Факторная идентичность траекторных индексов, порождаемых конструкциями Дивизиа и Монтгомери, как определяющее свойство логарифмических индексов цен и количеств

Ершов Э.Б.

Предлагается аксиоматическое решение проблемы выбора динамической конструкции индексов и траекторий цен и количеств. Доказывается существование траекторий цен и количеств товаров и услуг, для которых идентичны индексы, порождаемые предложенными Дивизиа и Монтгомери альтернативными конструкциями индексов. Получаемые и рекомендуемые для практического применения индексы Дивизиа – Монтгомери, известные также как логарифмические индексы и индексы Монтгомери – Вартиа(I), обладают аксиоматическими свойствами одновременно индексов Дивизиа и индексов Монтгомери. Они однозначно характеризуются постоянными на траекториях и равными долями вклада каждого фактора в изменение стоимости и логарифма индекса стоимости для рассматриваемого набора товаров. Это свойство индексов соответствует принимаемому в статистической практике предположению об однородности изучаемого процесса совместного изменения цен и количеств в соседних состояниях. Предлагаемый подход распространяется на расчет сцепленных индексов для последовательности сравниваемых состояний-периодов.

Ключевые слова: индексы цен и количеств, скользящие периоды, средняя для периода цена товара, траектории цен и количеств, конструкции индексов Дивизиа и Монтгомери, логарифмические индексы, индексы Монтгомери – Вартиа(I).

1. Введение

В 1925 г. Франсуа Дивизиа предложил новую для того времени конструкцию индексов цен и количеств, определяемых наборами этих показателей для двух сравниваемых периодов времени [20]. Индексы Дивизиа определяются, если выбраны дифференцируемые траектории цен и количеств для скользящих периодов или состояний изучаемой системы, описывающих процесс перехода или преобразования ее базового состояния в конечное. Джон Монтгомери в 1929 г. [24] ввел в рассмотрение

Ершов Э.Б. – к.э.н., профессор кафедры математической экономики и эконометрики Государственного университета – Высшей школы экономики, e-mail: emborer33@gmail.com

Статья поступила в Редакцию в декабре 2009 г.

альтернативную конструкцию траекторных индексов, которая многие годы, фактически до появления обзорной статьи Балка [15] оставалась вне поля зрения специалистов по теории индексов.

Сторонники так называемых статистического и экономического направлений в теории индексов критиковали индексы Дивизиа на том основании, что по статистическим данным невозможно идентифицировать определяющие их траектории цен и количеств. Существование двух различных конструкций траекторных индексов, выбор из которых не был теоретически обоснован, усиливал позицию, отрицающую возможности практического их применения. Предложение использовать линейный путь, соединяющий цены и количества в граничных состояниях, приводящее к так называемым нормальным индексам Дивизиа – Фогта [32], не получило по ряду причин поддержки ни у теоретиков, ни у практиков [4; 5; 10; 15; 19; 29]. Индексы Дивизиа и индексы Монтгомери было предложено использовать в виде их дискретных аппроксимаций, т.е. индексных формул, не требующих задания траекторий цен и количеств. Известны и применяются две такие аппроксимации, а именно индекс цен Торнквиста вместе с имплицитным ему индексом количеств и логарифмические индексы, или индексы Монтгомери – Вартиа(I) [4; 5; 10; 25; 28; 30; 33].

Аксиоматическое определение индексов Дивизиа было дано Рихтером [26]. Из него следует, что они не могут быть независимыми от выбора путей, т.е. траекторий цен и количеств. Содержательная интерпретация индексов Дивизиа предложена в PhD-диссертации Меланея [23]. Ее краткое изложение приведено в [15]. С позиций экономического направления теории индексов конструкция индексов, предложенная Дивизиа, рассматривалась в целом ряде работ, в том числе в [12; 15; 19; 31]. Конструкция индексов, предложенная Монтгомери, с таких позиций не характеризовалась, хотя она и индексные формулы Монтгомери – Вартиа(I) оказались теснейшим образом связанными с проблемой разделения прироста стоимости товара или группы товаров на слагаемые, соответствующие вкладам факторов цен и количеств [6; 7; 8; 9; 17; 24].

Аксиоматическое решение проблемы факторного разложения прироста стоимости предложено автором данной статьи в 1965 г. [9, с. 34–41], но было опубликовано существенно позднее [1; 2]. Оно основывается на Аксиоме постоянства всех долей вкладов факторов в приросте стоимости вдоль пути, состоящего из траекторий цен и количеств и определяющего ей искомое факторное разложение. Эта Аксиома интерпретируется как формализация предположения об однородности процесса перехода из начального (базового) состояния в любое промежуточное состояние между ним и конечным состоянием, включая последнее. В статистической практике однородность такого процесса трактуется как отсутствие необходимости учитывать и использовать какую-либо информацию о ценах и количествах в состояниях, реализующихся в переходном процессе между сравниваемыми граничными состояниями.

