ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

Об одном правиле определения победителя в закрытых тендерах и его математических свойствах[1)]

Беленький А.С.

Рассматривается правило определения победителя в закрытых тендерах, в которых контракт на выполнение работ предлагается квалифицированным исполнителям. Это правило, представляющее собой некоторый экономический механизм, делает выгодным для участников тендера предлагать цену за выполнение работы, которая близка к цене, желательной для организаторов тендера, и делает невыгодным предлагать как демпинговые, так и слишком высокие цены. В рамках предложенного правила для каждого участника тендера вероятность выиграть тендер по цене, желательной для организаторов тендера, выше, чем вероятность выиграть тендер по традиционному правилу, согласно которому победителем тендера объявляется участник, предложивший наименьшую цену за выполнение контракта. В то же время для каждого участника тендера вероятность выиграть тендер по цене, превышающей цену, желательную для организаторов тендера, оказывается ниже, чем вероятность выиграть тендер по цене, желательной для организаторов тендера, что делает предложенное правило взаимовыгодным как для организаторов, так и для участников тендера.

Ключевые слова: тендер, экономический механизм, линейное программирование, дробно-линейное программирование, минимакс, оценка вероятностей, выпуклые многогранные множества.

Введение

Тендеры (понимаемые далее как аукционы на выполнение контрактов или работ или на поставки товаров для закупок, включая государственные закупки) как

[1)] Настоящая работа обсуждалась на семинаре факультета математики Университета г. Манчестера (руководитель проф. Г. Пескир) и на семинаре кафедры высшей математики факультета экономики Высшей школы экономики в Москве (руководитель проф. Ф. Алескеров).

Автор благодарен проф. Ф. Алескерову за внимание к этой работе и конструктивные замечания по ее структуре и содержанию, а также двум анонимным референтам за полезные замечания, способствовавшие уточнению изложения результатов статьи.

Беленький А.С. – Центр «Основания инженерных систем», Массачусетский технологический институт, США.

Статья поступила в Редакцию в декабре 2008 г.

форма выявления наилучшего исполнителя проекта или набора работ традиционно считаются мероприятиями, обеспечивающими справедливое (т.е. беспристрастно оцениваемое) соревнование организаций или (и) лиц, желающих выполнить выставляемую на тендер работу (набор работ) и обладающих квалификацией, требуемой для ее (их) выполнения.

Организация, проводящая тендер, обычно стремится:

а) привлечь к участию в тендере наиболее квалифицированных исполнителей, имеющих опыт выполнения работ, составляющих предмет тендера;

б) выбрать такого исполнителя из числа допущенных к участию в тендере, который предлагает выполнить работы за наименьшую цену, приемлемую для организации, проводящей тендер.

Однако достижение обеих этих целей может представить весьма сложную проблему [1]. Действительно, цена за работу, предлагаемая исполнителями, «желательными» для организатора тендера, может оказаться достаточно высокой. В то же время исполнители, желающие установить деловые отношения с организаторами тендера, могут предложить заведомо низкую, «бросовую» цену за выполнение работ, выставленных на тендер, и, в отдельных случаях, даже предложить выполнить работы бесплатно, хотя такие исполнители могут не быть «желательными» для организаторов тендера. Тем не менее, если условия проведения тендера таковы, что они не «отсекают» желающих выполнить работы по «бросовой» цене, «желательные» для организаторов тендера исполнители могут потерять интерес к участию в тендере, так как их шансы выиграть тендер в случае, если организаторы тендера придерживаются условия (б), практически нулевые.

Ясно, что объявление цены за работу, выставляемую на тендер, не способствует достижению целей (а) и (б), так как может «отпугнуть» исполнителей, «желательных» для организатора тендера, если для них объявленная цена окажется заведомо неприемлемой (низкой). В этом случае тендер можно будет проводить только между теми исполнителями, которые согласны выполнить работы по объявленной цене, однако среди таких исполнителей может не оказаться тех, которые являются «желательными» для организатора тендера.

Как уже указывалось выше, определение победителя тендера по предлагаемой минимальной цене за работу способно «отпугнуть» серьезных, «желательных» исполнителей. Более того, оно способно создать благоприятную почву для злоупотреблений, основанных на взаимной «договоренности» организатора тендера и какого-либо исполнителя работ, которую достаточно непросто выявить и предотвратить.

Интересно, что при наличии огромного числа публикаций, в которых обсуждаются правила рационального или оптимального поведения участников тендера, приводящего к победе при различных правилах определения победителя [5], число работ, в которых обсуждаются правила проведения тендеров, стимулирующие потенциальных высококвалифицированных исполнителей участвовать в тендере, относительно невелико. Поэтому разработка такого рода правил проведения тендеров, в частности тех, которые направлены на достижение целей (а) и (б), представляет не только практический, но и научный интерес.

Цель настоящей работы – предложить одно такое правило и показать, что при весьма общих предположениях об информации, которую организатор тендера и его участники имеют друг о друге, это правило оказывается более привлекательным для организатора тендера и его участников, чем, например, правило определения победителя тендера по минимальной предложенной цене за работу, выставляемую на тендер.

