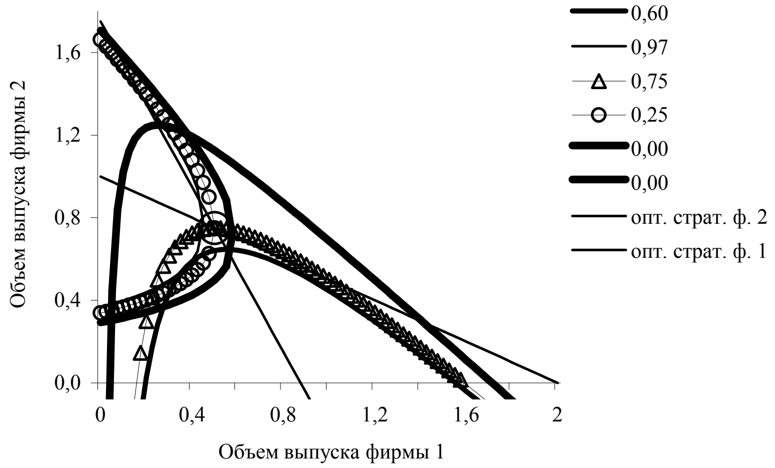


Рис. 2. Кривые постоянной прибыли Штакельберга для фирм дуополии Курно при различных линейных издержках. Параметры модели: a=10; b=4; c_1=3; c_2=2; F_1=0,25; F_2=2

Пара оптимальных стратегий определяется в точке равновесия как пересечение функций реакции первой и второй фирм, в этой же (и только этой[21]) точке кривые постоянной прибыли Штакельберга обеих фирм пересекаются под прямым углом, потому что *в равновесии предположительные вариации равны нулю*, что полностью соответствует предположению Курно о фиксированном выпуске конкурентов.

2.4. Заключение о «парадоксе несоответствия» предпосылки Курно

В общем случае конкуренции n фирм предположение о нулевых вариациях выпуска конкурентов касается только *целевых функций прибыли фирм* и не должно с необходимостью выполняться для условий первого порядка, где это условие уже учтено. Условия первого порядка *в совокупности* определяют равновесные объемы выпуска (если они положительные), так же как в геометрической интерпретации точка пересечения гиперповерхностей (функций реакции) в *пространстве объемов* определяет точку равновесия Курно – Нэша, где частные перекрестные производные функций Штакельберга все равны нулю. Все вышесказанное позволяет сделать вывод, что парадокса «несоответствия» предположений Курно не существует.

3. Равновесие Курно – Нэша и особенности равновесного решения

3.1. Понятие конкурентоспособности фирм

Если существует совершенное знание и стратегическое поведение всех фирм соответствует рассмотренным поведенческим предпосылкам, то оптимальные стратегии фирм (объемы выпуска) могут быть определены как решение системы линейных уравнений для n фирм при условии $q_i > 0$:

(9) $$\sum_{j\neq i} q_j + 2q_i = Q_{ci}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \text{ или эквивалентно}$$

(9a) $$q_i = Q_{ci} - \sum_{j=1}^{n} q_j = Q_{ci} - Q, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В случае произвольного сочетания предельных издержек n фирм *математическое* решение системы уравнений (9), каждое из которых соответствует «функции реакции фирмы», может привести к отрицательным или нулевым значениям выпуска некоторых фирм. С точки зрения *экономических* ограничений это означает, что некоторые фирмы *не конкурентоспособны в равновесии Курно* ($q_i < 0$). Предположение $q_i > 0$ позволяет определить путем суммирования (по всем i) уравнений вида (9a) оптимальный суммарный объем в равновесии Курно, оптимальный объем каждой фирмы из (9a) и ограничение на предельные издержки фирм из условия $q_i^* > 0$. Ограничение на предельные издержки является необходимым условием экономического равновесия и имеет вид

[21] По причине единственности равновесия, как будет показано ниже.

(10) $$c_i < \frac{a + \sum_{j \neq i} c_j}{n}, \quad \text{для каждого} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Определение. Фирмы называются в совокупности конкурентоспособными в равновесии Курно в классе линейных функций спроса и издержек фирм, если для каждой из n фирм выполняется ограничение на предельные издержки (10). В этом случае каждая фирма называется конкурентоспособной.

3.2. Равновесное решение Курно

Теорема 1 (существования и единственности равновесия). При выполнении условий 1–9 подраздела 1.1 и ограничений на предельные издержки (10) равновесие в чистых стратегиях статической игры Курно существует и единственно, а равновесные стратегии определяются выражениями оптимальных объемов:

(11) $$q_i^* = \frac{(n+1) \cdot Q_{ci} - \sum_{j=1}^{n} Q_{cj}}{n+1}, \quad Q_{ci} = \frac{a - c_i}{b}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Схема доказательства.

Система линейных условий первого порядка максимизации прибыли фирм (9) может быть записана в матричной форме. По методу Крамера решение может быть представлено как отношение определителей $q_i^* = \Delta_i(n)/\Delta_0(n)$, где определитель $\Delta_0(n)$ соответствует матрице коэффициентов при неизвестных, а $\Delta_i(n)$ – матрице, полученной из матрицы коэффициентов при неизвестных путем подстановки столбца свободных членов вместо i-го столбца. Для упрощения выкладок рекомендуется предварительно проделать тождественные преобразования системы (9), вычитая их каждой строки предыдущую, начиная со второй строки. Разложением определителя $\Delta_0(n)$ по первой строке можно показать, что он не равен нулю, т.е. *решение единственное*, и равен знаменателю в выражении объемов (11). Достаточно доказать справедливость (11) для $i = 1$, так как симметрия индексов позволяет распространить справедливость решения для первой фирмы на остальные фирмы, изменяя нумерацию фирм. Доказательство того, что определитель $\Delta_1(n)$, равен числителю в (11), может быть получено *методом математической индукции* по размерности определителя n. Решение удовлетворяет требованию неотрицательности объемов $q_i^* > 0$, так как эквивалентно необходимому условию теоремы (10), что можно показать тождественными преобразованиями неравенств $q_i^* > 0$, подставляя выражения Q_{ci} из (3). Таким образом, для конкурентоспособных фирм решение существует и единственное. Неконкурентоспособные фирмы выбирают нулевой выпуск.

3.3. Свойства равновесных решений Курно при линейных функциях спроса и издержек

1) Решение (11) является равновесием Курно, потому необходимые условия теоремы 1 получены при условиях *нулевых предположительных вариаций* (5).

2) В равновесии Курно суммарный объем можно представить в различных эквивалентных выражениях: в зависимости от суммы «совершенно конкурентных» объемов Q_{ci}; в зависимости от среднего значения предельных издержек фирм; а также как разность «совершенно конкурентного» объема любой из фирм и ее оптимального выпуска:

(12)
$$Q^* = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n} Q_{cj} = \frac{n}{b(n+1)}\left(a - \frac{\sum c_i}{n}\right) = Q_{ci} - q_i^* \quad \forall i.$$

Из последнего равенства следует соотношение, которое выполняется для фирм в совокупности: $q_i^* = Q_{ci} - Q^*$. Это означает, что все фирмы одновременно находятся на своих функциях реакции.