Основной результат, относящийся к траекторным индексам, который следует из принятия Аксиомы постоянства долей вкладов факторов, состоит в том, что она определяет семейство путей, для которых конструкции индексов Дивизиа и Монтгомери порождают идентичные индексные формулы, и последние совпадают с индексами Монтгомери – Вартиа(I). Заметим, что индексы, являющиеся одновременно индексами Дивизиа и индексами Монтгомери, обладают важными с позиций теории и практики свойствами, присущими таким траекторным индексам по отдельности. Например, как частный случай индексов Дивизиа они согласованны относительно агрегирования, тогда как этим свойством в общем случае не обладают индексы Монтгомери [4; 10; 11; 13; 14; 15; 18]. Как частный случай индексов Монтгомери они дают ясное решение проблемы факторного разложения изменения стоимости набора товаров.

Но этот результат не мог пониматься как окончательное решение проблем выбора путей в конструкциях индексов Дивизиа и Монтгомери. Оставалось неясным, существуют ли другие системы путей, для которых конструкции индексов Дивизиа и Монтгомери порождают совпадающие индексные формулы. Для таких путей, если бы они существовали, могли бы не быть постоянными доли вкладов факторов.

В статье предлагается постановка и решение этой центральной для теории траекторных индексов проблемы. В разделе 2 показывается, что индексы Дивизиа и индексы Монтгомери имеют различные свойства, и поэтому проблема выбора конструкции траекторных индексов требует решения. В разделе 3 доказывается идентичность индексов Дивизиа и Монтгомери для путей с постоянными долями вкладов факторов и их совпадение с индексами Монтгомери – Вартиа(I). В разделе 4 доказывается, что требование равенства во всех точках искомого пути индексов, порождаемых конструкциями Дивизиа и Монтгомери, однозначно определяет траектории цен и количеств. Получаемые таким образом индексы цен и количеств имеют постоянные доли вкладов факторов. Их предлагается называть индексами Дивизиа – Монтгомери. В традиционно используемых названиях «логарифмические индексы» и «индексы Монтгомери – Вартиа(I)» отражаются только особенности функциональной формы индексов или авторство конкретной дискретной аппроксимации траекторных индексов, в то время как эти индексные формулы являются единственным случаем индексов, порождаемых двумя разными конструкциями индексов. В разделе 5 статьи анализируются свойства сцепленных индексов Дивизиа – Монтгомери, определяемых для последовательности состояний изучаемой системы цен и количеств.

2. Определения и свойства индексов, порождаемых конструкциями Дивизиа и Монтгомери

Предложенные Дивизиа и Монтгомери траекторные конструкции индексов исходят из следующих, общих для них предположений. Начальное и конечное состояния рассматриваемой системы цен p_i и количеств $q_i (i = 1,\ldots,n)$ n товаров представлены положительными точками $(p^0,q^0) \equiv (p^0{}_i; q^0{}_i)$, $(p^1;q^1) \equiv (p^1{}_i; q^1{}_i)$ $2n$-мерного вещественного пространства R^{2n}. Задается или ищется путь $\pi(t;p^0,q^0;p^1,q^1) \equiv \{p_i(t), q_i(t)\}$, соединяющий граничные точки и описывающий переход системы из начального состояния ($t = 0$) в конечное состояние ($t = 1$) с помощью траекторий цен и количеств, являющихся дифференцируемыми функциями от параметра $t (t \in [0;1])$.

Если граничные состояния характеризуются количествами товаров и их средними ценами для периодов единичных продолжительностей, начальными моментами которых являются моменты времени $t = 0$ и $t = 1$ соответственно, то количества $q_i(t)$ и цены $p_i(t)$ при $0 < t < 1$ определяются как соответствующие показатели для «скользящих» периодов времени с $\tau \in [t; t + 1]$, начинающихся с моментов $\tau = t$. Рассмотрение изменяющихся во времени количеств $q_i(t)$ и средних цен $p_i(t)$ товаров для скользящих периодов, характерное для траекторных или динамических индексов, соответствует предположению о непостоянстве цен, наблюдаемых для моментов времени, и о существовании взаимосвязанных тенденций в динамике цен, количеств и стоимостей товаров.

Тогда при выбранном пути $\pi(t)$ и $t \in [0;1]$ выполняются тождества

$$V(t) - V(0) = \sum_i p_i(t)q(t) - \sum_i p_i(0)q_i(0) \equiv$$

(1)
$$\equiv \sum_i \int_0^t \frac{dp_i(\tau)}{dt} q_i(\tau)d\tau + \sum_i \int_0^t p_i(\tau)\frac{dq_i(\tau)}{d\tau} d\tau =$$

$$= \sum_i \Delta_{p_i} v(t) + \sum_i \Delta_{q_i} v(t) \equiv \Delta_p V(t) + \Delta_q V(t),$$

(2)
$$\ln V(t) - \ln V(0) = \sum_i \int_0^t \frac{dp_i(\tau)}{dt}\frac{q_i(\tau)}{v(\tau)} d\tau + \sum_i \int_0^t \frac{dq_i(\tau)}{d\tau}\frac{p_i(\tau)}{v(\tau)} d\tau \equiv$$

$$\equiv \Delta_p \ln V(t) + \Delta_q \ln V(t),$$

где $\sum_i \Delta_{p_i} v(t), \sum_i \Delta_{q_i} v(t)$ – вклады факторов цен и количеств в изменение (приращение) стоимости $V(t)$, а $\Delta_p \ln V(t) + \Delta_q \ln V(t)$ – вклады факторов в логарифм индекса стоимости $(\ln \mathrm{IV}(t) = \ln V(t) - \ln V(0))$ вдоль пути $\pi(t)$.

