ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

О естественных терминальных условиях в моделях межвременного равновесия[1)]

Пильник Н.П., Поспелов И.Г.

Статья посвящена исследованию моделей межвременного равновесия. Рассмотрены две модели экономики, в которых действуют два агента: фирма-производитель и собственник-потребитель, агрегированно представляющие производственную и непроизводственную сферы экономики. Основное отличие моделей – описание механизма привлечения фирмой средств собственника. Цель работы – изучение вопроса об эффективности межвременного равновесия, в котором для каждого из агентов поставлены условия роста его капитала. Получено полное решение обеих задач при любых начальных условиях. Исследована возможность воспроизведения оптимального решения при бесконечном горизонте планирования в задаче с конечным горизонтом.

Введение

В динамических моделях экономики, включающих решения оптимизационных задач для всего хозяйства или для отдельных экономических агентов, всегда встает проблема задания терминальных условий, т.е. требований к значениям планируемых переменных за пределами горизонта планирования. В теории эта проблема обычно решается переходом к бесконечному горизонту планирования и доказательством магистральных свойств модели [18, V. 2, Chap. 26]. Однако для прикладных моделей, в которых оптимизационные задачи решаются численно, задачи надо ставить на конечном интервале. Да и в теоретических исследованиях переход к бесконечному горизонту планирования часто требует предварительной постановки задачи на конечном интервале.

Обычно (см., например, [4]) в качестве терминальных условий ставятся ограничения снизу на величину неких активов, требующихся для продолжения де-

1) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта офи 05-01-08045), Российского гуманитарного научного фонда (код проекта 05-01-02113а), по программе государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ-1843.2003.1)

Пильник Н.П. – студент I курса магистратуры ГУ ВШЭ.
Поспелов И.Г. – д.ф.-м.н., профессор, заведующий сектором математического моделирования экономических структур ВЦ РАН, профессор кафедры математической экономики и эконометрики ГУ ВШЭ.

Статья поступила в Редакцию в ноябре 2006 г.

ятельности за горизонтом планирования. Однако такие требования всегда выглядят достаточно произвольно и обычно требуют определенной подгонки, чтобы исключить неестественные решения. Кроме того, если в задаче есть элементы финансового планирования, то требуется не только ограничивать снизу активы, но и ограничивать сверху пассивы, чтобы избежать решений, порождающих «финансовую пирамиду» (no ponci game condition [19]). Использовались и более сложные конструкции терминальных условий в форме требований на упрощенную асимптотику решения за пределами горизонта планирования [8, 7, 9, 5, 10]. Своеобразным выходом из указанного затруднения можно считать и популярную в настоящее время конструкцию моделей с перекрывающимися поколениями [11, 1].

Недавно в [14] были предложены и уже успешно опробованы на практике естественные граничные условия роста капитала. Под капиталом в настоящей работе, как и в [14, 13], понимаются не основные фонды (fixed capital), а собственные средства (own capital) или, иначе, чистые активы (net assets). Важно, что при моделировании оценку чистых активов можно получать не по бухгалтерским правилам, а формально, как нормированный первый интеграл поля экстремалей, отвечающий масштабной симметрии задачи [14, 13]. При этом, как показано в [13] основные бухгалтерские правила исчисления собственных средств, в частности правила переоценки активов, оказываются выполненными автоматически. Ограничение снизу на чистые активы также исключает решения типа финансовой пирамиды. Однако в [14] условие роста капитала использовалось как чисто эвристический прием. В настоящей работе предпринято теоретическое исследование условия роста капитала на примере простой линейной модели межвременного равновесия.

Модель межвременного равновесия [19, 14, 13] предполагает, что описываемые экономические агенты в процессе планирования используют, а в процессе взаимодействия согласуют не только текущие, но и будущие значения информационных переменных (цен, процентов, курсов и т.п.). В общем случае, детерминированная модель межвременного равновесия строится по следующей схеме [14, 13]:

- выделяется некоторый набор экономических агентов, каждый из которых определяет текущие и будущие спрос и предложение на материальные блага и финансовые инструменты так, чтобы максимизировать свой функционал полезности при присущих агенту технологических и институциональных ограничениях и при известных текущих и будущих значениях информационных переменных, заданных как произвольные функции времени;
- фактическое производство и распределение благ, а также фактические значения информационных переменных определяются из условия равенства спроса и предложения в текущий и все будущие моменты времени.

Здесь не место обсуждать вопрос о реалистичности предпосылок концепции межвременного равновесия. Заметим только, что а) модель межвременного равновесия позволяет дать полностью самосогласованный прогноз конъюнктуры; б) модели межвременного равновесия широко используются в теоретических исследованиях [19]; в) как оказалось, модель межвременного равновесия может описывать и реальные переходные процессы в российской экономике [13]. Заметим еще, что реалистичные макромодели межвременного равновесия получаются, когда модельные агенты представляют не отдельных хозяйствующих субъектов, а их большие совокупности, например всех производителей отрасли.

В настоящей работе используется рассмотренная в [3] однопродуктовая модель экономики, в которой действуют два агента: фирма-производитель и собственник-потребитель, агрегированно представляющие производственную и непроизводственную сферы экономики. Преимущество этой модели в том, что благодаря сильно упрощенному описанию экономических процессов в ней удается аналитически исследовать не только стационарные режимы, но и переходные процессы.

Цель работы – изучение вопроса об эффективности межвременного равновесия, в котором для каждого из агентов поставлены условия роста его капитала. Для модели, предложенной в [3], ответ на поставленный вопрос оказывается отрицательным. Условия роста капитала позволяют воспроизвести оптимальную по потреблению траекторию как траекторию межвременного равновесия только на конечном отрезке времени.

В [13] показано, однако, что упомянутая выше величина капитала позволяет по-новому описать процесс взаимодействия собственника и фирмы, находящейся в его собственности. Соответствующая модификация однопродуктовой модели экономики с двумя агентами проводится в разд. 4. В модифицированной модели траектории с бесконечным горизонтом планирования оказываются оптимальными по потреблению и их можно воспроизвести в модели с конечным горизонтом планирования, если подходящим образом задать средние темпы роста капиталов агентов.

1. Модель межвременного равновесия с условиями роста капитала

1.1. Описание функционирования экономики

Рассмотрим замкнутую рыночную экономику без участия государства, в которой производится единственный однородный продукт, который может быть использован на потребление и накопление. Единственным фактором производства служат капитальные затраты этого же продукта. Производственная функция считается линейной, а капитальные затраты – обратимыми. Функционирование экономики описывается в непрерывном времени[2)], причем временное равновесие рассматривается на конечном периоде времени $[0, T]$. Поскольку рассматриваемые модели линейны, фактически тот же результат, только в более громоздкой форме получится, если перейти к дискретному описанию, заменив производные по времени приращениями, а интегралы – суммами.

В описанных предположениях основной макроэкономический баланс приобретает вид

$$Y(t) = C(t) + b\frac{d}{dt}Y(t)\,, \tag{1.1}$$

где $Y(t)$ – реальный ВВП, $C(t)$ – реальное потребление, $b\frac{d}{dt}Y(t)$ – реальные инвестиции. Инвестиции обеспечивают прирост выпуска, а их эффективность харак-

[2)] Непрерывное время здесь мы используем исключительно потому, что работать с интегралами проще, чем с суммами, а конечные выражения получаются компактнее и нагляднее. В постановках задач и результатах производные и интегралы можно считать просто сокращенными обозначениями для разностей и сумм.

теризуется постоянным коэффициентом приростной фондоемкости *b*. В Приложении показано, как согласовать это описание со стандартной моделью экономического роста. Обратим только внимание на то, что при принятом описании выпуск $Y(t)$ оказывается фазовой переменной − фактически производственной мощностью, − так что для него должно быть задано начальное условие.

Обратимость капиталовложений означает, что мы допускаем отрицательные значения $b\frac{d}{dt}Y(t)$, т.е. считаем, что производственные мощности, созданные за счет капитальных затрат, могут быть мгновенно и без потерь превращены обратно в продукт, из которого были созданы. Это предположение сильно упрощает модель, поскольку исключает переключение оптимальных режимов накопления в конце планового периода. Поскольку этот конец совершенно условный, а на большей части траектории, инвестиции оказываются положительными, такое упрощение представляется вполне допустимым.

Объем производства, потребления и накопления в каждый момент времени определяется двумя агентами: потребителем-собственником и фирмой-производителем. Агенты взаимодействуют на двух рынках: товарном рынке, на котором произведенный фирмой продукт делится на потребление и накопление, и фондовом рынке, где определяются сбережения, инвестиции и доходы потребителя.

Производство и капитальные затраты осуществляет фирма. Фирма располагает неотрицательным запасом денег $W(t)$ и имеет обязательства перед собственниками (акции) в объеме $A(t)$, по которым она выплачивает дивиденды в сумме $Z(t)$ в единицу времени. Средства на инвестиции и выплату дивидендов приносит продажа произведенного продукта $Y(t)$ по цене $p(t)$ на товарном рынке, а также продажа выпущенных акций $\frac{d}{dt}A(t)$ на фондовом рынке по курсу $s(t)$. В результате запас денег фирмы изменяется со временем в соответствии с уравнением финансового баланса

$$\frac{d}{dt}W(t) = p(t)Y(t) - Z(t) + s(t)\left(\frac{d}{dt}A(t)\right) - p(t)b\left(\frac{d}{dt}Y(t)\right). \tag{1.2}$$

Собственник-потребитель, который в модели представляет всю совокупность домашних хозяйств в экономике, располагает неотрицательными запасами денег $M(t)$ и акций $S(t)$. Каждая акция приносит в единицу времени доход $r(t)$. На полученные доходы собственник приобретает на товарном рынке потребительский продукт $C(t)$ по цене $p(t)$, а на фондовом рынке новые акции $\frac{d}{dt}S(t)$ по курсу $s(t)$. Поэтому изменение запаса денег у собственника описывается уравнением финансового баланса

$$\frac{d}{dt}M(t) = r(t)S(t) - s(t)\left(\frac{d}{dt}S(t)\right) - p(t)C(t)\cdot \tag{1.3}$$

Поскольку, кроме собственника, других держателей акций в рассматриваемой экономике нет, собственник должен скупить все выпущенные фирмой акции

$$S(t) = A(t), \tag{1.4}$$

а все выплаченные фирмой дивиденды должны быть распределены по этим акциям

$$r(t)S(t) = Z(t). \tag{1.5}$$

Легко видеть, что из финансовых балансов (1.2), (1.3) в силу (1.1), (1.4), (1.5) следует тождество (закон Вальраса)

$$\frac{d}{dt}M(t) + \frac{d}{dt}W(t) = 0, \tag{1.6}$$

которое означает, что суммарный запас денег у агентов не меняется.