В симметричном случае одинаковых издержек фирм выражение оптимального выпуска фирмы приводится к известному виду

(13)
$$q^* = \frac{1}{n+1} Q_c = \frac{a-c}{b\cdot(n+1)}.$$

3) Равновесие Курно является равновесием Нэша. Предположим, что фирма с номером i отклоняется от равновесия (13) на конечную величину: $q_i^* \to q_i^* + \delta$, в то время как остальные фирмы выпускают оптимальные по Курно объемы. В графической интерпретации (рис. 1, 2) точка выпуска переместится по горизонтали вправо или влево от точки равновесия и попадет на более высокую кривую Штакельберга с меньшим уровнем прибыли. В аналитической форме это означает, что оптимальный суммарный объем Q^* изменится на величину δ, и прибыль фирмы уменьшится независимо от знака отклонения δ:

(14)
$$\begin{aligned} \pi_i &= b\cdot\left(Q_{ci} - \left(Q^* + \delta\right)\right)\cdot\left(q_i^* + \delta\right) - F_i = \\ &= b\cdot\left(q_i^* - \delta\right)\cdot\left(q_i^* + \delta\right) - F_i = b\left(q_i^*\right)^2 - F_i - b\delta^2 < \pi_i^*. \end{aligned}$$

Следовательно, стратегия фирмы оптимальна по Нэшу, а равновесие является равновесием Курно − Нэша. В общем случае *равновесие Курно не всегда является равновесием Нэша* (см. Приложение).

4) В случае кусочно-линейных функций спроса в равновесии Курно (если оно существует, см., например, случаи несуществования равновесия в работе Новшека [22, с. 87]) цена зависит от суммы предельных издержек *конкурентоспособных фирм*:

(15)
$$P^* = \frac{a_k + \sum_{i=1}^{n} c_i}{n+1}.$$

5) Оптимальные объемы Курно (11) не зависят от фиксированных издержек фирм, а валовая прибыль *конкурентоспособной* фирмы всегда положительна и равна $b\left(q_i^*\right)^2$. Чистая прибыль $\pi_i^* = b\left(q_i^*\right)^2 - F_i$ конкурентоспособной фирмы зависит от величины фиксированных издержек и может быть отрицательной.

Если фиксированные издержки относятся к типу *квазипостоянных*[22] и приводят к убыткам, фирма, максимизирующая прибыль, не будет производить. Если издержки *постоянные*, то в *рамках неоклассического подхода* мы считаем, что конкурентоспособная фирма всегда будет производить оптимальный объем Курно, потому что даже при наличии убытков положительная валовая прибыль минимизирует убытки в сравнении со случаем прекращения производства[23]. Дополнительные ограничения на фиксированные издержки фирм определяют необходимые условия неотрицательной прибыли конкурентоспособных фирм в равновесии Курно − Нэша:

$$(16) \quad \pi_i^* = b\left(q_i^*\right)^2 - F_i \ge 0 \quad \to \quad F_i \le b\left(q_i^*\right)^2 = \frac{1}{b}\left(\left(a - nc_i + \sum_{j \ne i} c_j\right)/(n+1)\right)^2.$$

6) Проблема убыточности конкурентоспособных фирм может быть рассмотрена в *рамках институционального подхода*. Если в статичной игре конкурируют *одинаковые фирмы,* вопрос о конкурентоспособности не возникает. Если спрос оказался низким и прибыль в равновесии Курно − Нэша не покрывает фиксированные издержки, может существовать область совместных выпусков (в зависимости от величины фиксированных издержек), где прибыль всех фирм положительна. Множество таких точек находятся внутри линзообразной области, ограниченной кривыми нулевой прибыли фирм (см. аналогичные области на рис. 2, где в равновесии Курно − Кэша прибыль фирм положительная, но с ростом фиксированных издержек фирм и изменением «маркировки» кривых постоянной прибыли точка равновесия фирмы может оказаться на кривых отрицательной прибыли). В этом случае во всех точках этой области *предположительные вариации* положительные, а не нулевые, как в равновесии Курно − Нэша. Для одинаковых фирм существует *фокальная точка*, где кривая постоянной прибыли каждой фирмы касается луча из начала координат с наклоном $1/n$ в точке картельного выпуска. В *рамках неоклассической теории* считается, что картельный выпуск неустойчив, и фирме выгодно отклониться в одиночку. Однако в условиях убытков в равновесии Курно − Нэша рациональные фирмы понимают, что если каждая фирма примет решение отклониться от картельного равновесия «оптимальным образом», то убытки каждой из них превысят убытки в точке равновесия Курно − Нэша.

При каких условиях фирмы могут в статической игре выбрать картельное равновесие? Сохранится ли картельное равновесие, если издержки фирм различны и только некоторые «успешные» фирмы не получают убытков в равновесии Нэша? Ответ существует в рамках институционального подхода (в том числе для фирм с различными предельными издержками). Если фирмы заинтересованы в

---

[22] Квазипостоянными называются издержки, которые при положительном выпуске постоянны, а при нулевом выпуске равны нулю, например расходы на электроэнергию при консервации производства.

[23] Аналогичная ситуация может произойти и при единственной фирме. Фирма входит на рынок и узнает, что спрос настолько мал, что монопольный выпуск не покрывает фиксированные издержки. В этом предельном случае по Курно (n = 1) равновесие Нэша совпадает с монопольным выпуском и определяет минимизацию убытков.

ослаблении конкурентов, т.е. *правила*[24)] конкуренции «жесткие», и «успешные» фирмы, получающие положительную прибыль, не заинтересованы в выборе картельного равновесия и предпочитают убытки конкурентов собственному дополнительному выигрышу, тогда убыточным (*но конкурентоспособным*) фирмам также не выгодно отклонятся от равновесия Курно – Нэша. Если *правила* конкуренции «мягкие», то все фирмы предпочитают картельное равновесие.

При различных предельных издержках возникает дополнительный вопрос, каким образом разделить доли рынка при картельном равновесии? Если существует институциональное жесткое правило, например делить рынок пропорционально долям в равновесии Курно – Нэша, то дополнительных соглашений не требуется. Знают ли фирмы, в ситуации жесткой или мягкой конкуренции они находятся? Являются ли нормой поведения *правила* раздела рынка? Если обычаи существуют долго, они очевидны для всех, и подобные деловые обычаи можно включить в категорию *совершенного знания*.

В случае совершенного знания равновесие существует всегда, когда фирмы действут рационально. При картельном равновесии *предположительные вариации ненулевые* и система уравнений (9) и *условия конкурентоспособности фирм* в картельном равновесии имеют иной вид. Пример картельного равновесия при различных предельных издержках фирм приведен на рис. 2, где принято правило раздела рынка пропорционально долям в равновесии Курно – Нэша, и кривые постоянной прибыли Штакельберга касаются луча, проходящего через точку равновесия Курно – Нэша[25)]. Если знание несовершенно, и логика конкурентного поведения фирм не является всеобщим знанием, то даже в условиях полной информации *равновесие в статической игре отсутствует*, а результат выбора не совпадает с ожиданиями фирм (возможно и с ожиданиями нулевых предположительных вариаций).