Дивизиа [20], используя формулу (2), предложил определять траекторные индексы цен IP_π и количеств IQ_π, или *индексы Дивизиа,* равенствами

(3)
$$\ln \mathrm{IP}_\pi = \Delta_p \ln V(1) \equiv \ln \mathrm{IP}D, \quad \ln \mathrm{IQ}_\pi = \Delta_q \ln V(1) \equiv \ln \mathrm{IQ}D.$$

Монтгомери [24] ввел свою конструкцию траекторных индексов IP_π и IQ_π:

(4)
$$\ln \mathrm{IP}_\pi = \Delta_p \ln V(1) \,/\, L(V(0),V(1)) \equiv \ln \mathrm{IP}M,$$
$$\ln \mathrm{IQ}_\pi = \Delta_q \ln V(t) \,/\, L(V(0),V(1)) \equiv \ln \mathrm{IQ}M,$$

в которой $\ln \mathrm{IP}M$, $\ln \mathrm{IQ}M$ – *индексы Монтгомери;* $L(x,y)$ – непрерывная и симметричная функция $(L(x,y) = L(y,x))$ положительных переменных x,y, определяемая следующим образом: $L(x,y) = (x - y) / \ln(x/y)$, если $x \neq y$, и $L(x,x) = x$.

Функцию $L(x,y)$ называют логарифмическим средним. Она изучена и обладает следующими свойствами: $L(\lambda x,\lambda y) = \lambda L(x,y)$ при $\lambda > 0$, $\min(x,y) \leq L(x,y) \leq \max(x,y)$, $(x,y)^{1/2} \leq L(x,y) \leq (x + y)/2$. Если $V(1) \neq V(0)$, то $\ln \mathrm{IP}M = [\Delta_p V(1) \,/\, \Delta V(1)] \ln \mathrm{IV}$, $\ln \mathrm{IQ}M = [\Delta_q \mathrm{V}(1) \,/\, \Delta V(1)] \ln \mathrm{IV}$ и логарифм индекса стоимости $(\ln \mathrm{IV} \equiv \ln V(1) \,/\, V(0))$ разделяется на слагаемые $\ln \mathrm{IP}M$ и $\ln \mathrm{IQ}M$ с помощью долей факторов цен и количеств в $\Delta V = V(1) - V(0)$. Если $V(1) = V(0)$, то $\ln \mathrm{IP}M = \Delta_p V(1) \,/\, V(0)$, $\ln \mathrm{IQ}M = \Delta_q V(1) \,/\, V(0))$.

В обозначениях индексов Дивизиа и Монтгомери используются набираемые *курсивом* буквы D и M, поскольку индексы $\mathrm{IP}D$, $\mathrm{IQ}D$ и $\mathrm{IP}M$, $\mathrm{IQ}M$ – это не конкретные индексные формулы, а именно конструкции индексов, включающие задаваемый путь $\pi(t)$. Именно выбор семейства S_π путей $\pi(t;p^0,q^0;p^1,q^1) \in S_\pi$, элементы которого определяются парами граничных точек (p^0,q^0) и (p^1,q^1), представляет собой центральную проблему траекторной или динамической теории индексов. Заметим, что в литературе по теории индексов логарифмическими индексами, индексами Монтгомери – Вартиа(I) или даже индексами Монтгомери называют индексные формулы, предложенные Монтгомери [25] и позднее другими авторами, исходя из различных соображений.

Эти индексы, обозначаемые в дальнейшем IPM и IQM, в течение многих лет трактовались как аппроксимации траекторных индексов Дивизиа или Монтгомери, не требующие задания траекторий цен и количеств.

Необходимо иметь в виду, что для фиксированного пути

$$\pi(t) \equiv \pi(t; p^0, q^0; p^1, q^1) \equiv \{p^0(t), q^0(t); p^1(t), q^1(t)\}$$

значения индексов, получаемых в конструкциях индексов Дивизиа и Монтгомери, в общем случае различаются. До тех пор пока путь $\pi(t)$ не выбран, это различие «скрыто» в определяющих такие индексы конструкциях. Поэтому продемонстрируем, как индексы Дивизиа и Монтгомери могут различаться на примере случая линейных траекторий цен и количеств:

$$(5) \qquad p_i(t) = p^0{}_i + t(p^1{}_i - p^0{}_i), \;\; q_i(t) = q^0{}_i + t(q^1{}_i - q^0{}_i), \;\; t \in [0;1].$$