Правило определения победителя тендера, стимулирующее его участников назначать цену за работу, близкую к цене, желательной для организатора тендера

В настоящей работе рассматривается одношаговый тендер, в рамках которого некоторая неделимая на части работа (или набор работ) выставляется на тендер. Известны требования к качеству и расписанию выполнения работы (набора работ), которая (который) составляет предмет тендера, а также требования к организаторам или (и) частным лицам, заинтересованным в участии в тендере. Таким образом, организатор тендера имеет возможность исключить некоторых заведомо «нежелательных» потенциальных участников тендера путем «ужесточения» этих требований (хотя полностью исключить их участие в тендере, как правило, не удается). Одношаговость тендера обычно понимается в том смысле, что если согласно какому-либо правилу определения победителя тендера более одного участника тендера должны быть признаны победителями, единственный победитель выбирается путем жребия, а не каким-либо другим способом. Тем самым цена за работу, которая выставляется на тендер, не меняется в результате выбора единственного победителя из числа тех, кто может рассматриваться победителем в соответствии с предложенным правилом.

Идея предлагаемого правила состоит в создании экономического механизма, делающего невыгодным для участников тендера предлагать как слишком высокую, так и слишком низкую цену за работу, выставленную на тендер, и в то же время позволяющего организатору тендера обеспечить выполнение работы по цене, не превосходящей его (организатора) возможности по оплате этой работы и учитывающей реальные затраты среднего «желательного» исполнителя работ. Правило определения победителя тендера объявляется отобранным участникам тендера (т.е. потенциальным участникам, удовлетворяющим вышеупомянутым требованиям к организациям и лицам, заинтересованным в участии в тендере) заранее и состоит в следующем:

1) победитель тендера получает работу по цене не менее kx, где x − цена за работу, выставляемую на тендер и $0 < k < 1$ (k может быть, например, равным 0,9, что означает, что победитель тендера получит работу по цене не менее 90% от цены за работу), причем x не объявляется отобранным участникам тендера, в то время как значение k объявляется;

2) цена за работу x определяется организатором тендера исходя из его (организатора) возможностей, предварительной оценки себестоимости выполнения работы «средним» квалифицированным исполнителем, а также предварительной оценки разумного уровня прибыли, которую может получить победитель тендера, и затрат участников на подготовку к участию в тендере (необходимые исследования и маркетинговый анализ);

3) участники тендера, назначившие цену за работу, которая превышает x, исключаются из участия в тендере;

4) участник тендера, назначивший цену за работу более высокую, чем остальные участники, выигрывает тендер по цене kx при условии, что все участники тендера назначили цену, меньшую, чем kx;

5) участник тендера, назначивший цену за работу более низкую, чем все другие участники тендера, назначившие цену большую, чем kx, выигрывает тендер по этой назначенной цене при условии, что ни один из участников тендера не назначил цену, не превосходящую kx;

6) если никто из участников тендера не выигрывает тендер по правилу 4, но несколько участников тендера назначили одинаковую цену за работу, не превосходящую kx, или если никто из участников тендера не выигрывает тендер по правилу 5, но несколько участников тендера назначили одинаковую цену, превосходящую kx – в то время как ни один участник тендера не назначил цену, не превосходящую kx, – победитель тендера определяется среди участников, назначивших одинаковую цену, наиболее близкую к kx.

В настоящей статье будет показано, что как значение k, так и значение x может быть найдено организатором тендера из решения некоторых оптимизационных задач.

Предложенное правило делает бессмысленным искусственное занижение цены за работу, выставленную на тендер, по сравнению со «средними» затратами квалифицированного участника тендера на выполнение этой работы и на подготовку к участию тендере. Напротив, оно стимулирует участников тендера подавать предложения по цене за работу, соразмерной с их затратами на ее выполнение. В то же время предложенное правило не поощряет участников тендера подавать предложения по цене за работу, превышающей kx.

Тот факт, что организатор тендера объявляет, что при определении цены за работу он исходит из (своего) предварительного анализа затрат на выполнение работы, выставляемой на тендер, которые понесет средний «желательный» исполнитель, а также учитывает затраты участников на подготовку к тендеру и разумную прибыль от выполнения работы победителем тендера, способствует повышению доверия потенциальных участников к тендеру как справедливому соревнованию, исключающему какие-либо «закулисные» сделки с организатором тендера. Более того, такой подход стимулирует потенциальных участников тендера к проведению своего собственного анализа возможной цены за работу, выбираемой организатором тендера, а также возможных стратегий других потенциальных участников тендера при подаче ими предложений по цене за работу, выставляемую на тендер. Тем самым предложенное правило неизбежно вовлекает заинтересованные организации в некоторую аналитическую деятельность и переводит процесс принятия решения об участии в тендере и о выборе стратегии при подаче предложения о цене за работу, выставленную на тендер, на принципиально новый уровень.

Естественно ожидать, что уж если разработанные подходы и методы анализа поведения организатора и участников тендера окажутся востребованными при выборе стратегий как участников, так и организатора тендера, то участие аналитиков с обеих сторон приведет к появлению новых математических моделей и новых методов решения задач, формулируемых на основе этих моделей, и для тендеров, проводимых по предложенному правилу. Таким образом, предложенное правило может создать объективные предпосылки для более глубокого проникновения экономико-математических методов в хозяйственную деятельность участников рынка услуг. Это правило может также рассматриваться как иллюстрация того, как использование экономических механизмов при определении «правил игры» на рынке, а не только административные решения, могут «оживлять» рынок и делать экономически невыгодными действия отдельных участников рынка, подрывающие доверие к рыночным механизмам.