В *практическом решении* подобных проблем убыточности конкурентоспособных фирм должно участвовать государство путем разумного лицензирования и снижения платы за вход на рынок, в том числе трансакционных издержек и регулирования конкуренции, однако анализ этого вопроса, так же как и вопроса конкурентоспособности в картельном равновесии (например в международных картелях), выходит за рамки настоящей работы.

7) Фирмы, предельные издержки которых не удовлетворяют ограничениям (10), вытесняются в равновесии Курно – Нэша, не конкурируют (не входят в состав игроков), потому что суммарный объем выпуска остальных фирм превышает величину Q_{ci}, а цена ниже предельных издержек. В этом случае на *специфический показатель рассеивания* предельных издержек фирм накладывается ограничение, полученное из (10) при $c_i = c_{max}$:

[24)] Согласно Д. Норту [4] институты определяются как правила игры и механизмы принуждения к их исполнению. Под механизмами принуждения понимаются не только положения гражданского и уголовного права, но также деловые обычаи и действие экономического принуждения и т.п.

[25)] Необходимо заметить, что при «картельном равновесии» цена выше цены в равновесии Курно – Нэша. Поэтому фирма, неконкурентоспособная в равновесии Курно, может, производя некоторый объем, получить положительную валовую прибыль. Картельная цена соответственно понизится.

$$\frac{\sum_{1}^{n}(c_{\max}-c_j)}{n} < \frac{a-c_{\max}}{n}. \qquad (17)$$

3.4. Уточнение теоремы Бергстрома – Вэриана

Результаты анализа распределения предельных издержек в равновесии Курно – Нэша (17) позволяют уточнить теорему Бергстрома и Вэриана, которая приведена ниже в обозначениях оригинала [6, с. 717]:

«**Теорема:** Пусть x_i – выбор агента, X – сумма величин выбора, c_i – некоторая характеристика агента, и C – сумма этих характеристик. Предположим, что величины x_i в равновесии Нэша могут быть выражены как решения уравнений в форме

$$x_i = f_i\,(c_i, X) \text{ для каждого } i = 1, 2, ..., n,$$

где все f_i – непрерывные функции. Тогда достаточные условия независимости равновесной величины X от распределения агентских характеристик определяются линейным видом функций $f_i\,(c_i, X) = a(X) + b(X)\cdot c_i$.

Если n не меньше трех, эти условия также являются необходимыми. Таким образом, изменение (Δc_i), сохраняющее величину C постоянной, будет результатом равновесного отклика $= -b(X)\cdot\Delta c_i$».

Все условия этой теоремы могут быть выполнены для рассмотренной выше задачи Курно. Например, для трех фирм с одинаковыми предельными издержками $c_i = 8{,}8$ на рынке с обратной функцией спроса $P(X)=10 - X$ существует равновесие Курно – Нэша. Однако изменение издержек при постоянной их сумме, например: $c_1 = 8{,}5$; $c_2 = 8{,}5$; $c_3 = 9{,}4$, приводит к распределению характеристик, которое не удовлетворяет необходимому условию существования равновесия трех фирм (17). Равновесие существует для двух фирм, но объем в равновесии Курно – Нэша изменяется.

Утверждение, что сумма переменных выбора x_i (в задаче Курно – объемов выпуска) в равновесии Нэша не зависит от распределения агентских характеристик (в задаче Курно – предельных издержек фирм c_i) и зависит только от их среднего значения, некорректно и должно быть дополнено ограничениями либо на агентские характеристики, либо величины выбора, которые гарантируют экономически осмысленное равновесие. Авторы обращают внимание на возможность подобного случая в задаче Курно [5, с. 715], где оговаривают, что новый оптимальный выпуск фирмы не должен быть отрицательным, однако в теореме это условие не нашло отражения.

3.5. Анализ необходимых условий теоремы существования Новшека

Теорема 3 Новшека [22] утверждает существование равновесия Курно при выполнении необходимых условий. Ниже показано, что необходимые условия теоремы 3 Новшека полностью выполняются для линейных функций издержек и спроса (полные условия приведены в обозначениях оригинала статьи [22, с. 90]):

(1) спрос непрерывный $P(Z) = a - bZ$;

(2) существует точка Z': $Z'= a/b$; $P(Z') = 0$;

(3) условие неположительности функции $P'(Z) + ZP''(Z) = -b < 0$, $Z \in [0, a/b)$;

(4) издержки $C_f = c_f\ y_f + F_f$, $f \in \{1, 2, \ldots n\}$ – неубывающие, непрерывные снизу.

Рассмотрим две фирмы на рынке, где спрос и издержки имеют вид

$$P(Z) = 10 - Z;\ C_1= 2\ y_1;\ C_2 = 6{,}5\ y_2;\ Z= y_1 + y_2.$$

На основании теоремы 3 утверждается, что существует равновесие Курно для дуополии. На самом деле в равновесии Курно на рынке монополия, потому что вторая фирма *неконкурентоспособна.* Аналогичный случай рассмотрен выше, где для трех фирм с различными издержками не существует равновесия, потому что третья фирма неконкурентоспособна, она вытесняется с рынка, и в равновесии Курно вместо трех фирм на рынке дуополия. Нельзя согласиться с Новшеком, что проблема неравновесия зависит исключительно от характера спроса или определяется эндогенным характером числа фирм [22, с. 96–97], причина несоответствий, подобных рассмотренным выше, в том, что необходимые условия теоремы Новшека не полны, также и в теоремах Мак-Мануса или Сидаровски и Яковица (критикуемых Новшеком в [22]) нет ограничений на издержки фирм в зависимости от издержек конкурентов.

Согласно Курно, при увеличении числа *одинаковых* конкурирующих фирм рынок стремится к состоянию «совершенно конкурентного» равновесия, когда цена определяется едиными предельными издержками. При различных издержках фирм это означает, что в равновесии Курно существуют *ограничения конкурентоспособности* на издержки каждой фирмы, определяющие возможность производить в состоянии равновесия ненулевой объем выпуска. Это означает также, что функции реакции фирм (гиперповерхности в пространстве объемов выпуска) должны пересекаться, по крайней мере, в одной общей точке. Если существует равновесие Курно для фирм с одинаковыми издержками, то при «дифференциации» издержек объективно существуют ограничения (или условия конкурентоспособности фирм в равновесии Курно), оставляющие «за границами рынка» фирмы с издержками, которые не соответствуют ограничениям. Отмеченная особенность равновесия Курно важна не только для большого числа фирм (как считает Новшек), и не только для линейных функций спроса и издержек[26].

4. Стратегическая рефлексия в поиске равновесия Курно

4.1. Цель и задача анализа

Курно последовательно рассматривал предполагаемые объемы выпуска двух фирм и отклики, соответствующие условиям первого порядка, чтобы обос-

---

[26] Например, при функции спроса $P(Q) = A - Q^2$ для любого числа фирм с одинаковыми издержками $TC_1 = (1/3)q^3$ или $\mathrm{TC}_2 = 0{,}75A\cdot(q^3 + q)$ существует равновесие Курно – Нэша. Если на том же рынке конкурируют только две фирмы с различными издержками TC_1 и TC_2, то вторая фирма будет неконкурентоспособной. Оптимальной стратегией для первой фирмы будет «выпуск монопольного объема», а для второй фирмы – «не участвовать в конкуренции», потому что любой выпуск принесет ей убытки.