Напомним, что в таком случае Фогт [32] получил формулы для индексов Дивизиа, названных им нормальными индексами. Для таких траекторий стоимость $V(\mathrm{t}) = \sum_i p_i(t) q_i(t)$ является квадратичной функцией времени. Поскольку цены и количества в граничных состояниях (при $t = 0$ и $t = 1$) предполагаются положительными, то положительны и траектории цен и количеств между ними. Но стоимость $V(t)$ в формулах индексов Дивизиа используется в качестве знаменателя, и поэтому формулы для соответствующих неопределенных и определенных интегралов, определяющих эти индексы, распадаются на три случая в зависимости от того положителен, отрицателен или равен нулю дискриминант квадратного уравнения

$$V(z) \equiv [\textstyle\sum_i (p^1{}_i - p^0{}_i)(q^1{}_i - q^0{}_i)] z^2 + [\sum_i (p^1{}_i - p^0{}_i) q^0{}_i + \sum_i p^0{}_i (q^1{}_i - q^0{}_i)] z + \sum_i p^0{}_i q^0{}_i \equiv az^2 + bz + c = 0.$$

Формулы для *нормальных* индексов цен и количеств Дивизиа – Фогта в этих трех случаях приведены, например, в [5, с. 90]. К сожалению, в формуле для дискриминанта $(b^2 - 4ac)$ там допущена очевидная ошибка.

Для индексов Монтгомери, порождаемых линейными траекториями (5) и *называемых индексами Монтгомери – Фогта*, следующие простые формулы получаются без труда:

$$(6) \qquad \mathrm{IPMV} = \textstyle\sum_i (p^1{}_i - p^0{}_i)(q^1{}_i + q^0{}_i) \,/\, 2L(V(0), V(1)),$$

$$\mathrm{IQMV} = \textstyle\sum_i (p^1{}_i + p^0{}_i)(q^1{}_i - q^0{}_i) \,/\, 2L(V(0), V(1)).$$

Формулы для индексов Монтгомери – Фогта не только не распадаются на три варианта, но и существенно проще, чем формулы для индексов Дивизиа – Фогта.

Важным представляется то, что конструкции индексов, порождаемые конструкциями Дивизиа и Монтгомери, в общем случае имеют разные свойства. Особенностью таких динамических индексов является проявление их свойств на различных множествах сравниваемых состояний (что характерно для моментных или статических индексов) и на различных семействах путей. Последнее характерно именно для траекторных или динамических индексов и не отмечается в большинстве работ, анализировавших свойства индексов IP*D*, IQ*D* и IP*M*, IQ*M*. Поэтому рассмотрим такие свойства более подробно, используя при этом работы [4; 11; 13; 14; 15; 16; 18; 21; 22; 27].

Свойства семейств индексов Дивизиа IPD, IQD и Монтгомери IPM, IQM будем анализировать, определяя такие свойства для:

A) фиксированного пути при заданных граничных состояниях (p^0,q^0), (p^1,q^1) и траекториях цен и количеств $\{p_i(t), q_i(t)\}$;

B) путей, получаемых некоторым преобразованием траекторий $\{p_i(t), q_i(t)\}$ в траектории $\{p_i(t)^*, q_i(t)^*\} = F(\{p_i(t), q_i(t)\};a)$, где a – параметры преобразования $F(\{\ldots\};a)$ при фиксированных граничных состояниях;

C) путей, состоящих из преобразованных траекторий $\{p_i(t)^*,q_i(t)^*\}$ с изменяющимися граничными состояниями $(p^{k*},q^{k*}) \neq (p^k,q^k)$, $k = 0, 1$.

Индексы {IPD, IQD} и {IPM, IQM} для определяемых таким образом трех классов траекторий цен и количеств будем называть *множествами индексов*, обозначая такие множества соответственно D(A), D(B), D(C) и M(A), M(B), M(C). Нашей целью не является доказательство того, что индексы из этих множеств имеют одни и в общем случае не имеют другие свойства, поскольку многие такие утверждения содержатся в упоминаемых выше работах. Однако формулировки не встречавшихся в них утверждений и их доказательства будут приведены.

Индексы Дивизиа из D(A) удовлетворяют аксиомам стоимости, обратимости состояний, обратимости факторов, транзитивности (циркулярности), монотонности, согласованности при агрегировании и идентичности; их значения не изменяются при невырожденных преобразованиях параметризации пути ($t = g(\tau)$, $\tau = g^{-1}(t)$) и при изменении единицы измерения стоимости; но для них не выполняется аксиома среднего ($\min(p^1_i / p^0_i) \leq \mathrm{IP} \leq \max(p^1_i / p^0_i)$).

Индексы Монтгомери из M(A) обладают почти теми же свойствами, что и индексы из D(A), но для них не выполняются аксиомы транзитивности, согласованности при агрегировании и идентичности. К формулировке свойства транзитивности для индексов Дивизиа и индексов Монтгомери, которое может пониматься неоднозначно, мы обратимся в разделе 4 данной статьи.