Предложенное правило проведения тендеров является модификацией правила, впервые предложенного в работе [1] (в части пунктов 4 и 6), где некоторые дополнительные аспекты проведения специального вида тендеров (sealed ceiling bids) рассматриваются более подробно. В настоящей работе используются обозначения и некоторые факты, установленные в [1].

Математическое моделирование взаимодействия организатора тендера с участниками тендера

Хотя взаимодействие организатора с участниками тендера является двухсторонним процессом, настоящая работа рассматривает это взаимодействие исключительно с точки зрения организатора тендера. Читатель, интересующийся анализом стратегий участников тендера, направленных на достижение победы (на выигрыш тендера) при конкретных правилах проведения тендера, может найти соответствующие рассуждения в многочисленных публикациях, например, в [5, 6, 8, 9].

Как уже указывалось, при организации тендера по предложенному правилу задача организатора состоит в поощрении отобранных участников к подаче предложений по цене за работу, выставляемую на тендер, близкую к значению kx, где k и x выбираются организатором. Хотя организатор тендера готов «отдать» работу (предмет тендера) по цене x, цена kx является для него более желательной по понятным причинам, хотя k может выбираться достаточно близким к единице. Естественно, что организатор тендера хотел бы оценить вероятность того, что ему придется «отдать» работу победителю тендера по цене, превышающей kx при любых фиксированных k и x, и попытаться выбрать значения этих двух параметров так, чтобы указанная вероятность была бы минимальной. Ясно, что любые количественные оценки этой вероятности возможны лишь при каких-либо предположениях о поведении (отобранных) участников тендера как реакции на то, что определение победителя тендера будет проводиться по предложенному выше правилу.

Пусть n − число (отобранных) участников тендера; T − событие, состоящее в том, что тендер выигрывается каким-либо участником тендера по цене, превышающей kx; A_i − событие, состоящее в том, что i-й участник тендера предлагает цену за работу (выставленную на тендер), не превышающую kx, $i \in \overline{1,n}$; C_i − событие, состоящее в том, что i-й участник тендера назначает цену за работу, превышающую x.

Пусть далее $\overline{Q}$ обозначает событие, противоположное событию Q. Тогда нетрудно убедиться в том, что событие T может быть представлено как произведение следующих двух сложных событий

$$T = M \times \Omega,$$

где $M = \overline{A}_1 \times \ldots \times \overline{A}_n$ − событие, состоящее в том, что все участники тендера назначат цену за выполнение работы, превышающую kx, в то время как $\Omega = \overline{C_1 \times \ldots \times C_m}$ − событие противоположное событию $C_1 \times \ldots \times C_m$, т.е. событие, состоящее в том, что хотя бы один из участников тендера назначит цену за выполнение работы, не превышающую x.

Как показано в [1], имеет место следующее равенство:

$$P(T) = \prod_{i=1}^{n}[1 - P(A_i)] - \prod_{i=1}^{n} P(C_i), \qquad (1)$$

где $P(V)$ − вероятность события V. Это равенство устанавливается простыми теоретико-вероятностными рассуждениями и базируются на легко устанавливаемом равенстве $P(\overline{C}/A)=1-P(C/A)$ для любых событий A и C, для которых $P(A)\neq 0$.

Дальнейшие рассуждения основываются на предположениях организатора тендера, которые он делает по результатам анализа возможностей потенциальных участников конкурса. Пусть h_i − цена, которую i-й участник тендера может предложить за работу. Если анализ, проведенный организатором тендера, показывает что h_i может изменяться в пределах $\underline{h}_i^f \le h_i \le \overline{h}_i^f$, $i\in\overline{1,n}$, в то время как организатор тендера не имеет каких-либо сведений о предпочтениях i-го участника тендера при выборе им значения h_i из указанного сегмента, то естественно предположить, что h_i является непрерывной случайной величиной, распределенной по закону равномерной плотности с плотностью вероятности, описываемой функцией $p(h_i)$, где

$$p(h_i)=\begin{cases}0,\ \text{если } h_i<\underline{h}_i^f\\ 1/(\overline{h}_i^f-\underline{h}_i^f),\ \text{если } \underline{h}_i^f<h_i<\overline{h}_i^f\\ 0,\ \text{если } h_i>\overline{h}_i^f.\end{cases}$$

Исходя из этих предположений, организатор тендера может выбрать параметры k и x и оценить вероятность события T, т.е. вероятность «отдать» работу по цене, превышающей kx. С этой целью организатору тендера следует рассмотреть как будет выглядеть функция $P(T)$ при различных взаимных расположениях сегментов $[kx,\ x]$ и $[\underline{h}_i^f,\overline{h}_i^f]$, $i\in\overline{1,n}$. Оказывается, что достаточно рассмотреть пять основных случаев такого взаимного расположения для i-го участника тендера:

а) $kx<x\le\underline{h}_i^f<\overline{h}_i^f$,

б) $kx<\underline{h}_i^f<x<\overline{h}_i^f$,

в) $\underline{h}_i^f<kx<x<\overline{h}_i^f$,

г) $\underline{h}_i^f<kx<\overline{h}_i^f<x$,

д) $\underline{h}_i^f<\overline{h}_i^f<kx<x$.