Запасы денег агентам в модели по существу не нужны (деньги вполне ликвидны). Поэтому естественно считать начальные запасы $M(0)$ и $W(0)$ равными 0. Тогда из тождества (1.6) и требования неотрицательности $M(t)$ и $W(t)$ получится, что

$$M(t) = 0, \quad W(t) = 0 \text{ при всех } t \in [0,T]. \tag{1.7}$$

Тем не менее при анализе задач межвременного равновесия, в которых агенты планируют свои запасы независимо друг от друга, удобнее использовать балансы в общей форме (1.2), (1.3), а соотношение (1.7) рассматривать как одно из условий согласования планов агентов.

1.2. Описание поведения фирмы

Предполагается, что фирма действует в интересах акционеров, стремясь максимизировать полезность их будущих реальных доходов $R(t)$.

$$\int_0^T V(R(t))e^{-\Delta t}dt \to \max, \tag{1.8}$$

где Δ − предпочтение времени, а

$$R(t) = \frac{Z(t)}{p(t)}. \tag{1.9}$$

В качестве функции полезности $V(\cdot)$ рассматриваем функцию с постоянным относительным отвращением к риску (CRRA):

$$V(R) = \frac{R^{(1-B)}}{1-B}, \text{ при } B \neq 1; \qquad V(R) = \ln(R) \text{ при } B = 1, \tag{1.10}$$

где $B > 0$ − относительное отвращение к риску по Эрроу − Пратту.

Величины

(1.11) $$A(t) \geq 0, \quad W(t) \geq 0, \quad Y(t) \geq 0, \quad Z(t) \geq 0.$$

при заданных начальных значениях

(1.12) $$W(0) = 0, \quad A(0) \geq 0, \quad Y(0) \geq 0,$$

фирма может планировать по своему усмотрению в рамках баланса (1.2) на интервале [0, *T*]. В частности, мы не накладываем ограничений на целевое использование средств от продажи акций и, таким образом, не исключаем возможности организации «пирамиды»: выплаты дивидендов по старым акциям за счет продажи новых. Кроме того, допускается скупка фирмой собственных акций ($\frac{d}{dt}A(t) < 0$).

Что происходит после момента *T*, нас не интересует. Однако мы будем требовать, чтобы фазовые переменные в конце процесса удовлетворяли линейному терминальному ограничению

(1.13) $$W(T) + a_A(T)A(T) + a_Y(T)Y(T) \geq \gamma_W(W(0) + a_A(0)A(0) + a_Y(0)Y(0)).$$

Условие (1.13) − это единственное отличие описания поведения фирмы в данной модели от его описания в модели, рассмотренной в [3], где использовался частный случай при $\gamma_W = 0$. (Если совсем не накладывать терминальных ограничений, задача фирмы не будет иметь решений с «хорошими» двойственными переменными.) Условие (1.13) − это и есть упоминавшееся во введении условие роста капитала. Мы, однако, не можем ставить его в явном виде, поскольку выражение для капитала выясняется только в процессе решения задачи. Поэтому в начале мы ставим условие роста некой линейной формы фазовых переменных $W(t) + a_A(t)A(t) + a_Y(t)Y(t)$, а потом придаем коэффициентам этой формы согласованные значения.

В этой процедуре, по существу, нет произвола. Как мы увидим ниже, для разрешимости задачи фирмы необходимо, чтобы коэффициенты $a_A(T)$, $a_Y(T)$ в (1.13) определенным образом выражались через информационные переменные $p(T)$ и $s(T)$. Если допустить, что $a_A(0)$, $a_Y(0)$ таким же образом выражаются через $p(0)$ и $s(0)$, то условие (1.13) превратится в условие роста капитала фирмы.

Задача фирмы − это задача оптимального управления (1.8) при ограничениях (1.9), (1.2), (1.11), (1.13). Ее решение должно определить

- предложение продукта $Y(t)$ и спрос на фондообразующий продукт $b\frac{d}{dt}Y(t)$

на товарном рынке;

- предложение акций $A(t)$ на фондовом рынке;
- план выплаты дивидендов $Z(t)$;
- спрос фирмы на деньги $W(t)$

в каждый момент времени $t \in [0, T]$ в зависимости от прогноза цены $p(t)$ и курса акций $s(t)$ на весь период [0, *T*].

1.3. Описание поведения собственника

Предполагается, что собственник ведет себя рационально. Он стремится максимизировать полезность своего будущего реального потребления $C(t)$.

(1.14) $$\int_0^T U(C(t))e^{-\delta t}dt \to \max;\ U(C)=\frac{C^{(1-\beta)}}{1-\beta} \text{ при в} \neq 1,$$
$$U(C)=\ln(C) \text{ при в} = 1,$$

где δ − предпочтение времени, а β − отвращение к риску.

Собственник решает задачу (1.14) за счет выбора величин

(1.15) $$M(t)\geq 0,\quad S(t)\geq 0,\quad C(t)\geq 0$$

в рамках баланса (1.3) при заданных начальных условиях

(1.16) $$M(0)=0,\quad S(0)\geq 0.$$

Как и в задачу фирмы, в задачу собственника мы включаем линейное терминальное условие общего вида

(1.17) $$M(T)+a_S(T)S(T)\geq \gamma_M(M(0)+a_S(0)S(0)).$$

Это ограничение подобно (1.13). Оно отличает описание поведения собственника в данной работе от описания поведения собственника в работе [3]. Ограничение (1.17) превращается в условие роста капитала собственника, если выразить коэффициент $a_S(t)$ через информационные переменные так, как этого требуют в момент $t=T$ условия разрешимости задачи.

Задача собственника − это, по сути, стандартная задача выбора оптимального разделения дохода на потребление и накопление. Именно это − задача оптимального управления (1.14) при ограничениях (1.15), (1.3), (1.17). Ее решение задает

- спрос на потребительский продукт $C(t)$ на товарном рынке;
- спрос на акции $S(t)$ на фондовом рынке;
- спрос собственника на деньги $M(t)$

в каждый момент времени $t\in[0,T]$ в зависимости от прогноза цены $p(t)$, доходности $r(t)$ и курса акций $s(t)$ на весь период [0, T].

1.4. Условия равновесия

Главное предположение модели межвременного равновесия состоит в том, что прогнозы и планы агентов оправдываются. Это означает, во-первых, что цену и курс агенты прогнозируют одинаково, что мы неявно уже предполагали выше, когда одинаково обозначали цену и курс в задачах фирмы и собственника. Во-вторых, оправдание планов означает, что планы агентов удовлетворяют соотношениям балансов (1.1), (1.4), (1.5).

Содержательно эти балансы описывают результаты взаимодействия агентов в рамках определенных институтов. Баланс (1.1) означает выравнивание предложения продукта фирмой $Y(t)$ и спроса на потребительский продукт со стороны собственника $C(t)$, а также спроса на фондообразующий продукт $b\frac{d}{dt}Y(t)$ со стороны фирмы в процессе обмена продукта на деньги на товарном рынке. Аналогично баланс (1.4) описывает результат выравнивания спроса собственника на акции $S(t)$ и предложения акций фирмой $A(t)$ в процессе обмена акций на деньги на фондовом рынке.

Особо следует остановиться на балансе (1.5). Он тоже описывает результат взаимодействия агентов, но уже не обмена, а передачи доходов по праву собственности. Если бы собственник у фирмы был фактически один, то естественнее было бы предполагать, что он знает не доходность $r(t)$, а сам поток дивидендов $Z(t)$. Для таких условий информированности собственника тоже можно построить модель равновесия, но результат будет иной, нежели тот, что излагается ниже. Таким образом, несмотря на предельную агрегированность рассматриваемой модели, записывая соотношение (1.5), мы все же учитываем фактическую множественность собственников и возможность торговать правами собственности.

2. Решение задачи о межвременном равновесии

2.1. Решение задачи фирмы

Метод решения такой же, как в [3] или ниже в разделе 4.3, поэтому здесь представим лишь результаты.

Задача фирмы разрешима, только если выполнены условия А) – Д).

А) Информационные переменные: курс акций $s(t)$ и цена $p(t)$ удовлетворят соотношению

(2.1) $$s(t) = s(0)e^{\frac{t}{b}}e^{\int_0^t \iota(u)du}, \quad \iota(t) = \frac{1}{p(t)}\frac{d}{dt}p(t) > -\frac{1}{b}.$$

Последнее неравенство на **темп инфляции** $\iota(t)$ означает, что на равновесной траектории не может быть слишком сильной дефляции.

Б) Коэффициенты терминального условия (1.13) согласованны с информационными переменными:

(2.2) $$a_A(T) = -s(T), \quad a_Y(T) = p(T)b.$$

На выбор коэффициентов в правой части (1.13) никаких требований не возникает, но в свете соотношений (2.2) естественно положить $a_A(0) = -s(0)$, $a_Y(0) = p(0)b$. Тогда терминальное ограничение задачи фирмы (которое, как показано в [3] выполняется как равенство) принимает вид

(2.3) $$\Omega_W(T) = \gamma_W \Omega_W(0),$$

где

(2.4) $$\Omega_W(t) = W(t) + p(t)\,b\,Y(t) - s(t)\,A(t)\,.$$

Величина $\Omega_W(t)$ характеризует чистые активы **(собственный капитал)** фирмы, а терминальное условие (2.3) оказывается условием на их рост.

В) Коэффициент терминального условия γ_W удовлетворяет неравенству

(2.5) $$0 \le \gamma_W \le e^{\frac{T}{b}} e^{\int_0^T \iota(u)du}\,.$$

Г) $W(0) = 0$, что согласуется с (1.7).