новать существование *статичного* равновесия [1, с. 138]. Подход Курно показал принципиальную возможность использования ментального процесса для поиска равновесия и, по нашему мнению, может рассматриваться как первый вклад[27] в современное направление теории игр – стратегические рефлексивные игры[28].

В отличие от равновесного решения, полученного в классе линейных функций, обобщенные решения в конечном виде для других типов функций спроса и издержек получить технически сложно. Поэтому применение подхода стратегических рефлексивных игр представляется привлекательным методом поиска статичного равновесия, и целью можно считать попытку проанализировать сходимость процессов к известным решениям для различных типов *порядка игры*.

Задача состоит в анализе влияния на сходимость процесса стратегической рефлексии к статическому равновесию Курно – Нэша в условиях предпосылок раздела 1 следующих факторов: 1) участие неконкурентоспособных фирм (игроков); 2) влияние начального выбора игроков; 3) влияние расположения номеров игроков; 4) одновременный, последовательный или последовательно-групповой порядок игры. Первые три фактора при единственном равновесии не должны влиять на сходимость *адекватного*[29] процесса. Известно, что последовательный порядок хода игроков в динамической, повторяемой игре приводит к равновесию Курно – Нэша [14], [17]. В задачах теории хаоса, например, в монографии Пу с учениками [23] в главах 6 и 7 рассматриваются реакции фирм по Курно и по Штакельбергу, установленный процесс анализируется в дискретном времени, и «хаотичность» поведения фирм рассматривается как проникновение в сущность динамического взаимодействия фирм олигополии. В главе 8 рассматриваются модели бизнес-цикла в межрегиональной торговле, где используются уравнения в частных производных и теория сдвоенных осцилляторов считается основополагающей. Затруднительно проводить сравнения, но качественно похожие эффекты расходящегося (хаотичного?) процесса и специфические циклы были получены ниже при анализе стратегических рефлексивных игр одновременного и последовательно-группового порядка.

4.2. Основные определения

1. *Рангом R* называется шаг стратегической рефлексивной игры. $R = 0, 1, 2, \dots$

2. *Периодом цикла рефлексии* называется минимальное число рангов, когда каждый игрок делает один ход. Минимальный период равен 1, если все игроки делают ход «одновременно», а максимальный – равен n, когда ход игрока совпадает с шагом игры.

3. Игры различаются по типу *порядка игры*. Существуют три различных типа игры: *одновременного, последовательного и последовательно-группового поряд-*

---

[27] Соображение относительно *фактического* использования рефлексии в анализе О. Курно высказала к.э.н. Е.Н. Калмычкова при обсуждении его подхода в частной беседе.

[28] Обзор работ по теории рефлексивных игр, включая стратегическую рефлексию, можно найти в работе Новикова и Чхартишвили [3], дополнительные русскоязычные материалы можно найти на сайте Института психологии РАН, в том числе материалы Международной конференции «Мультирефлексивные модели поведения агентов» (1998 г., США).

[29] В данном случае адекватность означает сходимость к решению статичной задачи.

ка с периодами циклов соответственно: минимальным, максимальным и промежуточным.

4. Одновременным порядком игры называется правило игры, когда на каждом шаге, кроме нулевого ранга, все n фирм одновременно оптимизируют свой выбор, каждая делает ход в соответствии со своей функцией реакции, исходя из суммарного объема конкурентов на предыдущем шаге игры. Например, для двух фирм с номерами 1 и 2 (n = 2): порядки 1, 2\ и 2, 1\ не различаются, слеш (\) условно обозначает очередной ранг рефлексии.

5. Последовательным порядком игры называется правило, когда на каждом шаге игры только одна фирма делает ход. Порядок фирм сохраняется с ростом ранга. Например, для двух фирм с номерами 1 и 2 (n = 2): 1\2\ или 2\1\ означают различные последовательные порядки.

6. Последовательно-групповым порядком игры называется правило, когда на очередном шаге игры одновременно несколько фирм делают ход. Распределение фирм по группам и порядок групп сохраняется с ростом ранга. Например, при n = 4: 1, 2\3, 4\ или 2\1\ 3, 4\ или 1, 2, 3\4\, где период цикла изменяется от двух до трех.

4.3. Постановка задачи

4.3.1. Функции реакции фирм как рекуррентные соотношения

Условия 1−9 из первого раздела сохраняются, но фирмы не анализируют конкурентоспособность участников статической (одновременной) игры и не решают системы линейных уравнений. Фирма-субъект ищет решение методом пошаговой рефлексии в условиях эмпатии, предполагая, что фантомные игроки выбирают наилучший отклик, так же как и она сама, поэтому номер фирмы-субъекта не должен иметь значения.

Начальному выбору фирмы (или фирм) приписывается нулевой ранг рефлексии $R = 0$. На начальном шаге игры фирма (или группа фирм, в зависимости от порядка игры) произвольно выбирает ход. Для каждого последующего ранга R предполагается доступность информации об объеме выбора конкурентов на предыдущем шаге, и фирмы мысленно «выбирают» оптимальный отклик в соответствии со своей функцией реакции (7). Если выпуск конкурентов больше «совершенно конкурентного» объема фирмы Q_{ci}, (валовая прибыль отрицательная), тогда фирма «выбирает» нулевой выпуск. Функции реакции (7) рассматриваются как рекуррентные соотношения по рангу рефлексии R. В дальнейшем ранг рефлексии обозначен в выражении нижнего индекса объема выпуска (фирмы, или суммарного выпуска фирм) через дробь. В общем случае рекуррентные соотношения рефлексивной игры имеют вид

$$(18)\qquad q_{i/R} = \begin{cases} \left(Q_{ci} - \left(Q_{R-1} - q_{-i/R-1}\right)\right)/2, & \text{если} \quad \left(Q_{ci} - \left(Q_{R-1} - q_{-i/R-1}\right)\right) > 0 \\ 0, & \text{если} \quad \left(Q_{ci} - \left(Q_{R-1} - q_{-i/R-1}\right)\right) \le 0, \end{cases}$$

где $q_{i/R}$, $q_{i/R-1}$− объемы выпуска фирмы i на шаге R и предыдущем шаге $R-1$;

$Q_{R-1} - q_{i/R-1}$ − объем выпуска конкурентов фирмы i, представленный как разность суммарного выпуска и выпуска фирмы i на предыдущем шаге $R - 1$; $R = 1, 2, 3,\ldots\to\infty$.

4.3.2. Численное моделирование и аналитическое решение

Рекуррентные соотношения позволяют *численно моделировать* процесс рефлексии в зависимости от заданных параметров модели, начального выбора и *порядка игры.* Ранг рефлексии (или шаг размышлений) R в рефлексивных играх формально соответствует текущему (дискретному) моменту времени в динамических системах. Процесс рефлексии рассматривается в n-мерном (фазовом) пространстве объемов выпуска фирм олигополии, где «текущее» состояние процесса определяется точкой, и мы анализируем сходимость процесса к аттрактору типа «узел»[30]. Координаты «узла» определяются объемами равновесия Курно – Нэша (11). Для графического представления процесса рефлексии фирм олигополии используется не фазовое пространство (по техническим причинам), а зависимость объема выпуска фирм от ранга рефлексии.