Ясно, что если минимальная цена, которую i-й участник назначает за работу, превосходит kx (т.е. превосходит желательное значение цены для организатора тендера), то вероятность события A_i равна нулю, так как A_i становится невозможным событием, т.е. $P(A_i)=0$ в случаях (а) и (б). Ясно также, что в случае (д) событие A_i является достоверным событием, так что $P(A_i)=1$. В двух оставшихся случаях вероятность события A_i является линейной функцией значения kx, а именно,

$$P(A_i) = \frac{kx - \underline{h}_i^f}{\overline{h}_i^f - \underline{h}_i^f}.$$

Аналогичные рассуждения позволяют убедиться в том, что в случае (а) C_i является достоверным событием, в то время как это событие является невозможным в случаях (г) и (д), так что $P(C_i) = 1$ в случае (а) и $P(C_i) = 0$ в случаях (г) и (д). В двух оставшихся случаях (б) и (в) вероятность события C_i является линейной функцией значения x, а именно,

$$P(C_i) = \frac{\overline{h}_i^f - x}{\overline{h}_i^f - \underline{h}_i^f}.$$

Очевидно, что если случай (д) имеет место хотя бы для одного участника тендера, то событие T становится невозможным событием, т.е. $P(T) = 0$, поэтому только случаи (а)−(г) представляют интерес для дальнейшего рассмотрения.

Нетрудно убедиться в том, что если случаи (а)−(в) имеют место для всех участников тендера, то значение вероятности «отдать» работу по цене, превышающей kx, описывается функцией

$$P(T) = \prod_{i=1}^{n} \min\left(1, \frac{\overline{h}_i^f - kx}{\overline{h}_i^f - \underline{h}_i^f}\right) - \prod_{i=1}^{n} \min\left(1, \frac{\overline{h}_i^f - x}{\overline{h}_i^f - \underline{h}_i^f}\right), \tag{2}$$

в то время как, если случай (г) имеет место хотя бы для одного участника тендера, значение этой вероятности описывается функцией

$$P(T) = \prod_{i=1}^{n} \min\left(1, \frac{\overline{h}_i^f - kx}{\overline{h}_i^f - \underline{h}_i^f}\right). \tag{3}$$

Функция $P(T)$ является функцией переменных k и x, для которых выполняются неравенства $\mu \le k \le \varepsilon$, $\underline{x} \le x \le \overline{x}$, где смысл чисел $\mu, \varepsilon, \underline{x}$ и x очевиден. Чтобы исключить случай (д) из рассмотрения, необходимо потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$kx \le \min_{i \in \overline{1,n}} \overline{h}_i^f.$$

Пусть $H = \{(k, x) \in R_+^2 : \ \mu \le k \le \varepsilon, \ \underline{x} \le x \le \overline{x}, \ kx \le \min_{i \in \overline{1,n}} \overline{h}_i^f\}$.

Организатор тендера заинтересован в отыскании таких значений параметров k и x, при которых достигается минимальное значение функции $P(T)$ на множестве H. Ясно, что это минимальное значение достигается, так как $P(T)$ является непрерывной функцией переменных k и x [3], а множество H является замкнутым, ограниченным множеством, что легко устанавливается простыми рассуждениями.

В то время как задача минимизации функции $P(T)$ на множестве H является достаточно сложной, организатор тендера обычно заинтересован в оценке значения вероятности $P(T)$ на множестве A снизу и сверху, так как знание даже оценок $\underline{\omega}$, $\overline{\omega}$ в неравенстве $\underline{\omega} \le \min_{(k,x)} P(T) \le \overline{\omega}$ позволяет выбрать подходящие значения для переменных k и x, т.е. установить максимальную приемлемую и желательную (для организатора) цену за работу, выставляемую на тендер.

Оценки границ вероятности $P(T)$

Если организатор тендера может достаточно точно определить границы $\underline{h}_i^f$ и $\overline{h}_i^f$, $i \in \overline{1,n}$, т.е. имеет достаточно подробную информацию о намерениях каждого участника тендера, задачи отыскания верхней и нижней оценки минимального значения вероятности $P(T)$ оказываются относительно несложными (в рамках сделанных предположений о функциях $p(h_i)$ – плотностях распределения вероятности непрерывных случайных величин h_i, $i \in \overline{1,n}$).

Рассмотрим вначале оценки для вероятности $P(T)$ в виде функции (3). Если $P(T)$ имеет вид (3), случай (г) взаимного расположения чисел $\underline{h}_i^f, \overline{h}_i^f, kx, x$ имеет место по крайней мере для одного участника тендера, что в свою очередь означает, что по крайней мере для одного $i \in \overline{1,n}$ должно выполняться равенство:

$$\min\left(1, \frac{\overline{h}_i^f - kx}{\overline{h}_i^f - \underline{h}_i^f}\right) = \frac{\overline{h}_i^f - kx}{\overline{h}_i^f - \underline{h}_i^f} \tag{4}$$

при $(k,x) \in H$. Если равенство (4) имеет место для участников тендера, образующих непустое множество $I \subset \overline{1,n}$, то справедливо неравенство

$$\prod_{i=1}^{n} \min\left(1, \frac{\overline{h}_i^f - kx}{\overline{h}_i^f - \underline{h}_i^f}\right) \le \min_{i \in I} \frac{\overline{h}_i^f - kx}{\overline{h}_i^f - \underline{h}_i^f}$$

для всех $(k,x) \in H$ и, следовательно, справедливо неравенство

$$\min_{(k,x)\in H} P(T) = \min_{(k,x)\in H} \prod_{i=1}^{n} \min\left(1, \frac{\overline{h}_i^f - kx}{\overline{h}_i^f - \underline{h}_i^f}\right) \le \min_{(k,x)\in H} \min_{i \in I} \frac{\overline{h}_i^f - kx}{\overline{h}_i^f - \underline{h}_i^f}. \tag{5}$$

Как показано в [1], отыскание значения правой части неравенства (5), которое совпадает с $\overline{\omega}$, сводится к сравнению конечного числа действительных чисел, именно к сравнению $|I|$ чисел, где $|I|$ – мощность (число элементов) конечного множества I.