Для того чтобы анализировать свойства динамических индексов из множеств D(B) и M(B), необходимо задать множество путей, состоящих из траекторий $\{p(t)^*,q(\mathrm{t})^*\}$, индексы для которых сравниваются с индексами для траектории $\{p(t),q(t)\}$. Такое преобразование траекторий зададим в виде соотношений

$$p_i(t)^* = \lambda(t)p_i(t),\ q_i(t)^* = q_i(t),\ i = 1,\ldots,n,\ 0 \leq t \leq 1, \tag{7}$$

где непрерывная функция $\lambda(t)$ удовлетворяет условиям $\lambda_i(t) \geq 1$, $\lambda_i(0) = \lambda_i(1) = 1$.

Тогда для путей π^* и индекса количеств Дивизиа, используя (2), имеем

$$\ln \mathrm{IQ}D^* = \sum_i \int_0^1 \left[\frac{dq_i(t)}{dt} p_i(t)\lambda(t) / v(t)\lambda(t) \right] dt = \ln \mathrm{IQ}D \tag{8}$$

и поскольку $\ln(V(1)^* / V(0)^*) = \ln(\lambda(1)V(1) / \lambda(1)V(0)) = \ln(V(1) / V(0))$, то $\ln \mathrm{IP}D^* = \ln \mathrm{IP}D$. Таким образом, при пропорциональном увеличении цен в интервале между граничными моментами времени ($0 < t < 1$) и при неизменяющихся количествах индексы Дивизиа не изменяются.

Для путей π^* и индекса количеств Монтгомери IQM аналогичным образом получаем

$$(9)\qquad \ln \mathrm{IQ}M^* = \left\{\sum_i \int_0^1 \lambda(t) p_i(t) \frac{dq_i(t)}{dt} dt\right\} / L(V^*(0), V(1)^*) =$$

$$= \left\{\sum_i \int_0^1 \lambda(t) p_i(t) \frac{dq_i(t)}{dt} dt\right\} / L(V(0), V(1)) > \ln \mathrm{IQ}M,$$

поскольку $\lambda(t) \geq 1$, $\lambda(0) = \lambda(1) = 1$, но функция $\lambda(t)$ не равна тождественно единице. Следовательно, $\ln\mathrm{IP}M^* < \ln\mathrm{IP}M$ и $\mathrm{IP}M^* < \mathrm{IP}M$.

Более общее преобразование траекторий $\{p(t),q(t)\}$ в траектории $\{p(t)^*,q(t)^*\}$ зададим в виде

$$(10)\qquad p_i(t)^* = \lambda_i(t)p_i(t),\ \ q_i(t)^* = q_i(t),\ \ i = 1,\ldots,n,\ 0 \leq t \leq 1,$$

где непрерывные функции $\lambda_i(t)$ удовлетворяют условиям $\lambda_i(t) \geq 1$, $\lambda_i(0) = \lambda_i(1) = 1$.

Тогда для индекса количеств Дивизиа

$$\ln \mathrm{IQD}^* = \sum_i \int_0^1 \left[\frac{dq_i(t)}{dt} p_i(t)\lambda_i(t) / \sum_j v_j(t)\lambda_j(t)\right] dt$$

не удается получить какое-либо неравенство или равенство, если не принимать дополнительные предположения о динамике отношений цен $p_i(t)^* / p_i(t) \equiv \lambda_i(t)$.

Но для индекса количеств Монтгомери $\mathrm{IQ}M^*$ удается доказать неравенство $\mathrm{IQ}M^* \geq \mathrm{IQ}M$, если количества не убывают со временем. В этом случае

$$(11)\qquad \mathrm{IQ}M^* = \left\{\sum_i \int_0^1 \lambda_i(t) p_i(t) \frac{dq_i(t)}{dt} dt\right\} / L(V(0), V(1)) \geq \ln \mathrm{IQ}M,$$

поскольку $\lambda_i(t) \geq 1$.

Для индексов из множеств D(C) и M(C) траектории $\{p(t)^*,q(t)^*\}$ определим следующим образом:

$$p_i(t)^* = \lambda_i(t)p_i(t),\ \ q_i(t)^* = \mu q_i(t),\ \ i = 1,\ldots,n,\ \ 0 \leq t \leq 1,$$

принимая, что выполняются неравенства $\lambda_i(t) \geq 1$, $\mu > 0$ и граничные условия $\lambda_i(0) = \lambda^0$, $\lambda_i(1) = \lambda^1$, но случай $\lambda_i(0) = \lambda_i(1) = 1$ не рассматривается.

Очевидно, что по тем же причинам, как для индексов из D(B), для индексов из D(C) какие-либо утверждения получить не удается. Но для индекса количеств $\mathrm{IQ}M^*$ Монтгомери при $V(1)^* - V(0)^* \equiv \mu\{\lambda^1 V(1) - \lambda^0 V(0)\} \neq 0$ имеем

$$\ln \mathrm{IQ}M^* = \left\{\sum_i \int_0^1 \mu\lambda_i(t) p_i(t) \frac{dq_i(t)}{dt} dt\right\} / L(V(0)^*, V(1)^*) =$$

$$= \mu\left\{\sum_i \int_0^1 \lambda_i(t) p_i(t) \frac{dq_i(t)}{dt} dt\right\} / L(V(1)^*, V(0)^*).$$