Теоретически возможно получить аналитическое выражение объема фирмы i для текущего ранга рефлексии, используя рекуррентные соотношения и начальные условия, и проанализировать сходимость процесса, рассматривая предел аналитического выражения объема фирмы i при $R \to \infty$. Если предел не совпадает с выражением (11), то стратегическая рефлексивная игра не может рассматриваться как метод определения статического равновесия. Аналитическое выражение объема получено ниже только для случая игры *одновременного порядка.* Поэтому в качестве основного метода исследования использовался метод численного моделирования.

4.4. Моделирование процесса рефлексии одновременного порядка

Множество возможных объемов выпуска фирмы i (q_i) зависит от параметров спроса и издержек фирмы i. Как будет показано дальше, начальный выбор фирм не влияет на сходимость процесса (за исключением случая точного выбора равновесных по Курно объемов), и им можно пренебречь.

Для построения аналитического выражения объема фирмы на шаге $R + 1$ применяется технически удобные рекуррентные соотношения, соответствующие традиционной (неполной) функции реакции:

(19) $$q_{i/R+1} = (Q_{ci} - (Q_R - q_{i/R})) \ / \ 2 \ .$$

Заметим, что в случае (19) имеют место *адаптивные ожидания*, которые нерациональны в том смысле, что выпуск конкурентов на текущем шаге изменяется и в общем не соответствует ожиданиям. В этом случае фирма не попадает на свою функцию реакции. Предварительно введем сокращающие обозначения констант модели и текущего суммарного объема выпуска:

(20) $$\alpha = \sum_{j=1}^{n} Q_{ci} / 2; \ \ \beta = (n-1)/2; \ \ Q_{R+1} = \sum_{j=1}^{n} q_{j/R+1} \, .$$

Представим бесконечную цепочку рассуждений фирмы, преобразуя рекуррентные соотношения на каждом шаге к начальным данным: параметрам модели

---

30) Типы аттракторов можно найти на сайте: http://www.keldysh.ru/comma/html/ds /index.html

и исходному выбору фирм (табл. 1). Параллельные расчеты текущего выпуска фирм с использованием аналитического и численного рекурсивного метода показывают совпадение результатов и подтверждают корректность формул, приведенных ниже.

Таблица 1.

Оптимальные отклики фирм и суммарный объем в зависимости от ранга рефлексии

Ранг R	Объем выпуска фирмы i $q_{i/R}$	Суммарный объем выпуска Q_R
0	$q_{i/0}$	$Q_0=\sum_{i=1}^{n}q_{i/0}$
1	$q_{i/1}=\left(Q_{ci}-Q_0+q_{i/0}\right)/2$	$Q_1=\alpha-\beta Q_0$
2	$q_{i/2}=\left(Q_{ci}-Q_1+q_{i/1}\right)/2=$ $=Q_{ci}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{Q_1}{2}+\frac{Q_0}{2}\right)+\frac{q_{i/0}}{4}$	$Q_2=\alpha-\beta Q_1=\alpha-\beta\left(\alpha-\beta Q_0\right)=$ $=\alpha\left(1-\beta\right)+\beta^2 Q_0$
3	$q_{i/3}=\left(Q_{ci}-Q_2+q_{i/2}\right)/2=$ $=Q_{ci}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{Q_2}{2}+\frac{Q_1}{4}+\frac{Q_0}{8}\right)+\frac{q_{i/0}}{8}$	$Q_3=\alpha-\beta Q_2=\alpha-\beta\left\{\left[\alpha-\beta\left(\alpha-\beta Q_0\right)\right]\right\}=$ $=\alpha\left(1-\beta+\beta^2\right)-\beta^3 Q_0$
…	…	…
$R+1$	$q_{i/R+1}=\left(Q_{ci}-Q_R+q_{i/R}\right)/2=$ $=Q_{ci}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^R}\right)-$ $-\left(\frac{Q_R}{2}+\frac{Q_{R-1}}{4}+\ldots+\frac{Q_1}{2^{R-1}}+\frac{Q_0}{2^R}\right)+\frac{q_{i/0}}{2^{R+1}}$	$Q_{R+1}=\alpha-\beta Q_R=\alpha\cdot\left[1-\beta+\beta^2\ldots+\left(-\beta\right)^R\right]+$ $+\left(-\beta\right)^{R+1}Q_0=\frac{\alpha}{1+\beta}\left(1-\left(-\beta\right)^{R+1}\right)+\left(-\beta\right)^{R+1}Q_0$

Подставляя выражения суммарного объема выпуска в зависимости от предыдущего ранга рефлексии в выражение выпуска фирмы, преобразуя выражение сумм и вычисляя ряды, получим:

$$
\begin{aligned}
(21)\quad q_{i/R+1}&=Q_{ci}\left(1-\frac{1}{2^{R+1}}\right)-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{R}\left(\frac{\alpha}{1+\beta}\frac{1-\left(-\beta\right)^{R-j}}{2^j}+\left(-\beta\right)^{R-j}Q_0\frac{1}{2^j}\right)+\frac{1}{2^{R+1}}q_{i/0}=\\
&=\left(1-\frac{1}{2^{R+1}}\right)\cdot\left(Q_{ci}-\frac{\alpha}{1+\beta}\right)+\left(Q_0-\frac{\alpha}{1+\beta}\right)\frac{\left(-\beta\right)^R}{2}\sum_{j=0}^{R}\frac{1}{\left(-2\beta\right)^j}+\frac{1}{2^{R+1}}q_{i/0}=\\
&=\left(1-\frac{1}{2^{R+1}}\right)\cdot\left(Q_{ci}-\frac{\alpha}{1+\beta}\right)+\left(Q_0-\frac{\alpha}{1+\beta}\right)\cdot\frac{\left(-\beta\right)^R}{2}\cdot\frac{1-1/\left(-2\beta\right)^{R+1}}{1+1/\left(2\beta\right)}+\frac{1}{2^{R+1}}q_{i/0}.
\end{aligned}
$$

Подставляя в (21) выражения α и β из (20), получим окончательное выражение объема фирмы i в зависимости от начальных данных и от ранга рефлексии:

(22)
$$q_{i/R+1}=\left(1-\frac{1}{2^{R+1}}\right)\cdot\left(Q_{ci}-\frac{\sum_{i=1}^{n}Q_{ci}}{n+1}\right)+$$
$$+\left(Q_0-\frac{\sum_{i=1}^{n}Q_{ci}}{(n+1)}\right)\cdot\left(-\frac{n-1}{2}\right)^R\cdot\left(\frac{1-\left[-1/(n-1)\right]^{R+1}}{1+1/(n-1)}\right)+\frac{1}{2^{R+1}}q_{i/0}.$$

Проанализируем три слагаемых выражения (22).

Объем выпуска фирм при $R \to \infty$ существенно зависит от второго слагаемого. Первое слагаемое в выражении (22) стремится к решению Курно − Нэша (11), а третье слагаемое − к нулю, что в общем случае означает снижение влияния начального выбора фирм при увеличении ранга рефлексии.