С другой стороны, имеет место очевидная оценка

$$P(T)=\prod_{i=1}^{n}\min\left(1,\frac{\overline{h}_i^f-kx}{\overline{h}_i^f-\underline{h}_i^f}\right)\geq\left[\min_{i\in I}\frac{\overline{h}_i^f-kx}{\overline{h}_i^f-\underline{h}_i^f}\right]^{|I|},$$

так что

$$\min_{(k,x)\in H}P(T)\geq\min_{(k,x)\in H}\left[\min_{i\in I}\frac{\overline{h}_i^f-kx}{\overline{h}_i^f-\underline{h}_i^f}\right]^{|I|}.$$

В силу очевидного равенства

$$\min_{(k,x)\in H}\left[\min_{i\in I}\frac{\overline{h}_i^f-kx}{\overline{h}_i^f-\underline{h}_i^f}\right]^{|I|}=\left[\min_{(k,x)\in H}\min_{i\in I}\frac{\overline{h}_i^f-x}{\overline{h}_i^f-\underline{h}_i^f}\right]^{|I|}$$

справедлива оценка [1]

$$\min_{(k,x)\in H}P(T)\geq\overline{\omega}^{|I|}.$$

Отыскание оценок $\underline{\omega}$ и $\overline{\omega}$ для функции $P(T)$ в форме (2) представляет несколько более сложную задачу. Если $P(T)\neq 0$ (а именно этот случай представляет интерес), то равенство

$$\min\left(1,\frac{\overline{h}_i^f-x}{\overline{h}_i^f-\underline{h}_i^f}\right)=\frac{\overline{h}_i^f-x}{\overline{h}_i^f-\underline{h}_i^f}$$

должно выполняться для всех i из некоторого непустого собственного подмножества J множества $\overline{1,n}$, так что имеет место равенство

$$P(T)=\prod_{i=1}^{n}\min\left(1,\frac{\overline{h}_i^f-kx}{\overline{h}_i^f-\underline{h}_i^f}\right)-\prod_{i\in J}\frac{\overline{h}_i^f-x}{\overline{h}_i^f-\underline{h}_i^f}$$

и, следовательно, выполняется неравенство

$$P(T)\leq\min_{i\in\overline{1,n}}\min\left(1,\frac{\overline{h}_i^f-kx}{\overline{h}_i^f-\underline{h}_i^f}\right)-\left[\min_{i\in J}\frac{\overline{h}_i^f-x}{\overline{h}_i^f-\underline{h}_i^f}\right]^{|J|}.$$

Нетрудно убедиться в том, что имеет место оценка $\min\limits_{(k,x)\in H}P(T)\leq\delta-\gamma$, где

$$\delta=\max_{(k,x)\in H}\min_{i\in\overline{1,n}}\min\left(1,\frac{\overline{h}_i^f-kx}{\overline{h}_i^f-\underline{h}_i^f}\right),\quad \gamma=\min_{\underline{x}\leq x\leq\overline{x}}\left[\min_{i\in J}\frac{\overline{h}_i^f-x}{\overline{h}_i^f-\underline{h}_i^f}\right]^{|J|}.$$

Как показано в [1], отыскание числа γ сводится к отысканию минимальных значений конечного числа линейных функций на отрезке, в то время как число δ либо совпадает с единицей, либо его отыскание сводится к решению вспомогательной задачи линейного программирования. Следует заметить, что если равенство

$$\min\left(1, \frac{\overline{h}_i^f - kx}{\overline{h}_i^f - \underline{h}_i^f}\right) = 1 \tag{6}$$

выполняется для всех участников тендера, то

$$\min_{(k,x)\in H} P(T) \geq 1 - \max_{(k,x)} \min_{i\in J} \frac{\overline{h}_i^f - x}{\overline{h}_i^f - \underline{h}_i^f},$$

так что отыскание нижней границы минимального значения вероятности $P(T)$ сводится к решению задачи линейного программирования на отрезке.

Если же равенство (6) выполняется только для некоторого подмножества участников тендера, т.е. для всех $i \in I \subset \overline{1,n}$, то справедливо неравенство [1]

$$\min_{(k,x)\in H} P(T) \geq \min_{x\in[\underline{x},\overline{x}]} \left[\min_{i\in J\setminus\{i^*\}} \frac{\overline{h}_i^f - x}{\overline{h}_i^f - \underline{h}_i^f} \right]^{|J|-1} \times \min_{(k,x)\in H} \frac{x - kx}{\overline{h}_{i^*}^f - \underline{h}_{i^*}^f},$$

так что отыскание минимума на отрезке $[\underline{x}, \overline{x}]$ сводится к сравнению $|J| - 1$ чисел, в то время как отыскание минимума на множестве H сводится к решению задачи линейного программирования, где i^* − некоторый номер из множества J, т.е. $i^* \in J \subset \overline{1,n}$.