Д) Начальный капитал фирмы положителен:

(2.6) $$\Omega_W(0) > 0\,.$$

При задании граничного условия в виде (2.3) и выполнении условий (2.1), (2.5), (2.6) и $W(0) = 0$ задача фирмы имеет решение, но оно не единственно. На оптимальной траектории однозначно определяются поток дивидендов

(2.7) $$Z(t) = \Omega_W(0)\frac{1 - b\Delta - B}{Bb}\,\frac{e^{\frac{1-b\Delta}{Bb}t} e^{\int_0^t \iota(u)du}}{e^{\frac{1-b\Delta-B}{Bb}T} - 1}\left(1 - \frac{\gamma_W}{e^{\frac{T}{b}} e^{\int_0^t \iota(u)du}}\right),$$

величина капитала

$$\Omega_W(t) = \Omega_W(0) e^{\frac{t}{b}} e^{\int_0^t \iota(u)du}\left(1 - \frac{e^{\frac{1-b\Delta-B}{Bb}t} - 1}{e^{\frac{1-b\Delta-B}{Bb}T} - 1}\left(1 - \frac{\gamma_W}{e^{\frac{T}{b}} e^{\int_0^t \iota(u)du}}\right)\right),$$

и запас денег $W(t) = 0$.

Выпуск же продукции $Y(t)$ и предложение акций $A(t)$ могут быть любыми, удовлетворяющими условию (2.4). Такое положение дел типично для линейных задач с неограниченными управлениями: задача разрешима только при определенном соотношении коэффициентов, но тогда ее решение не единственно. С экономической точки зрения это означает, что функции предложения продукта и акций фирмой бесконечно эластичны (см. [6]).

На оптимальной траектории выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt}\Omega_W(t) = \rho_W(t)\Omega_W(t) - Z(t)\,, \quad \rho_W(t) = \frac{1}{b} + \iota(t)\,,$$

экономический смысл которого вполне прозрачен. Собственный капитал фирмы растет за счет своей **доходности** $\rho_W(t)$ и уменьшается за счет потока распределения прибыли $Z(t)$. Заметим, что в силу соотношения (П.7, см. Приложение), которое фактически является выражением для предельной доходности капитала, реальная доходность $\rho_W(t) - \iota(t) = 1/b$, как и следовало ожидать, совпадает с предельной производительностью фондов (П.7, см. Приложение).

2.2. Решение задачи собственника

Метод решения такой же, как в [3], или ниже в разделе 4.7. Задача собственника разрешима только при выполнении условий А) − Г).

А) Коэффициенты терминального условия (1.17) согласованны с информационными переменными:

$$a_S(T) = s(T).$$

Снова, полагая по аналогии $a_S(0) = s(0)$, приходим к выражению терминального ограничения задачи собственника в виде

$$\Omega_M(T) = \gamma_M \Omega_M(0), \tag{2.8}$$

где

$$\Omega_M(t) = M(t) + s(t)S(t) \tag{2.9}$$

чистые активы собственника.

Б) Коэффициент терминального условия γ_M удовлетворяет неравенству

$$0 \le \gamma_M \le e^{\int_0^T \frac{r(u)}{s(u)} du} e^{\frac{T}{b}} e^{\int_0^T \iota(u) du}. \tag{2.10}$$

В) $M(0) = 0$, что согласуется с (1.7).

Г) Начальный капитала собственника неотрицателен[3]:

$$\Omega_M(0) \ge 0.$$

При задании граничного условия в виде (2.8) с (2.10) и $M(0) = 0$ задача собственника имеет единственное решение

$$C(t) = \frac{\Omega_M(0)\left(e^{\int_0^T \left(\frac{r(u)}{s(u)} + \frac{1}{s(u)}\frac{d}{dt}s(u)\right)du} - \gamma_M\right)}{\int_0^T p(u)\left(e^{\int_0^u \frac{r(v)}{s(v)}dv}\right)^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{1-b\delta}{b\beta}u} e^{\int_u^T \left(\frac{r(v)}{s(v)} + \frac{1}{s(v)}\frac{d}{dt}s(v)\right)dv} du} \left(e^{\int_0^t \frac{r(u)}{s(u)}du}\right)^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{1-b\delta}{b\beta}t},$$

[3] В отличие от задачи фирмы, в задаче собственника существует решение при нулевом начальном капитале, но это решение нерегулярное в смысле [3]. При $\Omega_M(0) = 0$ получаем, что $C(t) = 0$, и это решение оптимально просто потому, что остается единственным допустимым.

где $S(t)=\left(S(0)-\frac{p(0)C(0)}{s(0)}\int_0^t\left(e^{\int_0^u\frac{r(v)}{s(v)}dv}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}e^{\frac{1-b\delta-\beta}{b\beta}u}du\right)e^{\int_0^t\frac{r(u)}{s(u)}du}$, $M(t)=0$.

На оптимальной траектории выполняются соотношения

$$\frac{d}{dt}\Omega_M(t)=\rho_M(t)\Omega_M(t)-p(t)C(t)\,,\ \rho_M(t)=r(t)+\frac{1}{s(t)}\frac{d}{dt}s(t)\,. \tag{2.11}$$

В экономической практике не принято подсчитывать чистые активы агентов-потребителей (домохозяйств, государства и т.д.). Соотношения (2.11), однако, показывают, что теоретически такой подсчет вполне осмыслен. Чистые активы собственника снова растут за счет доходности $\rho_M(t)$, которая, как и должно быть для ценных бумаг, складывается из нормы номинальных выплат и темпа роста курса. Убывают чистые активы за счет **полезных расходов** собственника, т.е. расходов, которые он стремится максимизировать. В данном случае полезными являются потребительские расходы $p(t)C(t)$, и в этом смысле, они в рамках модели вполне аналогичны дивидендам фирмы (ср. (1.8) и (1.14)).

2.3. Описание равновесия

Траектории цен $p(t)$, курса акций $s(t)$ и нормы дивидендов $r(t)$ должны определится из балансов (1.1), (1.4), (1.5). Но $s(t)$ уже связано с $p(t)$ соотношением (2.1), которое должно выполняться в равновесии, чтобы предложения продукта и акций фирмой могли быть положительными и конечными. Поэтому фактически из условий равновесия определяются величины $Y(t)$ и $r(t)$. Величина $p(t)$ остается неопределенной, поскольку в силу закона Вальраса одно из условий равновесия следует из остальных.

Удобно, как и в [6], ввести величину

$$G(t)=e^{\int_0^t\frac{r(u)}{s(u)}du}\,. \tag{2.12}$$

Для нее получается замкнутое нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\Omega_M(0)\frac{d}{dt}G(t)\left(1-\overline{\gamma}_M\frac{\int_0^t\left(G(t)\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}e^{\frac{1-b\delta-\beta}{b\beta}u}du}{\int_0^T\left(G(t)\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}e^{\frac{1-b\delta-\beta}{b\beta}u}du}\right)= \tag{2.13}$$

$$=\Omega_W(0)\frac{1-b\Delta-B}{Bb}\frac{e^{\frac{1-b\Delta-B}{Bb}t}}{e^{\frac{1-b\Delta-B}{Bb}T}-1}\overline{\gamma}_W\,,$$

где

$$\overline{\gamma}_W = 1 - \frac{\gamma_W}{e^{\frac{T}{b}} e^{\int_0^T \iota(u)du}}, \quad \overline{\gamma}_M = 1 - \frac{\gamma_M}{G(T) e^{\frac{T}{b}} e^{\int_0^T \iota(u)du}}, \tag{2.14}$$

и начальное условие

$$G(0) = 1. \tag{2.15}$$

Система (2.13)–(2.15) легко решается в частном случае логарифмической полезности собственника, т.е. при $\beta = 1$. Вопрос о ее разрешимости в общем случае остается открытым. Уравнение (2.13), правда, сводится к дифференциальному уравнению Абеля, но оно не решается в квадратурах [6].

Остальные искомые величины, как и в [6], выражаются через решение системы (2.13)–(2.15) и произвольно заданную траекторию изменения цен $p(t)$, удовлетворяющую неравенству в (2.1).

$$C(t) = \frac{s(0)S(0)}{p(0)} \overline{\gamma}_M \frac{\left(G(t)\right)^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{1-b\delta}{b\beta}t}}{\int_0^T \left(G(t)\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} e^{\frac{1-b\delta-\beta}{b\beta}u} du}, \tag{2.16}$$

$$S(t) = S(0) \left(1 - \overline{\gamma}_M \frac{\int_0^t \left(G(t)\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} e^{\frac{1-b\delta-\beta}{b\beta}u} du}{\int_0^T \left(G(t)\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} e^{\frac{1-b\delta-\beta}{b\beta}u} du} \right) G(t). \tag{2.17}$$

$$Y(t) = \frac{\Omega_M(0)}{bp(0)} G(t) e^{\frac{t}{b}} \left(1 - \overline{\gamma}_M \frac{\int_0^t \left(G(t)\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} e^{\frac{1-b\delta-\beta}{b\beta}u} du}{\int_0^T \left(G(t)\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} e^{\frac{1-b\delta-\beta}{b\beta}u} du} \right) + \frac{\Omega_W(0)}{bp(0)} e^{\frac{t}{b}} \left(1 - \frac{e^{\frac{1-b\Delta-B}{Bb}t} - 1}{e^{\frac{1-b\Delta-B}{Bb}T} - 1} \overline{\gamma}_W \right). \tag{2.18}$$

По сравнению с [6] в эти выражения дополнительно входят величины (2.14), для которых в силу (2.5), (2.10) справедливы неравенства:

$$0 \le \overline{\gamma}_W \le 1, \quad 0 \le \overline{\gamma}_M \le 1. \tag{2.19}$$

3. Эффективность межвременного равновесия

3.1. Задача оптимального планирования потребления

Теперь сравним равновесную траекторию потребления с той траекторией потребления, которая получится, если собственник может непосредственно планировать производство в соответствии со своими интересами. В этом случае собственник решает задачу (1.14) за счет выбора величин $C(t)$, $Y(t)$ в рамках баланса (1.1) при заданном начальном условии $Y(0) \geq 0$.

Такая задача планирования производства в интересах потребителя хорошо известна. Ее решение представлено, в частности, в [3]. Задача планирования используется для выяснения вопроса об эффективности рыночных механизмов регулирования экономики. Если равновесие дает ту же траекторию, что и идеальный план, то рынок эффективен, если нет, то − нет. В [3] показано, что при $\gamma_M = \gamma_W = 0$ межвременное равновесие неэффективно. Выясним, можно ли обеспечить эффективность выбором других значений γ_M, γ_W в граничных условиях (2.3), (2.8).