В частном случае, если начальный выбор всех фирм точно соответствует равновесным объемам, то величина Q_0 во втором слагаемом совпадает с суммарным объемом равновесия (22). Первый сомножитель второго слагаемого равен нулю, и объем выпуска фирм по сумме первого и третьего слагаемых соответствует равновесию Курно − Нэша и не изменяется при изменении ранга.

Если начальный выбор фирм отличается от равновесного решения, второе слагаемое стремится к нулю с ростом ранга *только при* $n \leq 2$ из-за второго сомножителя. Следовательно, принцип одновременной корректировки в рефлексивных играх олигополии, или *игры одновременного порядка, не приводят к равновесию Курно − Нэша*, за исключением частных случаев монополии и дуополии, и в то же время не отрицают стационарности равновесия *при оптимальном начальном выборе*. Любопытно, что широко распространенный пример конкуренции двух фирм допускает одновременный отклик, не нарушая сходимости к статическому равновесию.

Заметим, что в построении процесса в табл. 1 было использовано традиционное, неполное выражение функций реакции (19), не учитывающее, что если $q_{i/r} > Q_{ci}$, то фирма выбирает нулевой объем. Это сделано из технических соображений упрощения аналитических выкладок, чтобы показать несходимость процесса рефлексии *одновременного порядка.*

При численном моделировании с использованием полной функции реакции (18) это замечание было учтено, т.е. фирмы избегали в последующем периоде отрицательной валовой прибыли, выбирая нулевой объем выпуска. В этом случае процесс с ростом ранга рефлексии принимает вид биений от нуля к монопольным выпускам. На рис. 3б приведены результаты численного моделирования объемов в рефлексивной игре конкурентоспособных фирм, где в качестве начальных объемов выбраны значения, близкие к равновесным с точностью до третьего знака после запятой. Несколько периодов колебания процесса на рис. 3б невелики, но с ростом ранга принимают вид выше упомянутых биений. Результат исследований может быть сформулирован в форме теоремы.

Теорема 2. Сходимость к равновесию Курно − Нэша процесса стратегической рефлексивной игры одновременного порядка, корректируемой на каждом шаге согласно функциям реакции фирм, зависит только от числа фирм. При числе фирм не больше двух процесс сходится, иначе расходится.

Доказательство для случая «традиционной» функции реакции (19) рассмотрено выше на основе анализа зависимости выпуска от ранга игры (22). Численные исследования процесса с использованием полной функции реакции (18) показали, что результат сходимости не изменяется, но колебания процесса приобретают экономически осмысленный характер в пределах (для каждой фирмы) от нуля до монопольного выпуска.

4.5. Моделирование процесса рефлексии последовательного порядка

На начальном шаге рассуждений ($R = 0$) фирма-субъект рассматривает вариант начального выбора фирмы $q_{i/0}$ и на последующих шагах − оптимальный выбор (свой или конкурентов) при фиксированных объемах выпуска остальных фирм. Очередная корректировка объема каждой фирмы проводится *циклически* через n шагов, а ее объем фиксируется на последующие $n - 1$ шагов, когда корректировку поочередно «проводят» все остальные фирмы. Рекуррентные соотношения фирмы k в зависимости от номера цикла рефлексии m, ранга рефлексии $R = mn + k$ и ожидаемого объема выпуска конкурентов определяются аналогично (18) с соответствующей заменой индексов, и функция реакции имеет вид

$$q_{i/R} = q_{k/mn+k} = \begin{cases} q = \left(Q_{ck} - \left(Q_{mn+k-1} - q_{k/(m-1)n+k}\right)\right)/2 & \text{при } q > 0, \\ 0, & \text{при } q \le 0, \end{cases} \tag{23}$$

где $k = 1, 2, \ldots n;$ $m = 0, 1, 2, \ldots \to \infty$;

$Q_{mn+k-1} - q_{k/(m-1)n+k}$ − *рациональные ожидания* объема выпуска конкурентов фирмы k, представленные как разность суммарного выпуска на предыдущем шаге и выпуска фирмы k в предыдущем цикле ($m - 1$); k − номер фирмы; n − число фирм; m − число (и номер) циклов; $mn + k$, $mn + k - 1$ и $(m - 1)n + k$ − номера рангов рефлексии; $q_{k/mn+k}$ и $q_{k/(m-1)n+k}$ − объемы выпуска фирмы k в цикле m и $m - 1$ ($q_{k/(m-1)n+k} = 0$ при $m = 0$);

$Q_{mn+k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} q_{j/mn+j} + \sum_{j=k}^{n} q_{j/(m-1)n+j}$ − суммарный объем, состоящий из объемов ($k - 1$ фирмы), которые выбраны в текущем цикле m, и объемов (остальных фирм), которые выбраны в предыдущем цикле $m - 1$.

В отличие от случая игры одновременного порядка на каждом шаге *ожидания фирмы рациональны*, потому что конкуренты в текущем периоде не изменяют своих объемов и фирма попадает на свою функцию реакции, а процесс соответствует процедуре корректировки объемов, рассмотренной Курно. Результаты численного моделирования различных вариантов ($n < 10$) показали сходимость процесса рефлексии *последовательного порядка* к равновесию Курно − Нэша, независимо от участия в игре неконкурентоспособных фирм: объемы конкурентоспособных фирм стремятся к равновесию, а объемы неконкурентоспособных фирм стремятся к нулю.

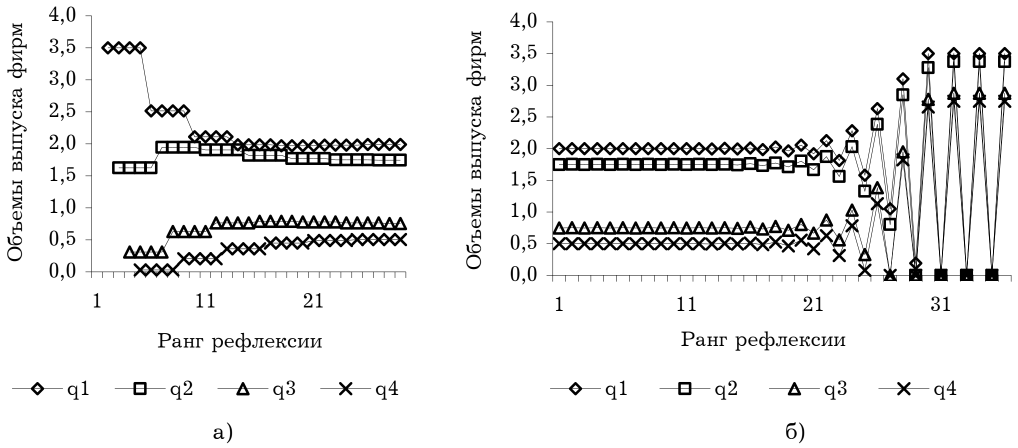


Рис. 3. Сравнение сходимости процессов последовательного (а) и одновременного (б) порядка игры.
Параметры модели: a = 40; b = 4; c_1 = 12; c_2 = 13; c_3 = 17; c_4 = 18