Если в результате предварительного анализа потенциальных участников тендера организатору тендера не удается выявить границы $\underline{h}_i^f$ и $\overline{h}_i^f$ для тех участников, которые будут отобраны для участия в тендере, задачи отыскания верхней и нижней границ минимального значения вероятности $P(T)$ значительно усложняются. Если, однако, организатор тендера может указать хотя бы границы изменения параметров $\underline{h}_i^f$ и $\overline{h}_i^f$, например,

$$p_i \leq \underline{h}_i^f \leq q_i, \quad \lambda_i \leq \overline{h}_i^f \leq \omega_i, \quad \pi_i \leq \overline{h}_i^f - \underline{h}_i^f \leq \sigma_i, \quad i \in \overline{1,n}, \quad p_i, q_i, \lambda_i, \omega_i, \pi_i, \sigma_i \in R_+^1,$$

т.е. векторы $\overline{h}_i^f = (\overline{h}_1^f, \overline{h}_2^f, \ldots, \overline{h}_n^f)$ и $\underline{h}_i^f = (\underline{h}_1^f, \underline{h}_2^f, \ldots, \underline{h}_n^f)$ удовлетворяют системе неравенств

$$P\overline{h}_i^f - Q\underline{h}_i^f \leq \Theta, \tag{7}$$

где P, Q − матрицы и Θ − вектор соответствующих размеров, то вместо $\min\limits_{(k,x)\in H} P(T)$, организатор тендера должен рассматривать

$$\min_{(k,x)\in H} \max_{(\underline{h}_i^f, \overline{h}_i^f)\in\Lambda} P(T), \tag{8}$$

где Λ – множество допустимых решений системы неравенств (7), и отыскивать верхнюю и нижнюю границы для числа (8).

Как показано в [1], задача отыскания грубой верхней границы для числа (8) сводится к решению некоторой вспомогательной задачи линейного программирования, которая может быть решена с использованием техники генерации столбцов [2, 7]. Отыскание более точной верхней оценки связано с решением задач об отыскании максимина конечного числа дробно-линейных функций на выпуклых многогранных множествах [1]. Общие методы решения подобных задач как задач негладкой оптимизации хорошо известны [4], в то время как методы, базирующиеся на использовании специфики этих задач, например, конечные методы разработаны лишь для простейших случаев двух дробно-линейных функций.

В [1] также показано, что в случаях, интересных для приложений, отыскание нижней оценки числа (8) сводится к решению конечного числа задач дробно-линейного программирования.

Ясно, что значения параметров k и x находятся из решения оптимизационных задач минимизации функций (2), (3) на множестве H или из решения задач (5), или из решения задачи отыскания верхней границы для числа (8).

Анализ эффективности правила определения победителя тендера с точки зрения организатора тендера

В то время как значение минимума вероятности $P(T)$ и его верхней и нижней оценок представляют интерес для организатора тендера прежде всего с точки зрения правильности выбора цены за работу x и процента от этой цены k, гарантируемого победителю организатором тендера, эффективность предложенного правила определения победителя тендера зависит от соотношения шансов «отдать» работу, выставленную на тендер, по цене x и по цене kx. Ясно, что хотя организатор тендера готов «отдать» работу по цене x, цена kx ($k < 1$), безусловно, является для него более предпочтительной, и если предложенное правило определения победителя тендера делает шансы выиграть этот тендер по цене kx большими, чем по цене x, то это правило следует считать эффективным с точки зрения организатора тендера. Оказывается, что предложенное правило действительно обладает таким свойством, по крайней мере при некоторых естественных предположениях.

Именно, предположим, что i-й (отобранный) участник тендера предполагает, что все другие отобранные участники предложат цену за работу, выставленную на тендер, находящуюся в том же самом промежутке, из которого сам этот участник тендера выбирает цену за работу, предлагаемую им организатору тендера.

Пусть F_j – событие, состоящее в том, что j-й участник тендера предлагает цену за работу, которая превосходит цену, предложенную i-ым участником, $j \in \overline{1,n} \setminus \{i\}$; B_j – событие, состоящее в том, что j-й участник тендера предлагает цену за работу большую, чем kx, $j \in \overline{1,n} \setminus \{i\}$; G_j – событие, состоящее в том, что j-й участник тендера предлагает цену за работу меньшую, чем kx, и меньшую, чем предлагает i-й участник тендера $j \in \overline{1,n} \setminus \{i\}$; T_i – событие, состоящее в том, что i-й участник тендера выигрывает тендер по цене, превышающей *kx*, $i \in \overline{1,n}$; S_i − событие, состоящее в том, что *i*-й участник тендера выигрывает тендер по цене *kx*, $i \in \overline{1,n}$; $K_{I_t^\lambda}$ − событие, состоящее в том, что *t* участников тендера из множества участников $I_t^\lambda \subset \overline{1,n} \setminus \{i\}$, $|I_t^\lambda| = t$, $t \in \overline{1,n-1}$, $\lambda \in \overline{1,C_{n-1}^t}$ предлагают цену за работу, не превосходящую *kx*, такую же как предлагает *i*-й участник тендера; N_t − событие, состоящее в том, что *i*-й участник выигрывает тендер по цене *kx*, при условии, что *t* других участников тендера предложили цену за работу, не превосходящую *kx*, $t \in \overline{1,n-1}$; $W_{I_t^\lambda}$ − событие, состоящее в том, что *t* участников тендера из множества $I_t^\lambda \subset \overline{1,n} \setminus \{i\}$, $|I_t^\lambda| = t$, $t \in \overline{1,n-1}$, $\lambda \in \overline{1,C_{n-1}^t}$ предлагают цену за работу, превосходящую *kx*, такую же как и *i*-й участник, в то время как все участники тендера предлагают цены за работу, превосходящие *kx*; H_t − событие, состоящее в том, что *i*-й участник выигрывает тендер при условии, что *t* других участников из множества $I_t^\lambda \subset \overline{1,n} \setminus \{i\}$, $|I_t^\lambda| = t$, $t \in \overline{1,n-1}$, $\lambda \in \overline{1,C_{n-1}^t}$ предложили одну и ту же цену, превосходящую *kx*, такую же как и *i*-й участник, в то время как все участники тендера предлагают цены за работы, превосходящие *kx*.