При этом поставим более жесткий критерий эффективности. Горизонт T в задаче планирования − величина чисто условная. Разумных результатов следует ожидать, только когда он достаточно велик. Поэтому будем сравнивать равновесные траектории на отрезке [0, T] с траекториями производства и потребления, которые являются пределами решений задачи планирования при стремлении горизонта планирования к бесконечности $T \to +\infty$.

Предельные траектории в задаче планирования, как известно, бывают двух типов в зависимости от соотношения параметров модели. Если $1 - b\delta - \beta > 0$, то оптимальным планом при $T \to +\infty$ будет так называемый режим с отложенным потреблением.

$$C(t) = 0, \quad Y(t) = Y(0)e^{\frac{t}{b}}. \tag{3.1}$$

Если же $1 - b\delta - \beta < 0$, то оптимальным планом при $T \to +\infty$ будет траектория вида

$$C(t) = Y(0)\frac{b\delta + \beta - 1}{\beta}e^{\frac{1-b\delta}{b\beta}t}, \quad Y(t) = Y(0)e^{\frac{1-b\delta}{b\beta}t}. \tag{3.2}$$

3.2. Моделирование эффективных траекторий равновесными

Итак, нас интересует, можно ли задать параметры γ_M, γ_W в граничных условиях (2.3), (2.11) так, чтобы равновесная траектория на конечном отрезке времени давала такое же потребление собственника на этом отрезке, которое предписывает оптимальный план (3.1), (3.2).

Из (2.16) видно, что потребление выходит на режим с отложенным потреблениям только при $\overline{\gamma}_M = 0$, т.е. при

(3.3) $$\gamma_M = G(T)e^{\frac{T}{b}}e^{\int_0^T \iota(u)du}.$$

При этом условии (2.13) легко решается, и мы определим функцию $G(t)$. Если подставить полученное решение в (2.18), то с учетом (3.3) мы получим (3.1). Таким образом, условия (3.3) достаточно для моделирования части эффективной, с точки зрения потребителя, траектории в модели с любым конечным горизонтом планирования *T*. По-другому обстоит дело со случаем $1 - b\delta - \beta < 0$. Сравнивая выражения (3.2) и (2.16), заключаем, что функция $G(t)$ должна быть постоянной, а тогда из (2.15)

(3.4) $$G(t) \equiv 1.$$

В силу (2.13) это условие эквивалентно равенству $\overline{\gamma}_W = 0$ или

(3.5) $$\gamma_W = e^{\frac{T}{b}}e^{\int_0^T \iota(u)du}.$$

Возвращаясь снова к требованию совпадения выражений (3.2) и (2.16), с учетом (3.4) получаем условие на темп роста капитала фирмы

(3.6) $$\overline{\gamma}_M = \frac{p(0)bY(0)}{s(0)S(0)}\left(1 - e^{\frac{1-b\delta-\beta}{\beta b}T}\right).$$

Выполнения условий (3.5) и (3.6) достаточно для того, чтобы равновесная траектория совпадала с (3.2), если из (3.6) получится, что $\overline{\gamma}_M \le 1$ (см. (2.19)). Из условия положительности капитала фирмы следует, что $\frac{p(0)bY(0)}{s(0)S(0)} > 1$, а из $1 - b\delta - \beta < 0$ – что $1 - e^{\frac{1-b\delta-\beta}{\beta b}T} \le 1$. Поэтому неравенство $\overline{\gamma}_M \le 1$ выполняется, только если

(3.7) $$T \le T^* = \frac{\beta b}{1 - b\delta - \beta}\ln\left(1 - \frac{s(0)S(0)}{p(0)bY(0)}\right).$$

Таким образом, часть эффективной с точки зрения потребителя траектории может быть воспроизведена в модели с конечным горизонтом планирования *T* при $T \le T^*$.

3.3. Непродолжимость эффективных равновесных траекторий

Изучим вопрос о том, как «склеиваются» эффективные равновесные траектории, определенные на последовательных интервалах времени, когда конечные значения равновесных траекторий на первом участке служат начальными значениями для равновесия на втором.

Возьмем сначала модель равновесия с максимальным горизонтом $T = T^*$ при условии (3.5). Попробуем построить равновесие на некотором отрезке $\left[T^*, T'\right]$ за точкой T^*, начиная со значений фазовых переменных, получившихся в момент T^*. Из (2.9) и (2.17) следует, что $\Omega_M(T^*) = 0$. Поэтому на отрезке $\left[T^*, T'\right]$ может получиться только нерегулярное равновесие с $C(t) = 0$.

Напротив, эффективные равновесия на последовательных отрезках внутри $\left[0, T^*\right]$ «склеиваются» в единое эффективное равновесие. Прямым вычислением по формулам (2.1), (2.17), (2.18) и (3.6) легко показать, что при любых $T_1, T \in \left[0, T^*\right]$, $T_1, < T$ траектория, составленная из эффективных равновесий на отрезках $[0, T_1]$ и $[T_1, T]$, представляет собой эффективное равновесие на отрезке [0, T].

Таким образом, внутри отрезка $\left[0, T^*\right]$ эффективное равновесие можно получать и сразу, и по частям, а за этот отрезок продолжить его невозможно.

4. Модель межвременного равновесия с управлением капиталом

4.1. Описание функционирования экономики

Одна из причин неэффективности равновесий в рассмотренной выше модели − неудачный выбор функционала цели фирмы (1.8). По сути, он был взят просто по формальной аналогии с классическим функционалом ожидаемой полезности потребителя (1.14), вид которого был обоснован Т. Сэвиджем с помощью некой системы аксиом [17].

Вопрос о цели деятельности фирмы − это давний и трудный вопрос экономической теории [16]. В современных теоретических моделях, например в популярной модели Сидравского (см. [15]), трудность преодолевается тем, что производственные фонды отождествляются со сбережениями собственника, который и определяет инвестиции. Задача фирмы перестает быть динамической и сводится к максимизации текущей прибыли.

Здесь мы предлагаем иной вариант решения проблемы цели деятельности фирмы. Он выведен из особой переформулировки межвременного равновесия в модели Эрроу − Дебре, предложенной в [14, 13]. В этом варианте задача фирмы остается динамической и включает задачу оптимального инвестирования. Собственник же управляет только денежными потоками, основываясь на информации о доходности и цене капитала фирмы.

Базовые предпосылки модели остаются неизменными. Мы продолжаем исследовать замкнутую рыночную экономику без участия государства, в которой производится единственный однородный продукт, который в равной степени может быть использован на потребление и накопление. Единственным фактором производства остаются капитальные затраты этого же продукта. Производственная функция предполагается линейной, а капитальные затраты − обратимыми.

Количество и основные функции агентов сохраняются: потребитель-собственник и фирма-производитель в каждый момент времени определяют объем производства, потребления и накопления. Кроме того, неизменным остается взамодействие на товарном рынке, описанное выше. Таким образом, основной макроэкономический баланс снова имеет вид:

$$Y(t) = C(t) + b\frac{d}{dt}Y(t)\cdot \tag{4.1}$$

Основные изменения в новом варианте модели относятся к механизму выплаты дивидендов. Поскольку рассматриваемый здесь механизм взаимодействия собственника и его фирмы выведен из теоретической схемы, а не из эмпирических наблюдений, интерпретация этого механизма на языке принятых инструментов управления фирмами и извлечения доходов бизнеса пока вызывает определенные трудности. По этой причине мы сначала введем в модель предлагаемый механизм формально, а потом дадим экономическую интерпретацию.

Предположим, что собственник задает временную пропорцию выплаты дивидендов $\pi(t)$, т.е. он требует выполнения соотношения $Z(t_2)/Z(t_1) = \pi(t_2)/\pi(t_1)$ для всех $t_1, t_2 \in [0, T]$, не предрешая, какой будет абсолютная величина $Z(t)\cdot$ Фирма, со своей стороны, стремится максимизировать дивиденды в этой пропорции. Тогда дивиденды составят величину $Z(t) = \theta\pi(t)$, где θ – постоянная величина, которую фирма и стремится максимизировать.

4.3. Задача фирмы

Рассмотрим в этих условиях задачу фирмы. Фирма планирует на отрезке [0, T] кассовые остатки $W(t) \geq 0$ и выпуск продукта $Y(t) \geq 0$ в рамках финансового баланса

$$\frac{d}{dt}W(t) = p(t)Y(t) - p(t)b\frac{d}{dt}Y(t) - \theta\pi(t) \tag{4.2}$$

при заданных прогнозах изменения информационных переменных $\pi(t)$, $p(t)$ и начальных значениях $W(0) = 0,\quad Y(0) \geq 0$ так, чтобы максимизировать величину

$$\theta\bar{K} \to \max\,, \tag{4.3}$$

где $\bar{K}$ – нормировочный множитель, введенный пока просто из соображений размерности.