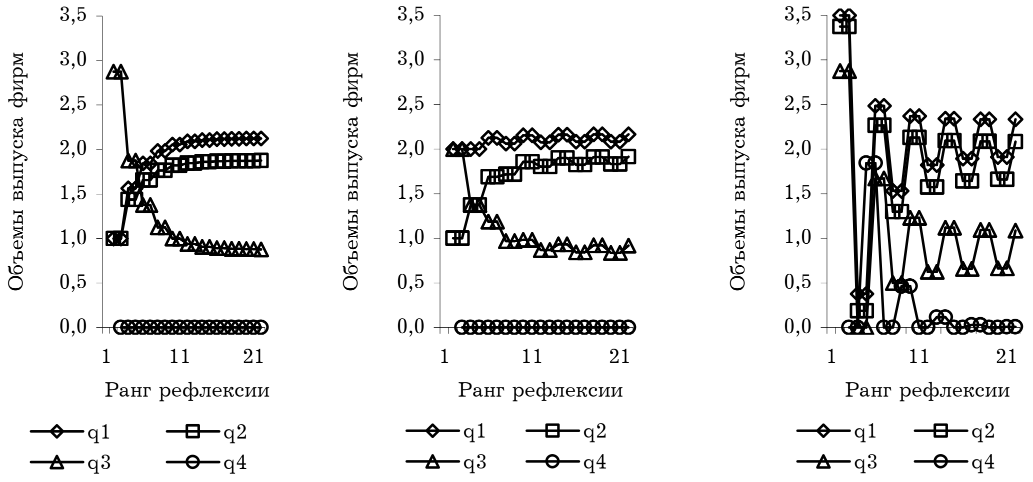
На рис. 3 приведены *фрагменты* процессов игр *последовательного и одновременного порядка* для четырех конкурентоспособных фирм с различными предельными издержками. В игре *последовательного* порядка (рис. 3а) сходимость к равновесным объемам с точностью до трех знаков после запятой была достигнута через 12 циклов. Начиная с 13 цикла моделировалась игра *одновременного порядка* (рис. 3б), что привело к потере стационарности и биениям процесса. Результаты моделирования позволяют сформулировать следующее утверждение 1.

Утверждение 1. Сходимость к равновесию Курно − Нэша процесса стратегической рефлексивной игры последовательного порядка, корректируемой на каждом шаге согласно полным функциям реакции фирм (23), не зависит от числа неконкурентоспособных фирм: объемы конкурентоспособных фирм сходятся к решениям равновесия Курно − Нэша, а объемы неконкурентоспособных фирм стремятся к нулю.

4.6. Моделирование процесса рефлексии последовательно-группового порядка

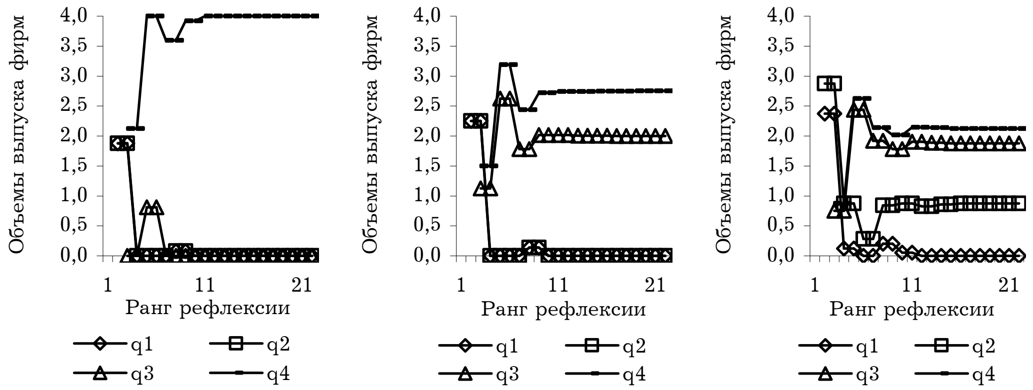
Численные исследования различных вариантов игр последовательно-группового порядка показали, что процесс сходится к равновесному решению, если во всех группах присутствуют конкурентоспособные фирмы. При нарушении этого условия объемы неконкурентоспособных фирм стремятся к нулю с ростом ранга рефлексии, а процесс сходится к аттрактору типа «фокус» с центром в точке равновесия Курно − Нэша. Исключением является случай, когда все группы включают не более двух фирм, и процесс всегда сходится к равновесию Курно − Нэша, независимо от общего числа и распределения по группам неконкурентоспособных фирм.

На рис. 4 приведены результаты численного моделирования игры последовательно-группового порядка четырех фирм. Сначала три фирмы одновременно выбирают начальные объемы выпуска, а на следующем шаге четвертая фирма выбирает объем в соответствии с функцией реакции. Четвертая фирма неконкурентоспособна (ограничение на предельные издержки указано на рис. 4), и объем ее выпуска сходится к нулю. Процесс изменения выпуска остальных фирм сходится к аттрактору типа «фокус» (колебаниям различной амплитуды) в зависимости от начального выбора фирм: к равновесию Курно – Нэша (рис. 4а) или колебаниям различной амплитуды (рис. 4б и 4в).



а) б) в)

Рис. 4. Влияние начального выбора на сходимость в игре последовательно-группового порядка 1, 2, 3\4\: а) $q_{1/0}$=1; $q_{2/0}$=1; $q_{3/0}$=2,875; *б)* $q_{1/0}$=2; $q_{2/0}$=1; $q_{3/0}$=2; *в)* $q_{1/0}$=3,5; $q_{2/0}$=3,375; $q_{3/0}$=2,875. Параметры модели: a=40; b=4; c_1=12; c_2=13; c_3=17; c_4=23>20,5



а) б) в)

Рис. 5. Сходимость к равновесию при изменении числа конкурентоспособных фирм в игре последовательно-группового порядка 1, 2\3, 4\ . Параметры модели: a=40; b=4; *а)* c_1=25>24; c_2=25>24; c_3=25>24; c_4=8; *б)* c_1=22>21; c_2=22>21; c_3=13; c_4=10; *в)* c_1=21>20,5; c_2=17; c_3=13; c_4=12

На рис. 5 приведены результаты численного моделирования рефлексивных игр четырех фирм при последовательной корректировке выпуска двумя группами из двух фирм, которые показывают примеры сходимости процесса к равновесному решению, независимо от числа неконкурентоспособных фирм. Рассмотрены три варианта исходных данных по предельным издержкам, которые подобраны таким образом, что в случае а) три фирмы неконкурентоспособны, в случае б) две фирмы неконкурентоспособны, и в случае в) одна фирма неконкурентоспособна. Ограничения на предельные издержки указаны в параметрах моделей к рис. 5.

Обобщение результатов численных исследований в диапазоне до $n = 9$ позволяют сформулировать утверждение 2.

Утверждение 2. Сходимость к равновесию Курно – Нэша процесса стратегической рефлексивной игры последовательного-группового порядка, корректируемой на каждом шаге согласно полным функциям реакции фирм (23), в общем случае зависит от присутствия конкурентоспособных фирм в группах, начального выбора фирм и не зависит от общего числа неконкурентоспособных фирм. Если в каждой группе не более двух фирм, то процесс сходится всегда: объемы конкурентоспособных фирм стремятся к решениям равновесия Курно – Нэша, а объемы неконкурентоспособных фирм стремятся к нулю. При наличии хотя бы в одной группе больше двух фирм процесс в зависимости от начального выбора фирм может сходиться или совершать циклические колебания относительно точки равновесия с различной амплитудой и частотой колебания, которые стабилизируются.