Поскольку $\sum_i \int_o^1 \lambda_i(t) p_i(t) \frac{dq_i(t)}{dt} dt \geq \sum_i \int_o^1 p_i(t) \frac{dq_i(t)}{dt} dt$, то для того, чтобы в предположении, что lnIQM > 0, выполнялось неравенство $\mathrm{IQ}M^* \geq \mathrm{IQ}M$, достаточно выполнение неравенства

$$\mu / L(V(1)^*, V(0)^*) \geq 1 / L(V(1), V(0)).$$

Это неравенство представляется в виде

$$\frac{\ln[V(1)/V(0)] + \ln[\lambda^1/\lambda^0]}{\lambda^i V(1) - \lambda^0 V(0)} \geq \frac{\ln[V(1)/V(0)]}{V(1) - V(0)} \tag{12}$$

и в случае положительных знаменателей оно преобразуется в неравенство

$$[V(1) / V(0) - 1]\ln[V(1) / V(0)] \geq [\lambda^1 - \lambda^0] / [\lambda^1 - 1].$$

При заданном индексе стоимости $\mathrm{IV} = V(1) / V(0)$ неравенство (12) определяет пары коэффициентов (λ^1, λ^0), для которых $\mathrm{IQ}M^* \geq \mathrm{IQ}M$. Если знаменатели в (12) положительны, то при сделанных предположениях

$$\mathrm{IQ}M^* \geq \mathrm{IQ}M \cdot \psi \equiv \mathrm{IQ}M \cdot \left\{ \left(\frac{\ln[V(1)/V(0)] + \ln[\lambda^1/\lambda^0]}{\lambda^i V(1) - \lambda^0 V(0)} \right) \Big/ \left(\frac{\ln[V(1)/V(0)]}{V(1) - V(0)} \right) \right\} \geq \mathrm{IQ}M.$$

Но из неравенства $\mathrm{IQ}M^* \geq \mathrm{IQ}M$ не следует неравенство $\mathrm{IP}M^* \leq \mathrm{IP}M$, так как $\mathrm{IV}^* \neq \mathrm{IV}$. Однако из тождества

$$\ln\mathrm{IV}^* \equiv \ln\mathrm{IP}M^* + \ln\mathrm{IQ}M^* = \ln\mathrm{IP}M + \ln\mathrm{IQ}M + \ln(\lambda^1 / \lambda^0)$$

следует неравенство

$$\ln\mathrm{IP}M^* = \ln\mathrm{IP}M + \ln\mathrm{IQ}M + \ln(\lambda^1 / \lambda^0) - \ln\mathrm{IQ}M^* \leq \ln\mathrm{IP}M + \ln(\lambda^1 / \lambda^0) + (1 - \psi) \cdot \ln\mathrm{IQ}M,$$

в котором $(1 - \psi) < 0$ и lnIQM > 0. Поэтому при $\mathrm{IQ}M > 1$ независимо от значений индекса $\mathrm{IP}M$ система неравенств (12) и $\lambda^1 / \lambda^0 \leq 1$ определяет значения параметров $\lambda^1 \geq 1$, $\lambda^0 \geq 1$, при которых для индексов Монтгомери $\mathrm{IP}M$ и $\mathrm{IQ}M$ удовлетворяются неравенства

$$\mathrm{IP}M^* \leq \mathrm{IP}M, \quad \mathrm{IQ}M^* \geq \mathrm{IQ}M.$$

Этим же способом можно получить аналогичные утверждения для индексов из множеств D(B), M(B), D(C), M(C), предполагая, что выполняются условия $0 < \lambda_i \leq 1$. Очевидно, что анализ свойств индексов Дивизиа и Монтгомери можно выполнить, если в определениях траекторий $\{p(t)^*, q(t)^*\}$ рассматривать количества как изменяющиеся по законам $q_i(t)^* = \lambda_i(t) q_i(t)$ при ценах $p_i(t)^* = \mu p_i(t)$.

Таким образом, показано, что конструкции индексов, предложенные Дивизиа и Монтгомери, порождают индексные формулы, обладающие как общими, так и различными свойствами. Поэтому в рамках траекторного направления теории индексов требуется корректно сформулировать и решить проблему выбора не только траекторий цен и количеств, но и выбора самих конструкций таких индексов.

3. Идентичность индексов Дивизиа и Монтгомери с постоянными долями вкладов факторов

Автором данной статьи было доказано [1; 2], что в случае $V(1) \neq V(0)$, существует такой путь $\pi^{\bullet}(t;p^0,q^0;p^1,q^1)$, для которого постоянны доли $2n$ факторов цен p_i и количеств $q_i(i = 1,\ldots,n)$ в изменении стоимости $\Delta V(t) = V(t) - V(0)$. Доли не изменяются вдоль пути (при $0 < t \leq 1$) и определяются формулами

$$u_{p_i}(t) \equiv \Delta_{p_i} V(t) / \Delta V(t), \quad u_{q_i}(t) \equiv \Delta_{q_i}(t) / \Delta V(t). \tag{13}$$