Фазовые переменные в конце процесса должны удовлетворять линейному терминальному ограничению, аналогичному (1.13)

$$W(T) + a_Y(T)Y(T) \geq \gamma_W\left(W(0) + a_Y(0)Y(0)\right)\cdot \tag{4.4}$$

4.3. Регулярное решение задачи фирмы

Как известно [13, 3], для оптимальности набора величин θ, $W(\cdot)$, $Y(\cdot)$ достаточно, чтобы они доставляли максимум функционалу Лагранжа

$$
\begin{aligned}
&L_{\tilde{\varphi}_W(\cdot),\tilde{\varphi}_Y(\cdot),\xi(\cdot),\Theta_W}[Y(\cdot),W(\cdot),\theta]= \\
&=\theta\bar{K}+\int_0^T \xi_W(t)\left(p(t)Y(t)-p(t)b\frac{d}{dt}Y(t)-\theta\pi(t)-\frac{d}{dt}W(t)\right)dt+ \\
&+\int_0^T\left(\tilde{\psi}_W(t)W(t)+\tilde{\psi}_Y(t)Y(t)\right)dt+ \\
&+\Theta_W(W(T)+a_Y(T)Y(T)-\gamma_W W(0)-\gamma_W a_Y(0)Y(0))\to \max_{Y(\cdot),W(\cdot),\theta\geq 0}.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

при некотором наборе двойственных переменных $\tilde{\psi}_W(\cdot)\geq 0, \tilde{\psi}_Y(\cdot)\geq 0, \xi(\cdot), \Theta_W \geq 0$, и при этом выполнялись условия дополняющей нежесткости:

$$
p(t)Y(t)-p(t)b\frac{d}{dt}Y(t)-\theta\pi(t)-\frac{d}{dt}W(t)=0;\cdot \tag{4.6}
$$

$$
\tilde{\psi}_Y(t)Y(t)=0, \quad \tilde{\psi}_Y(t)\geq 0, \quad Y(t)\geq 0; \tag{4.7}
$$

$$
\tilde{\psi}_W(t)W(t)=0, \quad \tilde{\psi}_W(t)\geq 0, \quad W(t)\geq 0; \tag{4.8}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\Theta_W(W(T)+a_Y(T)Y(T)-\gamma_W W(0)-\gamma_W a_Y(0)Y(0))=0, \\
&\Theta_W\geq 0, \quad W(T)+a_Y(T)Y(T)-\gamma_W W(0)-\gamma_W a_Y(0)Y(0)\geq 0.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

В [13] показано, что модель поведения фирмы, подобная (4.2) – (4.4), эквивалентна стандартному описанию поведения производителя в модели Эрроу – Дебре, если рассматривать не все возможные решения задачи фирмы, а только в определенном смысле регулярные. В контексте данной модели регулярным решением задач фирмы назовем набор прямых $\langle Y(t), W(t), \theta\rangle$ и двойственных $\langle \tilde{\psi}_W(t), \tilde{\psi}_Y(t), \xi_W(t), \Theta_W\rangle$ переменных такой, что

1) функции $Y(t), W(t)$ и переменная θ доставляют максимум функционалу Лагранжа по множеству всех кусочно-дифференцируемых функций $Y(\cdot), W(\cdot)$, удовлетворяющих заданным начальным условиям;
2) функция $\xi_W(t)$ кусочно-дифференцируема, а функции $\tilde{\psi}_W(t), \tilde{\psi}_Y(t)$ – кусочно-непрерывны;
3) почти всюду на [0, *T*] выполнены условия дополняющей нежесткости (4.6);
4) условия (4.4) выполняются в более сильном смысле

$$
\Theta_W>0, \tag{4.10}
$$

$$
W(T)+a_Y(T)Y(T)-\gamma_W W(0)-\gamma_W a_Y(0)Y(0)=0. \tag{4.11}
$$

Самым существенным здесь является требование (4.10) положительности множителя Лагранжа к терминальному ограничению. Если считать, что время дискретно, а производные и интегралы суть сокращенные обозначения для разностей и сумм, то, поскольку задача фирмы – линейна, условия (4.5) – (4.9) будут и необходимыми, и все, что нам потребуется в дальнейшем, будет вытекать из

(4.10). Заметим, что в [3] также выдвигались определенные требования регулярности решений задач агентов.

При поиске регулярного равновесия в функционале Лагранжа можно выполнить интегрирование по частям

$$
\begin{aligned}
&L_{\tilde{\varphi}_W,\tilde{\varphi}_Y,\xi,\Theta}[Y(t),W(t),\theta]= \\
&=\theta\bar{K}+\int_0^T\left(\xi_W(t)p(t)+\frac{d}{dt}\xi_W(t)p(t)b+\xi_W(t)\frac{d}{dt}p(t)b+\tilde{\psi}_Y(t)\right)Y(t)dt+ \\
&+\int_0^T\left(\frac{d}{dt}\xi_W(t)+\tilde{\psi}_W(t)\right)W(t)dt-\int_0^T\xi_W(t)\theta\pi(t)dt+\left(\Theta_W-\xi_W(T)\right)W(T)+ \\
&+\left(\Theta_W a_Y(T)-\xi_W(T)p(T)b\right)Y(T)- \\
&-\left(\gamma_W\Theta_W-\xi_W(0)\right)W(0)-\left(\gamma_W\Theta_W a_Y(0)-\xi_W(0)p(0)b\right)Y(0)\to\max_{Y(t),W(t),\theta\geq 0}.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Это выражение достигает максимума по $Y(\cdot)$, $W(\cdot)$ тогда и только тогда, когда почти всюду на [0, T] обращаются в ноль производные по $Y(t)$, $W(t)$ подынтегрального выражения в (4.12),

$$\xi_W(t)p(t)+\frac{d}{dt}\xi_W(t)p(t)b+\xi_W(t)\frac{d}{dt}p(t)b+\tilde{\psi}_Y(t)=0, \tag{4.13}$$

$$\frac{d}{dt}\xi_W(t)+\tilde{\psi}_W(t)=0, \tag{4.14}$$

а также производные (4.12) по θ, $Y(T)$, $W(T)$ [13]

$$\bar{K}-\int_0^T\xi_W(t)\pi(t)dt=0,$$

$$\Theta_W-\xi_W(T)=0, \tag{4.15}$$

$$\Theta_W a_Y(T)-\xi_W(T)p(T)b=0. \tag{4.16}$$

Соотношения (4.6) – (4.8), (4.10), (4.11), (4.13) – (4.16) образуют полную систему условий для определения регулярного решения задачи фирмы.

Из (4.14), (4.8) следует, что $\xi_W(t)$ не возрастает со временем, а из (4.15), (4.10), – что $\xi_W(T)>0$, поэтому

$$\xi_W(t)>0,\ \frac{d}{dt}\xi_W(t)\leq 0 \text{ при всех } t\in[0,T]. \tag{4.17}$$

4.4. Чистые активы фирмы и условие их роста

Условия (4.10), (4.15), (4.16) совместны, только если коэффициент $a_Y(T)$ в (4.7) удовлетворяет соотношению

(4.18) $$a_Y(T) = p(T)b\,.$$

Подобное условие разрешимости задач агента нам уже встречалось (см. (2.2)). Как уже говорилось, в силу этого условия естественно положить

(4.19) $$a_Y(0) = p(0)b\,.$$

Определение коэффициентов граничного условия (4.11) формулами (4.18), (4.19) позволяет записать это условие как требование на рост

(4.20) $$\Omega_W(T) = \gamma_W \Omega_W(0)$$

величины **чистых активов** (собственного капитала фирмы)

$$\Omega_W(t) = W(t) + p(t)bY(t)\,,$$

определенных в соответствии с описанием возможностей фирмы в данной модели.

Прямое вычисление показывает, что величина чистых активов на оптимальной траектории фирмы ((4.6) – (4.8), (4.10), (4.11), (4.13) – (4.14)) удовлетворяет уравнению, аналогичному (2.4), (2.11)

(4.21) $$\frac{d}{dt}\Omega_W(t) = \rho_W(t)\Omega_W(t) - \theta\pi(t)\,,$$

где **доходность капитала фирмы** $\rho_W(t)$ снова определяется как

(4.22) $$\rho_W(t) = \frac{\tilde{\psi}_W(t)}{\xi_W(t)} = -\frac{\frac{d}{dt}\xi_W(t)}{\xi_W(t)} \geq 0\,.$$

Это не случайно. Как показано в [13,14], линейное дифференциальное уравнение, подобное (2.4), (2.11), (4.21), для надлежащим образом определенной величины чистых активов возникает в очень широком классе задач, описывающих поведение экономических агентов. Свободным членом в уравнении служит поток **полезных расходов** – расходов, которые агент стремится максимизировать. В рассматриваемых здесь моделях полезными расходами для собственника служат потребительские расходы $p(t)C(t)$ (см. (2.11)), а для фирмы – дивиденды, выплачиваемые собственнику (см. (2.4), (4.21)).

Доходность капитала (коэффициент в правой части) всегда совпадает с темпом падения двойственной оценки основных денег (см. (4.22)) того актива, из остатка которого извлекается поток полезных расходов. (В данном случае – это $M(t)$ для собственника и $W(t)$ для фирмы.)

Основным условием появления в модели поведения агента простого уравнения вида (4.21) для чистых активов служит требование **линейной однородности** ограничений относительно потоков и запасов материальных благ и финансовых инструментов[4]. Сам вывод уравнения для чистых активов подобен выводу зако-

[4] Предположения об однородности (масштабной инвариантности) присутствуют в подавляющем большинстве теоретических моделей экономики. Их лучшим эмпирическим обосно-

нов сохранения из принципа наименьшего действия в физике. В свою очередь, все эти выводы являются доказательствами в частных случаях фундаментальной **теоремы Нетер** [12], связывающей первые интегралы поля экстремалей с симметриями оптимизационной задачи[5]. Итак, оказывается, что собственный капитал экономического агента можно определить как несколько преобразованный первый интеграл поля экстремалей, отвечающий симметрии растяжения (однородности). В [13, 14] показано, что обычные бухгалтерские правила исчисления собственного капитала через балансовую прибыль можно трактовать как приближение «идеального» выражения капитала, которое получается из однородной оптимизационной задачи.

Для описания поведения фирмы в модели равновесия оказывается достаточно соотношений (4.6) – (4.8), (4.13), (4.20) – (4.21), которые можно записать в виде

(4.23) $$\frac{d}{dt}W(t) = p(t)Y(t) - p(t)b\frac{d}{dt}Y(t) - \theta\pi(t);$$

(4.24) $$\psi_Y(t)Y(t) = 0, \quad \psi_Y(t) \geq 0, \quad Y(t) \geq 0;$$

(4.25) $$\rho_W(t)W(t) = 0, \quad \rho_W(t) \geq 0, \quad W(t) \geq 0;$$

(4.26) $$\rho_W(t) = \frac{1}{b} + \iota(t) + \psi_Y(t) = 0, \quad \iota(t) = \frac{1}{p(t)}\frac{d}{dt}p(t);$$

(4.27) $$\frac{d}{dt}\Omega_W(t) = \rho_W(t)\Omega_W(t) - \theta\pi(t), \quad \Omega_W(T) = \gamma_W\Omega_W(0),$$
$$\Omega_W(t) = W(t) + p(t)bY(t);$$

где $\psi_Y(t) = \tilde{\psi}_Y(t)/\xi_W(t)\,p(t)b$. Остальные условия регулярной оптимальности определяют значения двойственных переменных, которые сами по себе нас не интересуют.