5. Заключение

Результаты исследования сходимости процесса стратегических рефлексивных игр в классе линейных функций спроса и издержек фирм показали, что

- процесс последовательного порядка всегда сходится к статическому равновесию независимо от числа неконкурентоспособных фирм;
- процесс одновременного порядка расходится при общем числе фирм больше двух, а иначе сходится к статическому равновесию;
- процесс последовательно-группового порядка сходится, если в каждой группе имеется хотя бы одна конкурентоспособная фирма или число фирм в группе не больше двух, а иначе, в зависимости от начального выбора фирм первой группы, или совершает колебания относительно равновесия, амплитуда и период которых стабилизируются, или (в исключительных случаях) сходится к статическому равновесию.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитриев В.К.* Экономические очерки. М.: ГУ ВШЭ, 2001.
2. Математическая энциклопедия. В 5-ти т. М.: Советская энциклопедия, 1982.

3. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Рефлексивные игры. М.: СИНТЕГ, 2003.

4. *Норт Д.* Институты, институциональные изменения и функционирование институциональной экономики / Пер. с англ. под науч. ред. Б.З. Мильнера. М.: Фонд экономической книги «НАЧАЛА». 1997. (http://club.fom.ru/182/179/176/565/library.html).

5. *Boyer M., Moreaux M.* Conjectures, Rationality and Duopoly Theory // International Journal of Industrial Organization. 1983. March. P. 23–42.

6. *Bergstrom T.C., Varian H.R.* When are Nash Equilibria Independent of the Distribution of Agents' Characteristic? // Review of Economic Studies. 1985. P. 715–718.

7. *Bertrand J.* Theorie Mathematique de la Richesse Sociale // Journal des Savants. 1883. № 67. P. 499–508.

8. *Bowley A.* Groundwork of Economics. Oxford: Oxford University Press, 1924.

9. *Bresnahan T.* Duopoly Models with Consistent Conjectures // American Economic Review. 1981. December. P. 934–945.

10. *Bresnahan T.* Duopoly Models with Consistent Conjectures: Reply // American Economic Review. 1983. March. P. 240–241.

11. *Bulow J., Geanakoplos J., Klemperer P.* Multimarket Oligopoly: Strategic Substitutes and Complements // Journal of Political Economy. 1985. Vol. 93. P. 488–511.

12. *Coldwell D.* Consistency of Conjectures in the Conventional Models of Monopoly, Monopolistic Competition, and Perfect Competition // Journal of Economics and Business. 1990. Vol. 42. Iss. 3. P. 195–201.

13. *Cournot A.* Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses. Paris: Hachette, 1838.

14. *Dubey P., Haimanko O., Zapechelnyuk A.* Stratigic Complements and Substitutes, and Potential Games/Ben-Gurion University of the Negev. Israel. 2004. Discusssion Paper № 04-11. (http://www.econ.bgu.ac.il/papers/187.pdf).

15. *Fisher I.* Cournot and Mathematical Economics // Quarterly Journal of Economics. 1898. № 12(2). P. 119–138.

16. *Frisch R.* Monopole-Polypole la Notion de Force dans L'Economie, Festschrift til Harold Westergaard. Supplement to Natiooalekooomisk Tidsskrift. 1933.

17. *Kukushkin N.S.* Best Response Dynamics in Finite Games with Additive Aggregation // Games and Economic Behavior. 2004. № 48. P. 94–110.

18. *Laitner J.* «Rational» Duopoly Equilibria // Quarterly Journal of Economics. 1980. December. P. 641–662.

19. *Martin S.* Advanced Industrial Economics. Oxford: Blackwell Publisher Inc., 1993.

20. *Matsumoto A.* Controlling Cournot–Nash Chaos. Chuo University. Japan. 2004. (www2.tamacc.chuo-u.ac.jp/keizaiken/discussno68.pdf).

21. *Nash J.F.* Non-Cooperative Games// The Annals of Mathematics. 1951. Vol. 54. №. 2. P. 286–295.

22. *Novshek W.* On the Existence of Cournot Equilibrium // Review of Economic Studies. 1985. P. 85–98.

23. *Puu T.* Attractors, Bifurcations, and Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics. Springer, Berlin Heidelberg, 2000.

24. *Rand D.* Exotic Phenomena in Games and Duopoly Models // Journal of Mathematical Economics. 1978. Vol. 5. Iss. 2. P. 173–184.

25. *Stackelberg H.* von. Marktform und Gleichgewicht. Vienna: Springer, 1934.

26. *Ulph D.* Rational Conjectures in the Theory of Oligopoly // International Journal of Industrial Organization. 1983. June. P. 131–135.

Приложение

Пример. Два равновесия Курно – Нэша и одно равновесие Курно на ломаной функции спроса

Рассмотрим конкуренцию по Курно двух фирм на рынке с ломаной функцией спроса. Издержки фирм одинаковые и равны: $TC_i = 3\ q_i$, где i = 1, 2. Для каждого из интервалов изменения объема Q на функции спроса равновесие Курно существует.

$$P(Q) = \begin{cases} 45-7Q, & Q \le 5 \\ 20-2Q, & 5 < Q \le 12/1{,}75 \approx 6{,}86 \\ 8-0{,}25Q, & Q < 12/1{,}75 \approx 6{,}86 \end{cases} \qquad (q_1^*; q_2^*) = \begin{cases} (2; 2), \\ (2{,}83; 2{,}83), \\ (6{,}67; 6;67), \end{cases}$$

где $Q = q_1 + q_2$.

Прибыль фирмы, объем и цена на рынке в точках равновесия Курно приведены в следующей таблице.

	Равновесный рыночный объем Q	Равновесная рыночная цена P	Прибыль одной фирмы в равновесии
1	4,00	17,00	28,00
2	5,67	8,67	16,06
3	13,33	4,67	11,11

Во второй точке равновесия у первой фирмы существует стимул отклониться от равновесия Курно, т.е. выбрать оптимальный (по Штакельбергу) объем q_1 = 1,58, при условии сохранения объема второй фирмы q_2 = 2,83. Это отклонение позволяет обеим фирмам попасть на первый участок спроса в точку Q = 4,42; P=14,08, где прибыль первой фирмы превысит ее прибыль во второй точке равновесия по Курно: 17,55 > 16,06. Таким образом, вторая точка равновесия по Курно не является равновесием по Нэшу. При отклонении первой фирмы прибыль второй фирмы также повысится и будет больше, чем прибыль первой фирмы, потому что ее объем выше.

Первая и третья точки равновесия Курно является равновесием по Нэшу: первая – потому что прибыль максимальная, и любое отклонение снижает прибыль, а третья – потому, что объем выпуска конкурента позволяет переместиться только во вторую область ограничений общего выпуска, однако допустимый объем для фирмы при этом слишком мал, чтобы увеличить прибыль при отклонении.