Тогда события T_i и S_i могут быть представлены следующим образом:

$$T_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \left(B_j F_j\right) + \sum_{t=1}^{n-1} \left(\sum_{\lambda=1}^{C_{n-1}^t} W_{I_t^\lambda} \prod_{j \in J_t^\lambda} B_j F_j \right) H_t,$$

в то время как

$$S_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} B_j + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{\lambda=1}^{C_{n-1}^t} K_{I_t^\lambda} \prod_{j \in J_t^\lambda} \left(B_j + G_j\right) \right) N_i + \prod_{j=1, j\neq i}^{n} G_j,$$

где $|I_t^\lambda| = t$, $|J_t^\lambda| = n-1-t$, $I_t^\lambda \cup J_t^\lambda = \overline{1,n} \setminus \{i\}$, $I_t^\lambda \cap J_t^\lambda = ø$, $\lambda \in \overline{1,C_{n-1}^t}$.

В силу сделанных предположений о непрерывности случайных величин h_i справедливо неравенство

$$P\left(T_i\right) = P(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} B_j) P((\prod_{j=1, j\neq i}^{n} F_j)/(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} B_j)) < P(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} B_j), \quad j \neq i$$

и

$$P(S_i) = P(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} B_j) + P(\sum_{i=1}^{n-1} (\sum_{\lambda=1}^{C_{n-1}^t} K_{I_t^\lambda} \prod_{j \in J_t^\lambda} (B_j + G_j)) N_i) + P(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} G_j) > P(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} B_j),$$

так что

$$P(T_i) < P(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} B_j) < P(S_i),$$

что означает, что шансы любого участника тендера выиграть тендер по цене, превосходящей kx, меньше, чем шансы выиграть тендер по цене kx. Таким образом, предложенное правило обслуживает интересы организатора конкурса в том смысле, что позволяет ему надеяться на то, что работа, выставленная на тендер, будет «отдана» победителю по цене (kx), более низкой, чем та цена (x), по которой организатор тендера может себе позволить «отдать» эту работу.

Анализ эффективности правила определения победителя тендера с точки зрения участника тендера

Хорошо известно (и об этом упоминалось во введении к настоящей работе), что победитель закрытых тендеров – т.е. тендеров, в которых участники подают свои предложения о цене за работу, выставленную на тендер, так, что эта стоимость остается неизвестной для других участников тендера – часто определяется по принципу: кто подаст предложение с наименьшей ценой за работу, тот и выиграет тендер (в предположении, что только один участник тендера подает предложение с наименьшей стоимостью). В этой связи представляется целесообразным оценить, каково соотношение между шансами участника выиграть тендер по цене, желательной для организатора тендера – т.е. по цене kx, – по указанному традиционному правилу и по правилу, предложенному в настоящей работе.

Пусть D_i – событие, состоящее в том, что i-й участник тендера выигрывает тендер по цене kx по традиционному правилу (т.е. по правилу, согласно которому участник, предложивший наименьшую цену за работу, выставленную на тендер, выигрывает тендер); Q_t – событие, состоящее в том, что t участников тендера предлагают цену kx за работу, выставленную на тендер, $I_t^{\lambda} \subset \overline{1,n} \setminus \{i\}$, $|I_t^{\lambda}| = t$, $t \in \overline{1,n-1}$, $\lambda \in \overline{1,C_{n-1}^t}$; M_t – событие, состоящее в том, что i-й участник тендера выигрывает тендер по цене kx в предположении о том, что t других участников тендера также предложили цену kx за работу.

Событие D_i может быть представлено следующим образом:

$$D_i = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} B_j + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{\lambda=1}^{C_{n-1}^t} Q_{I_t^{\lambda}} \prod_{j\in J_t^{\lambda}} B_j F_j\right) M_t,$$

так что выполняются равенство

$$P(D_i) = P\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} B_j\right)$$

и неравенство

$$P(T_i) < P(D_i) < P(S_i). \tag{9}$$

Последнее неравенство означает, что для любого участника тендера шансы выиграть тендер по цене kx по предложенному правилу определения победителя тендера выше, чем по традиционному правилу. Это означает, что условия тендера, включающие предложенное правило определения победителя, оказываются более привлекательными для потенциальных участников тендера, чем традиционное правило, упомянутое выше.

Заключительные замечания

1. Предложенное правило определения победителя тендера является примером того, как разумный экономический механизм может стимулировать взаимовыгодное (в некотором естественном смысле) взаимодействие организатора и участников тендера.