Заметим, что из (4.25), (4.26) снова следует, что задача фирмы разрешима, только если нет слишком сильной дефляции

(4.28) $$\iota(t) \geq -\frac{1}{b}.$$

4.5. Описание поведения собственника

Главный вопрос, который встает в данной модели при описании поведения собственника, – это вопрос о том, как определяется пропорция дивидендов $\pi(t)$.

ванием служит то, что в экономике мы рассуждаем на языке темпов и пропорций, в то время как, например, в физике и биологии – на языке скоростей и размеров. Это означает, что во втором случае масштаб имеет значение, а в первом – нет.

[5] Например, сохранение энергии следует из симметрии при переносах системы во времени. Напомним, что сама величина энергии в каждой конкретной физической задаче определяется по-своему, но в соответствии с некими общими принципами. Аналогично определение чистых активов зависит от того, какие операции агента рассматриваются в модели.

Как и в модели разд. 1, считаем, что собственник действует в рамках финансового баланса

(4.29) $$\frac{d}{dt}M(t) = Z(t) - p(t)C(t)\,,\ \ Z(t) = \theta\pi(t)$$

и стремится максимизировать ожидаемую полезность своего потребления

(4.30) $$\int_0^T U(C(t))e^{-\delta t}dt\,;\ \ U(C) = \frac{C^{(1-\beta)}}{1-\beta}\ \text{при}\ \ \beta \neq 1\ \ U(C) = \ln(C)\ \text{при}\ \beta = 1\,.$$

Чтобы определить величину $\pi(t)$ собственник, разумеется, должен иметь какую-то информацию о возможностях фирмы. Мы отказываемся от распространенного подхода, состоящего в том, что собственник непосредственно управляет динамикой основных производственных фондов, и будем считать, что собственник управляет потоком распределяемой прибыли лишь на основе финансовых показателей деятельности фирмы. Возможность такого описания дает отмеченная выше универсальность вида уравнения для собственного капитала (4.21). Каким бы сложным ни было описание деятельности фирмы в модели, если оно масштабно инвариантно, динамика капитала будет характеризоваться единственным[6)] показателем доходности $\rho_W(t)$.

Будем считать, что собственник получает от фирмы только прогноз изменения доходности $\rho_W(t)$ и значение величины θ, которую несколько условно будем называть **курсом**. Введем, опять-таки пока чисто формально, величину **номинальных вложений собственника в капитал** фирмы $K(t)$. Эти вложения растут за счет доходности $\rho_W(t)$ и убывают при распределении прибыли

(4.31) $$\frac{d}{dt}K(t) = \rho(t)K(t) - \pi(t)\,.$$

Величина $K(t)$, разумеется, должна оставаться неотрицательной, что и ограничивает возможность собственника извлекать доход.

Итак, получаем, что собственник в модели определяет величины $M(t),\ K(t), C(t), \pi(t)$ так, чтобы максимизировать функционал (4.30) при ограничениях (4.29), (4.31) и

(4.32) $$M(t) \geq 0\,,\quad K(t) \geq 0\,,\quad C(t) \geq 0\,,$$

а также при уже традиционном терминальном условии общего вида

(4.33) $$M(T) + a_K(T)K(T) \geq \gamma_M\left(M(0) + a_K(0)K(0)\right).$$

---

6) Строго говоря, в уравнении капитала может появиться еще переменный множитель $1 - n(t)$ при потоке дивидендов, также вычисляемый внутри модели фирмы. Величина $n(t)$ имеет смысл эффективной ставки налога на распределяемую прибыль, см. [13, 14].

Собственник решает свою задачу при известных на всем отрезке $t \in [0, T]$ информационных переменных доходности $\rho(t)$, и цены $p(t)$ и при заданном постоянном курсе θ.

4.6. Экономическая интерпретация задач фирмы и собственника

Дадим теперь экономическую интерпретацию рассмотренного в модели механизма взаимодействия собственника и фирмы, находящейся в его собственности. Подставляя выражение для $\pi(t)$ из (4.31) в (4.29), получаем финансовый баланс собственника в виде

$$\frac{d}{dt}M(t) = \rho(t)\,\theta\,K(t) - \theta\frac{d}{dt}K(t) - p(t)C(t)\cdot$$

Это соотношение позволяет трактовать величину $K(t)$ как некие обязательства фирмы («паи»), которые собственник может покупать и продавать по курсу θ и которые приносят ему номинальную доходность $r(t) = \rho(t)\,\theta$. Как и в предыдущей модели, для собственника важна не номинальная доходность, а доходность на единицу затрат $\rho(t) = r(t)/\theta$ (см. выражение (2.11) для $\rho_M(t)$). Вот только курс θ в этой модели получается постоянным во времени. К сожалению, в детерминированной модели равновесия, где «все всё знают наперед» этот недостаток моделей с управлением капиталом преодолеть не удается. Введенная здесь величина курса приобретает естественную подвижность только в стохастических постановках задачи [2].

Если теперь в задаче фирмы (4.3) положить $\bar{K} = K(0)$, то эта задача приобретет содержательно очень привлекательный смысл задачи **максимизации капитализации**, т.е. рыночной стоимости обязательств перед собственниками. Поскольку курс постоянен, фирма в данной модели максимизирует свою капитализацию не только в начальный, но и в любой текущий момент времени.

Из совпадения начальных условий и пропорциональности уравнений (4.31) и (4.21) заключаем, что $\theta\,K(t) = \Omega_W(t)\cdot$ Если теперь проинтегрировать уравнение (4.31), учитывая, что $\theta\pi(t)$ − это дивиденды $Z(t)$, то получится, что

$$\Omega_W(t) = -\Omega_W(T)\,e^{-\int_t^T \rho_W(u)du} + \int_t^T Z(\tau)e^{-\int_t^\tau \rho_W(u)du}d\tau\cdot$$

Считая, что заданный граничными условиями темп роста капитала меньше его средней доходности, и переходя к пределу при $T \to \infty$, окончательно получаем три совпадающих выражения для капитала фирмы $\Omega_W(t)$

$$W(t) + p(t)bY(t) = \theta\,K(t) = \int_t^\infty Z(\tau)e^{-\int_t^\tau \rho_W(u)du}d\tau\cdot$$

Это соотношение означает, что в рамках рассматриваемой модели тождественно совпадают три общепринятые оценки цены фирмы: бухгалтерская оценка стоимости чистых активов, рыночная стоимость обязательств-паев и дисконтированная сумма ожидаемых дивидендов. Только поток дивидендов $Z(t)$ надо дисконтировать не с произвольно заданным коэффициентом, а с естественно определенной условиями деятельности фирмы доходностью $\rho_W(t)$.

В заключении раздела отметим, что саму задачу собственника (4.29) − (4.33) тоже формально можно свести к задаче максимизации капитализации неких «обязательств собственника перед самим собой». Эти обязательства оказываются равными дисконтированной величине будущих потребительских расходов [13]. Таким образом, естественная с экономической точки зрения задача максимизации капитализации оказывается универсальным выражением интересов агентов в однородных моделях межвременного равновесия.

4.7. Регулярное решение задачи собственника

Обратимся теперь к решению задачи собственника. Задача очень похожа на ту, которая ставилась в исходной модели. На ее решение тоже наложим определенные требования регулярности.

Регулярным решением задачи собственника называется набор прямых $\langle C(t), M(t), K(t), \pi(t)\rangle$ и двойственных $\langle \tilde\psi_M(t), \tilde\psi_K(t), \varphi(t), \xi_M(t), \Theta_M\rangle$ переменных, такой что:

1) функции $C(t), M(t), K(t), \pi(t)$ доставляют максимум функционалу Лагранжа

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T U\big(C(t)\big)e^{-\delta t}dt + \int_0^T \xi_M(t)\left(\theta\pi(t) - p(t)C(t) - \frac{d}{dt}M(t)\right)dt + \\
&+\int_0^T \varphi(t)\left(\rho(t)K(t) - \pi(t) - \frac{d}{dt}K(t)\right)dt + \\
&+\int_0^T \big(\tilde\psi_M(t)M(t) + \tilde\psi_K(t)K(t)\big)dt + \\
&+\Theta_M\big(M(T) + a_K(T)K(T) - \gamma_M M(0) - \gamma_M a_K(0)K(0)\big)
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

по множеству всех кусочно-дифференцируемых функций $M(\cdot), K(\cdot)$, удовлетворяющих заданным начальным условиям и множеству кусочно-непрерывных функций[7] $C(\cdot), \pi(\cdot)$;

2) функции $\varphi(t), \xi_M(t)$ кусочно-дифференцируемы, а функции $\tilde\psi_M(t), \tilde\psi_K(t)$ − кусочно-непрерывны;

3) почти всюду на [0, T] выполнены условия дополняющей (4.6)

[7] Легко видеть, что из условия максимизации функционала (4.34) следует неравенство $C(t) > 0$, поэтому ограничение $C(t) \geq 0$ можно не учитывать множителем Лагранжа.

$$(4.35)\quad \begin{aligned}
&\theta\pi(t) - p(t)C(t) - \frac{d}{dt}M(t) = 0;\\
&\rho(t)K(t) - \pi(t) - \frac{d}{dt}K(t) = 0;\\
&\tilde{\psi}_M(t)M(t) = 0, \quad \tilde{\psi}_M(t) \geq 0, \quad M(t) \geq 0;\\
&\tilde{\psi}_K(t)K(t) = 0, \quad \tilde{\psi}_K(t) \geq 0, \quad K(t) \geq 0;\\
&\Theta_M\left(M(T) + a_K(T)K(T) - \gamma_M M(0) - \gamma_M a_K(0)K(0)\right) = 0,\\
&\Theta_M > 0, \quad M(T) + a_K(T)K(T) - \gamma_M M(0) - \gamma_M a_K(0)K(0) = 0.
\end{aligned}$$

Самым существенным здесь снова является усиленная форма последнего условия дополняющей нежесткости.