При этом предполагалось, что стоимость $V(t)$ на искомом пути является монотонной функцией от некоторой переменной-параметра $s = s(t)$. Это позволяет выбрать параметризацию пути так, что $V(t)$ представляет собой линейную функцию от t:

$$V(t) = V(0) + t[V(1) - V(0)]. \tag{14}$$

Такой выбор параметризации траекторий приводит к тому, что в периоде между значениями параметра t и $(t + 1)$ суммарная стоимость рассматриваемых товаров $V(t)$ изменяется по сравнению со стоимостью $V(t - 1)$ при любом $t \in [0;1]$ на величину $[V(1) - V(0)]$. Поэтому периоды с $\tau \in [t; t + 1]$ уже не имеют равные продолжительности во времени. Последние зависят от динамики суммарной стоимости товаров, поскольку параметр t является монотонной функцией $f(s)$ времени s. Но, как отмечалось в разделе 2, свойства индексов, порождаемых траекторными конструкциями, инвариантны относительно выбора невырожденных параметризаций определяющих их путей.

Из постоянства долей факторов (13) и из (14) следует существование искомого пути $\pi^{\bullet}(t;p^0,q^0;p^1,q^1)$ и его траекторий, определяемых формулами

$$\begin{aligned} \ln p_i(t; p^0,q^0;p^1,q^1) &= \ln p^0{}_i + \alpha_i(p)\ln[v_i(t) / v_i(0)], \\ \ln q_i(t; p^0,q^0;p^1,q^1) &= \ln q^0{}_i + \alpha_i(q)\ln[v_i(t) / v_i(0)], \end{aligned} \tag{15}$$

в которых $v_i(t) = p^0{}_i q^0{}_i + t(p^1{}_i q^1{}_i - p^0{}_i q^0{}_i) \equiv v^t{}_i$, $\alpha_i(p) + \alpha_i(q) = 1$ и $\alpha_i(p) = \ln(p^1{}_i / p^0{}_i) / \ln(v^1{}_i / v^0{}_i)$, $\alpha_i(q) = \ln(q^1{}_i / q^0{}_i) / \ln(v^1{}_i / v^0{}_i)$.

Постоянные доли факторов также находятся:

$$u_{p_i} = \frac{v_i^1 - v_i^0}{V(1) - V(0)}\alpha_i(p), \qquad u_{q_i} = \frac{v_i^1 - v_i^0}{V(1) - V(0)}\alpha_i(q). \tag{16}$$

Для семейства путей $S_{\pi^{\bullet}}$, заданных формулами (15), индексы IPM, IQM Монтгомери находятся с использованием их определений [1; 2] и оказываются равны индексам Монтгомери − Вартиа(I):

$$\mathrm{IP}M_{\pi^{\bullet}} = \mathrm{IPM} = [V(1) / V(0)]^{m(p)}, \quad \mathrm{IQ}M_{\pi^{\bullet}} = \mathrm{IQM} = [V(1) / V(0)]^{m(q)}, \tag{17}$$

для которых $m(p) + m(q) = 1$ и

$$m(p) = \sum_i \frac{v_i^1 - v_i^0}{V(1) - V(0)} \cdot \frac{\ln(p_i^1 / p_i^0)}{\ln(v_i^1 / v_i^o)}, \quad m(q) = \sum_i \frac{v_i^1 - v_i^0}{V(1) - V(0)} \cdot \frac{\ln(q_i^1 / q_i^0)}{\ln(v_i^1 / v_i^0)}. \tag{18}$$

В случае равенства стоимостей $V(1)$ и $V(0)$ или v^1_i и v^0_i при каких либо i отношение $\ln[V(1) / V(0)] / [V(1) – V(0)]$ или аналогичные отношения для товаров заменяются в (17) и (18) на средние логарифмические, т.е. на $V(0) = V(1)$ и $v^0_i = v^1_i$.

Приведем простое доказательство того, что и индексы Дивизиа IPD, IQD для путей $\pi\bullet(t;p^0,q^0;p^1,q^1)$ также оказываются равными индексам (17). Из постоянства долей факторов цен имеем

$$(19)\qquad \frac{d\Delta_{p_i}V(t)}{dt}=\frac{dp_i(t)}{dt}q_i(t)=u_{p_i}[V(1)-V(0)],\ \ i=1,\ldots n.$$

Тогда, используя (19), получаем

$$\Delta_{p_i}\ln V(1)=\sum_i\int_0^1\frac{dp_i(\tau)}{d\tau}\frac{q_i(\tau)}{V(\tau)}d\tau=\sum_i u_{p_i}[V(1)-V(0)]\int_0^1\frac{d\tau}{V(0)+\tau[V(1)-V(0)]}$$

и, следовательно,

$$(20)\qquad \ln\mathrm{IP}D_{\pi\bullet}=\sum_i u_{p_i}\ln\frac{V(1)}{V(0)}=\ \mathrm{IPM}.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$(21)\qquad \ln\mathrm{IQ}D_{\pi\bullet}=\sum_i u_{q_i}\ln\frac{V(1)}{V(0)}=\ \mathrm{IQM}.$$