2. При сделанных предположениях об оценке i-ым участником тендера возможных стратегий выбора цены за работу, выставленную на тендер, остальными участниками тендера неравенства (9) имеют место при любых видах плотности распределения непрерывных случайных величин h_i, $i \in \overline{1,n}$.

3. Выявление единственного победителя тендера из числа тех его участников, которые предложили наименьшую одинаковую цену за работу (выставленную на тендер), превышающую kx (если ни один из участников тендера не предложил цену за работу, не превышающую kx), или из числа тех участников, которые предложили цену за работу, не превосходящую kx, осуществляется посредством жеребьевки. Хотя принципиально возможны и другие способы выбора единственного победителя, важно иметь в виду, что цена за работу не должна меняться в результате этой дополнительной процедуры выбора, так как в противном случае тендер не является одношаговым и справедливость его правил может быть оспорена другими участниками тендера. В случае выбора единственного победителя одношагового тендера не по жребию, а, например, по каким-либо дополнительным факторам (число выигранных ранее тендеров, длительность работы в соответствующей сфере рынка услуг, дополнительные гарантии по курированию выполненной работы, консультированию, обучению персонала организатора тендера и т.д.) все эти факторы должны быть оговорены в условиях тендера и объявлены заранее отобранным участникам тендера.

4. Формирование списка отобранных (приглашенных) участников тендера является весьма эффективным «фильтром», отсекающим тех потенциальных участников тендера, которые не имеют необходимой квалификации, опыта работы и т.д., но которые случайно могли бы выиграть тендер в соответствии с предложенным правилом определения этого победителя. Таким образом, предложенное правило определения победителя тендера рассчитано лишь на выявление «лучших среди равных (или почти равных)», где «равенство» понимается в смысле потенциальных возможностей отобранных участников, но не в смысле предлагаемых ими цен за работу. Оно не предназначено для выявления каких-либо потенциальных участников, ответственно относящихся к тендеру, среди всех желающих получить выставленную на тендер работу (в том числе «любой ценой», включая «закулисные» договоренности, а не в ре-

зультате честного соревнования идей и мастерства). Обычно организаторы тендеров имеют достаточно широкие, хотя и ограниченные возможности для предварительного отбора кандидатов на участие в тендере, включая предложение об участии в предварительном собеседовании, деловой игре, решении модельной проблемы и других мероприятиях, направленных на объективное выявление возможностей организаций и частных лиц, заинтересованных в участии в тендере.

5. Как указывалось выше, хотя организатор тендера и заинтересован в том, чтобы отобранные участники тендера подавали предложения о цене за работу, выставленную на тендер, отражающие их реальные затраты на выполнение работы, естественно, что он (организатор), тем не менее, заинтересован «отдать» работу по наименьшей разумной цене. Предложенные оценки для вероятности «отдать» работу, выставленную на тендер, по цене, превышающей kx (но не превышающей x), помогают организатору тендера выбрать такие k и x, чтобы соблюсти «баланс» между ожидаемым «разбросом» значений предлагаемой стоимости проекта и интересами организатора тендера.

Действительно, чем ближе к единице значение параметра k, тем выше интерес к участию в тендере; однако, неудачный выбор конкретного значения параметра k может существенно «завысить» цену, по которой организатор тендера вынужден будет «отдать» работу победителю тендера. Если, например, предложения (отобранных) участников тендера окажутся сконцентрированными в промежутке $[0{,}92x,\ 0{,}94x]$, в то время как организатор тендера выбрал значение k=0,945, тендер будет выигран по цене $0{,}945x$, в то время как выбор $k \leq 0{,}94x$ позволяет организатору тендера «сэкономить» $0{,}05x$, т.е. 0,5% от стоимости x (что может быть весьма существенным), без «потери» кого-либо из «желательных» участников тендера.

6. Предложенное правило определения победителя тендера является не более чем конкретным правилом из набора такого рода правил, направленных на формирование экономического механизма, стимулирующего обе «стороны» к взаимному изучению друг друга. В случае государственных структур установление подобных «правил игры» − это одна из основных функций государства с рыночной экономикой, которая состоит в замене администрирования в пользу государства рыночными механизмами, часто позволяющими государству выиграть больше, чем оно может выиграть в результате администрирования, и в то же время обеспечить привлекательные условия для честного соревнования участников рыночных отношений.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Belenky A.S*. Two Rules of a Sealed Ceiling Bid and their Analysis By Mathematical Programming Techniques // Computers and Mathematics with Applications. 2006. № 52. P. 1711−1732.

2. *Dantzig G., Thapa M.* Linear Programming 2: Theory and Extensions. Springer, 2003.

3. *Demyanov V., Malozemov V.* Introduction to Minimax. Dover Publications, 1990.

4. *Gill P., Murray W., Wright M.* Practical Optimization. N.Y.: Academic Press, 1981.

5. *Klemperer P.* Auction Theory: A Guide to Literature // Journal of Economic Surveys. 1999. № 13(3). P. 227–286.

6. *Krishna V.* Auction Theory. N.Y.: Academic Press, 2002.

7. *Lasdon L.* Optimization Theory for Large System. Dover Publications, 2002.

8. *McAfee R., McMillan J.* Auction and Bidding // Journal of Economic Literature. 1987. № 25. P. 699–738.

9. *Vickrey W.* Counterspeculation, Auctions and Competitive Bidding // Journal of Finance. 1961. № 16. P. 8–37.