Выполняя интегрирование по частям в (4.34), и варьируя получившееся выражение по внутренним и терминальным значениям искомых величин, получаем условия

$$(4.36)\quad U'\left(C(t)\right)e^{-\delta t} - \xi_M(t)p(t) = 0\,,$$

$$(4.37)\quad \xi_M(t)\theta - \varphi(t) = 0\,,$$

$$(4.38)\quad \varphi(t)\rho(t) + \frac{d}{dt}\varphi(t) + \tilde{\psi}_K(t) = 0\,,$$

$$(4.39)\quad \frac{d}{dt}\xi_M(t) + \tilde{\psi}_M(t) = 0\,,$$

$$(4.40)\quad \Theta_M - \xi_M(T) = 0\,,$$

$$(4.41)\quad \Theta_M a_K(T) - \varphi(T) = 0\,,$$

которые вместе с (4.35) образуют полную систему условий для определения регулярного решения задачи собственника.

Из (4.36) и вида функции $U(\cdot)$ (см. (4.30)) сразу следует, что $\xi_M(t) > 0$. Тогда, как и во всех случаях выше, из (4.37), (4.40), (4.41) получается, что коэффициент терминального условия $a_K(T)$ должен быть связан с параметрами задачи $a_K(T) = \theta$. Снова предполагая, что та же связь имеет место и для начального коэффициента $a_K(0) = \theta$, получаем граничное условие в виде

$$\Omega_M(T) = \gamma_M \Omega_M(0)\,,\ \Omega_M(t) = M(t) + \theta K(t).$$

Легко проверить, что в силу (4.35), (4.36) − (4.41)

$$\frac{d}{dt}\Omega_M(t) = \rho_M(t)\Omega_M(t) - p(t)\,C(t)\,,\ \ \rho_M(t) = \frac{\tilde{\psi}_M(t)}{\xi_M(t)} = -\frac{\frac{d}{dt}\xi_M(t)}{\xi_M(t)} \geq 0.$$

Из (4.36) следует, что $C(t) > 0$, поскольку $U'(0) = \infty$. Имея это в виду, можно исключить из системы условий оптимальности величину $\xi_M(t)$ с помощью (4.36) и, отбросив условия, определяющие только двойственные переменные, придти к следующему описанию поведения собственника в модели

(4.42) $$\frac{d}{dt}M(t) = \theta\pi(t) - p(t)C(t),$$

(4.43) $$\rho(t)K(t) - \pi(t) - \frac{d}{dt}K(t) = 0, \quad K(t) \geq 0,$$

(4.44) $$\frac{d}{dt}C(t) = \frac{\rho_M(t) - \iota(t) - \delta}{\beta}C(t), \quad C(t) > 0,$$

(4.45) $$\rho_M(t)M(t) = 0, \quad \rho_M(t) \geq 0, \quad M(t) \geq 0,$$

(4.46) $$\rho_M(t) = \rho(t),$$

(4.47) $$\frac{d}{dt}\Omega_M(t) = \rho_M(t)\Omega_M(t) - p(t)C(t), \quad \Omega_M(T) = \gamma_M\Omega_M(0),$$
$$\Omega_M(t) = M(t) + \theta K(t).$$

4.8. Регулярное межвременное равновесие

Регулярным равновесием называется набор прямых $\langle Y(t), W(t), \theta, C(t), M(t), K(t), \pi(t)\rangle$, информационных $\langle p(t), \rho(t)\rangle$ и двойственных $\langle \psi_Y(t), \rho_W(t), \rho_M(t)\rangle$ переменных такой, что

1) функция $p(t)$ ограничена и интегрируема на $[0, T]$;

2) наборы $\langle Y(t), W(t), \theta\rangle$; $\langle \psi_Y(t), \rho_W(t)\rangle$ при заданном $p(t)$ образуют регулярное решение задачи фирмы (4.23) – (4.27);

3) наборы $\langle C(t), M(t), K(t), \pi(t)\rangle$; $\langle \rho_M(t)\rangle$ при заданном $p(t)$ образуют регулярное решение задачи собственника (4.42) – (4.47);

4) почти всюду на $[0, T]$ выполняется условие равновесия (4.1);

5) фирма сообщает собственнику верные сведения о своей доходности

(4.48) $$\rho(t) = \rho_W(t);$$

6) не происходит слишком сильной дефляции – неравенство (4.28) выполняется строго

(4.49) $$\frac{1}{b} + \frac{1}{p(t)}\frac{d}{dt}p(t) > 0.$$

Поскольку $C(t) > 0$ (см. (4.44)) из (4.1) следует, что при $Y(t) = 0$ $\frac{d}{dt}Y(t) < 0$, что противоречит условию (4.24) при $t < T$. Отсюда вытекает, что на всем интервале $[0, T)$ $Y(t) > 0$. В свою очередь отсюда в силу (4.24), (4.26), (4.46), (4.48), (4.49) следует, что все показатели доходности в модели совпадают и положительны

(4.50) $$\rho_M(t) = \rho(t) = \rho_W(t) = \iota(t) + \frac{1}{b} > 0 \cdot$$

Отсюда в силу (4.25), (4.45), как и в первой модели, вытекает, что при положительной доходности агентам не следует накапливать деньги

(4.51) $$M(t) = W(t) = 0 \,.$$

Из этих равенств, (4.27) и (4.47), получаем граничные условия на рост выпуска и капиталовложений в равновесии

(4.52) $$Y(T) = \gamma_W Y(0) e^{-\int_0^T \iota(t)dt}, \; K(T) = \gamma_M K(0) \cdot$$

Решая линейные дифференциальные уравнения (4.1), (4.44) при заданном $Y(0)$ и граничном условии (4.52) с учетом выражения для доходности (4.50), получаем траектории выпуска и потребления в равновесии

(4.53) $$Y(t) = Y(0) e^{\frac{t}{b}} \left(1 - \overline{\gamma}_W \frac{e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}t} - 1}{e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}T} - 1} \right),$$

$$C(t) = Y(0) \frac{1-\delta b-\beta}{\beta} \frac{\overline{\gamma}_W}{e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}T} - 1} e^{\frac{1-\delta b}{b\beta}t} \,.$$

Из финансового баланса собственника (4.42) с учетом (4.51), (4.53) получаем выражение

(4.54) $$\pi(t) = \frac{p(0)Y(0)}{\theta} \frac{1-\delta b-\beta}{\beta} \frac{\overline{\gamma}_W e^{\int_0^t \iota(u)du}}{e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}T} - 1} e^{\frac{1-\delta b}{b\beta}t} \,.$$

Подставив его в уравнение для вложений (4.43) и решая это уравнение с граничным условием (4.52) и заданным начальным условием, получаем выражение для курса

(4.55) $$\theta = \frac{p(0)bY(0)}{K(0)} \frac{\overline{\gamma}_W}{\overline{\gamma}_M}$$

и окончательные выражения для вложений $K(t)$ и временной пропорции дивидендов $\pi(t)$

(4.56) $$K(t) = K(0) e^{\int_0^t \iota(u)du} e^{\frac{t}{b}} \left(1 - \overline{\gamma}_M \frac{e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}t} - 1}{e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}T} - 1} \right),$$

(4.57) $$\pi(t) = K(0)\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}\frac{\overline{\gamma}_M e^{\int_0^t \iota(u)du}}{e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}T}-1}e^{\frac{1-\delta b}{b\beta}t}.$$

5. Эффективность межвременного равновесия с управлением капиталом

5.1. Эффективность регулярного равновесия при бесконечном горизонте планирования

Прежде всего, выясним, можно ли воспроизвести магистраль потребления, если рассматривать равновесие в модели с управлением капиталом на бесконечном интервале, т.е. на том же интервале, на котором определяется сама магистраль. Пусть горизонт планирования каждого из агентов стремится к бесконечности $T \to +\infty$. А, кроме того, ни у собственника, ни у фирмы нет планов по накоплению капитала:

(5.1) $$\gamma_M = 0,\ \gamma_W = 0.$$

Решение данной задачи распадается на два случая в зависимости от соотношения исходных коэффициентов. Если $1-b\delta-\beta > 0$, то

(5.2) $$C(t) = 0,\ Y(t) = Y(0)e^{\frac{t}{b}},$$

Если же $1-b\delta-\beta < 0$, тогда

(5.3) $$C(t) = Y(0)\frac{b\delta+\beta-1}{\beta}e^{\frac{1-b\delta}{b\beta}t},\ Y(t) = Y(0)e^{\frac{1-b\delta}{b\beta}t},$$

Выражение (5.2) совпадает с (3.1), а (5.3) – с (3.2). Это означает, что равновесие в модели с управлением капиталом при бесконечном горизонте планирования эффективно с точки зрения потребителя при любых значениях параметров, если в качестве терминальных условий для фирмы и собственника потребовать просто неотрицательности их чистых активов – (5.1).

Поскольку равновесие с управлением капиталом при бесконечным горизонте эффективно, интерес представляют не только натуральные показатели (5.3), но и финансовые, а именно: траектория программы выплаты дивидендов и траектория вложений. Легко проверить, что при (5.1) и бесконечном горизонте в равновесии для этих показателей получаем при $1-b\delta-\beta > 0$

(5.4) $$\pi(t) = 0,\ K(t) = K(0)e^{\int_0^t \iota(u)du}e^{\frac{t}{b}},$$

а при $1-b\delta-\beta < 0$

(5.5) $$\pi(t) = K(0)\frac{1-\delta b-\beta}{\beta}e^{\int_0^t \iota(u)du}e^{\frac{1-\delta b}{b\beta}t},\ K(t) = K(0)e^{\int_0^t \iota(u)du}e^{\frac{1-\delta b}{b\beta}t}.$$

5.2. Моделирование эффективного равновесия с бесконечным горизонтом равновесием с конечным горизонтом

С теоретической точки зрения бесконечный горизонт наиболее привлекателен, но практически в сколько-нибудь реалистичных моделях расчет равновесия с бесконечным горизонтом крайне затруднителен. Поэтому мы снова обращаемся к вопросу о возможности моделировать траектории, полученные в задачах с бесконечным горизонтом траекториями задач с конечным горизонтом при подходящем выборе среднего темпа роста капитала. Однако в свете полученного выше результата об эффективности равновесия с управлением капиталом, поставим более жесткое, чем в разделе 3, требование. Постараемся выбрать показатели среднего роста капитала γ_M, γ_W так, чтобы равновесная траектория с горизонтом T целиком, а не только по $C(t)$ и $Y(t)$, совпадала на отрезке $[0,T]$ с равновесной при бесконечном горизонте.

В случае оптимальности для потребителя режима с отложенным потреблением, т.е. при $1-b\delta-\beta>0$, равновесная на отрезке $[0,T]$ траектория совпадет на этом отрезке с траекторией равновесия с бесконечным горизонтом (5.2), (5.4), если положить

(5.6) $$\overline{\gamma}_W = 0,\ \overline{\gamma}_M = 0$$

В случае когда $1-b\delta-\beta<0$, для моделирования равновесной при бесконечном горизонте траектории (5.3), (5.5) нужно положить

(5.7) $$\overline{\gamma}_W = 1-e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}T},\ \overline{\gamma}_M = 1-e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}T}.$$

Значение (5.7) допустимо, поскольку в знаменателе второй дроби в (4.53) $e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}T} \le 1$.

Таким образом, при надлежащем задании средних темпов роста капитала модель равновесия с управлением капиталом на конечном горизонте может воспроизвести любые отрезки траекторий аналогичной модели с бесконечным горизонтом.

5.3. Построение эффективных траекторий без решения задачи с бесконечным горизонтом

Приведенная выше конструкция для нахождения γ_W и γ_M основывается на сопоставлении двух различных моделей, отличающихся, прежде всего, числом агентов, принимающих решения. Возникает вопрос, можно ли выделить выражения (5.6), (5.7) для γ_W и γ_M, пользуясь только моделью равновесия с конечным горизонтом.

Для ответа на этот вопрос рассмотрим выражение (4.53), позволяющее определить динамику темпа роста реального выпуска на равновесной траектории

$$g_Y(t) = \frac{1}{Y(t)} \frac{d}{dt} Y(t) = \frac{1}{b} - \overline{\gamma}_W \frac{1-\delta b-\beta}{b\beta} \frac{e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}t}}{e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}T} - 1 - \overline{\gamma}_W \left(e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}t} - 1 \right)} \tag{5.8}$$

и его изменение во времени

$$\frac{d}{dt} g_Y(t) = -\left(\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}\right)^2 \overline{\gamma}_W e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}t} \frac{e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}T} - 1 + \overline{\gamma}_W}{\left(e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}T} - 1 - \overline{\gamma}_W \left(e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}t} - 1 \right)\right)^2}. \tag{5.9}$$

Выберем такое значение γ_W, при котором темп роста реального выпуска остается постоянным. Из (5.9) видно, что таких значений два, причем одно из них нулевое. Поэтому введем еще одно требование. Пусть темп роста реального выпуска достигает наибольшего из возможных постоянных значений.

Из (5.8) следует, что значение g_Y определяется, прежде всего, знаком показателя экспоненты, поэтому и полученное решение будет зависеть от него. При $1-b\delta-\beta>0$ искомое значение составит

$$\overline{\gamma}_W = 0. \tag{5.10}$$

Если же $1-b\delta-\beta<0$, то

$$\overline{\gamma}_W = 1 - e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}T}. \tag{5.11}$$

А это и есть те самые значения, которые мы получили в разд. 0.

Несколько сложнее обстоит дело с нахождением γ_M. Из (4.56), получаем, что

$$\begin{aligned} g_K(t) = \frac{1}{K(t)} \frac{d}{dt} K(t) = \iota(t) + \frac{1}{b} - \\ - \overline{\gamma}_M \frac{1-\delta b-\beta}{b\beta} \frac{e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}t}}{e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}T} - 1 - \overline{\gamma}_M \left(e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}t} - 1 \right)}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Это выражение похоже на (5.9), но в нем присутствует переменное слагаемое $\iota(t)$. Проблема в том, что темп инфляции $\iota(t)$ может быть в равновесии задан произвольно, поэтому искать такие γ_M, при которых g_K постоянно, бессмысленно. Суть дела в том, что величина $Y(t)$ – реальная, а $K(t)$ – номинальная (денежная). Для номинальной величины естественно рассматривать реальный темп роста $\bar{g}_K(t) = g_K(t) - \iota(t)$.

Потребовав, чтобы реальный темп роста $\bar{g}_K(t)$ принимал максимально возможное постоянное значение, получаем при $1 - b\delta - \beta > 0$ $\bar{\gamma}_M = 0$, а при $1 - b\delta - \beta < 0$ $\bar{\gamma}_M = 1 - e^{\frac{1-\delta b-\beta}{b\beta}T}$, что опять-таки совпадает со значением, полученным разд. 5.2.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алипрантис К., Браун Д., Беркеншо О.* Существование и оптимальность конкурентного равновесия. М.: Мир, 1995.
2. *Андреев М.Ю.* Подход к проблеме неполных рынков без введения дополнительных инструментов / Труды 49 научной конференции МФТИ, 25–26 ноября 2005 г. Ч.VII. С. 108–109.
3. *Андрияшин А.В., Поспелов И.Г., Фомченко Д.С.* Динамическая модель общего равновесия при наличии рынка акций // Экономический журнал ВШЭ. 2003. Т. 7. № 3. С. 313–340.
4. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.
5. *Багриновский К.А.* О гладких решениях некоторых задач планирования // Проблемы народнохозяйственного оптимума. М.: Экономика, 1969. С. 236–262.
6. *Борисов К.Ю.* Агрегированные модели экономического роста и распределения. СПб.: Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН, 2005.
7. *Волконский В.А.* Модель оптимального планирования и взаимосвязи экономических показателей. М.: Наука, 1967.
8. *Ершов Э.Б.* Теория клювов и межотраслевое моделирование: Препринт WP2/2002/03. М.: ГУ ВШЭ, 2002.
9. *Конюс А.А.* Перспективное планирование при предположении равномерного роста капиталовложений // Планирование и экономико-математические методы. К 70-летию со дня рождения академика В.С. Немчинова. М.: Экономика, 1965. С. 346–361.
10. *Ланге О.* Производственно-техническая основа эффективности капитальных вложений // Применение математики в экономических исследованиях. Т. 2. М.: Издательство социально-экономической литературы, 1962. С. 79–120.
11. *Малинво Э.* Лекции по микроэкономическому анализу. М.: Наука, 1973.
12. *Полак Л. С.* Вариационные принципы механики, их развитие и применения в физике. М., 1960.
13. *Поспелов И.Г.* Модели экономической динамики, основанные на равновесии прогнозов экономических агентов. М.: ВЦ РАН, 2003. (http://www.ccas.ru/mmes/mmest/ecodyn03.htm).
14. *Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.Ю., Шипулина Г.Е.* Новые принципы и методы разработки макромоделей экономики и модель современной экономики России. М.: ВЦ РАН, 2005.

15. *Сотсков А.И.* Об оптимальном соотношении между налогами, денежной эмиссией и займами в модели Сидравского с внешними заимствованиями // Экономика и математические методы. 2002. Т. 38. Вып. 2. С. 37–43.

16. *Тироль Ж.* Рынки и рыночная власть: Теория организации промышленности / Пер. с англ. СПб.: Экономическая школа, 1996.

17. *Фишберн П.С.* Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.

18. Handbook of Mathematical Economics. North-Holland, 1991.

19. *Turnovsky S.J.* International Macroeconomic Dynamics. Cambridge, Mass: MIT Press, 1997.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Интерпретация линейной производственной функции

Неявно используемая в (1.1) линейная производственная функция может быть получена в рамках стандартных предположений модели производства с учетом технического прогресса, изложенных в [6]. Пусть производство описывается соотношением

$$X(t) = F(Q(t), \alpha(t)L(t)), \tag{П.1}$$

где $X(t)$ – выпуск продукции, $Q(t)$ – производственные фонды, $L(t)$ – труд, $\alpha(t)$ – достигнутый вследствие технического прогресса уровень производительности труда, а $F(\cdot,\cdot)$ – линейно однородная производственная функция. Финансовый баланс фирмы (1.2) в этих условиях следует записать как

$$\frac{d}{dt}W(t) = p(t)X(t) - Z(t) - w(t)L(t) + s(t)\left(\frac{d}{dt}A(t)\right) - p(t)\frac{d}{dt}Q(t), \tag{П.2}$$

где $w(t)$ – ставка заработной платы, а $\frac{d}{dt}Q(t)$ – инвестиции, накопление которых создает производственные фонды $Q(t)$.

Будем считать, как в [6], предложение труда постоянным, а уровень технического прогресса пропорциональным накопленным производственным фондам.

$$L(t) = \bar{L}, \quad \alpha(t) = \xi Q(t). \tag{П.3}$$

Очевидно, что как бы фирма ни планировала выпуск акций и инвестиции, для максимизации дивидендов она должна определять уровень занятости $L(t)$ так, чтобы максимизировать текущую прибыль

$$p(t)X(t) - w(t)L(t) = p(t)F(Q(t), \alpha(t)L(t)) - w(t)L(t)$$

при заданных производственных фондах. Определяя спрос на труд из условия максимальности прибыли и предполагая, что рынок труда находится в равновесии, получаем в силу однородности производственной функции, что ставка заработной платы и выпуск будут пропорциональны объему фондов

(П.4) $$w(t)=\alpha(t)D_2(F)(Q(t),\alpha(t)\overline{L})=\xi Q(t)D_2(F)(1,\xi\overline{L}),$$
$$X(t)=Q(t)F(1,\xi\overline{L}).$$

Предположим теперь, что трудящиеся – это категория населения, отличная от рассмотренных выше собственников, и что эти трудящиеся не делают сбережений, а тратят весь свой доход $w(t)L(t)$ на потребление $H(t)$

(П.5) $$p(t)H(t)=w(t)L(t)=\xi Q(t)D_2(F)(1,\xi\overline{L})\overline{L}.$$

Макроэкономический баланс тогда вместо (1.1) будет иметь вид

(П.6) $$X(t)=C(t)+H(t)+\frac{\partial}{\partial t}Q(t).$$

Поскольку нас интересуют взаимоотношения фирмы и собственника, можно включить описание рынка труда и потребления трудящихся «внутрь» описания фирмы. Для этого нужно считать чистым продуктом $Y(t)$ то, что остается от $X(t)$ после вычета потребления трудящихся $H(t)$. Полагая по определению

(П.7) $$Y(t)=X(t)-H(t),\quad b=\frac{1}{F(1,\xi\overline{L})-\xi D_2(F)(1,\xi\overline{L})\overline{L}}=\frac{1}{D_1(F)(1,\xi\overline{L})}.$$

Получаем в силу (П.4), (П.5) из (П.6) баланс (1.1), а из (П.2) – баланс (1.2).