Рассмотрим доли факторов цен p_i и количеств $q_i(i = 1,\ldots,n)$ для индексов Дивизиа как функции от t вдоль пути $\pi(t;p^0,q^0;p^1,q^1)$. Доли факторов в этом случае естественно определять по отношению к разности $[\ln V(t) – \ln V(0)]$ с помощью следующих формул, аналогичных формулам (13):

$$(22)\qquad w_{p_i}(t)=\Delta_{p_i}\ln V(t)/[\ln V(t)-\ln V(0)],\ w_{q_i}(t)=\Delta_{q_i}\ln V(t)/[\ln V(t)-\ln V(0)].$$

Тогда для траекторий (15), т.е. для путей $\pi\bullet(t;\,p^0,q^0;\,p^1,q^1)$, из (20) и (21) следует, что доли факторов (22) постоянны (не зависят от t) и равны долям факторов (16) для индексов Монтгомери − Вартиа(I).

Таким образом, доказано равенство индексов Дивизиа и Монтгомери, порождаемых путями с постоянными долями вкладов факторов и совпадающих с индексами Монтгомери − Вартиа(I).

4. Единственность факторно-идентичных индексов Дивизиа и Монтгомери

Проанализируем существование других семейств путей кроме (15), для которых *полностью* совпадали бы индексы, порождаемые конструкциями Дивизиа и Монтгомери. Для этого необходимо определить то, как предлагается понимать полное совпадение траекторных индексов.

Во-первых, такие индексы определены в каждой точке пути, соединяющего граничные состояния, конечно, кроме точки начального состояния. Поэтому индексы цен и количеств, порождаемые двумя конструкциями для пути π из искомого семейства, естественно считать совпадающими не только при фиксированных начальной и конечной точках, но и для всех пар состояний $(p^0{}_i,q^0{}_i)$ и $(p(t)_i,q(t)_i)$ при $0 < t \le 1$, т.е. при $(p(t)_i,q(t)_i) \in \pi(t;p^0,q^0;p^1,q^1)$.

Во-вторых, индексы Монтгомери и Дивизиа по своему построению представляются в виде суммы вкладов $2n$ факторов в конечное приращение стоимости $[V(t) - V(0)]$ или в $[\ln V(t) - \ln V(0)]$ вдоль пути, соединяющего граничные состояния. Для путей (15) равными являются не только индексы Дивизиа и Монтгомери как функции от t на этих траекториях, но и соответствующие этим конструкциям индексов вклады каждого из $2n$ факторов. Поэтому распространим эти свойства логарифмических индексов, порождаемых путями (15) с постоянными долями факторов, на искомое семейство путей S_π, считая, что для его дважды непрерывно-дифференцируемых траекторий цен и количеств выбрана параметризация (14).

Факторно-идентичными индексами Дивизиа – Монтгомери назовем индексы Дивизиа $\mathrm{IP}D_\pi$, $\mathrm{IQ}D_\pi$ и индексы Монтгомери $\mathrm{IP}M_\pi$, IQM_π, порождаемые общим для них семейством путей S_π, если для этих индексов при $0 < t \le 1$ выполняются равенства

$$\Delta_{p_i} V(t) = \Delta_{p_i} \ln V(t), \quad \Delta_{q_i} V(t) = \Delta_{q_i} \ln V(t), \quad i = 1,\dots,n, \tag{23}$$

т.е. требования идентичности вкладов факторов вдоль пути $\pi \in S_\pi$. Из (23) следует, что $\mathrm{IP}D_\pi(t) = \mathrm{IP}M_\pi(t)$, $\mathrm{IQ}D_\pi(t) = \mathrm{IQ}M_\pi(t)$ и на семействе путей S_π идентичны сами индексы Дивизиа и Монтгомери.

Докажем, что при сделанных предположениях системе уравнений (23) удовлетворяет только семейство путей (15). Для этого, предполагая, что при $0 < t \le 1$ $V(t) \ne V(0)$ и используя (14), представим (23) в виде системы интегро-дифференциальных уравнений ($i = 1,\dots,n$):

$$t(V(t) - V(0))\int_0^t \frac{dp_i(\tau)}{d\tau}\frac{q_i(\tau)}{V(\tau)}d\tau = \ln\frac{V(t)}{V(0)}\int_0^t \frac{dp_i(\tau)}{d\tau}q_i(\tau)d\tau, \tag{24}$$

$$t(V(t) - V(0))\int_0^t \frac{dq_i(\tau)}{d\tau}\frac{p_i(\tau)}{V(\tau)}d\tau = \ln\frac{V(t)}{V(0)}\int_0^t \frac{dq_i(\tau)}{d\tau}p_i(\tau)d\tau. \tag{25}$$

Продифференцируем уравнения (24) и (25) по параметру t. Тогда из уравнения (24) при фиксированном i получим

$$\begin{gathered}(V(t) - V(0))\int_0^t \frac{dp_i(\tau)}{d\tau}\frac{q_i(\tau)}{V(\tau)}d\tau + t(V(t) - V(0))\frac{dp_i(t)}{dt}\frac{q_i(t)}{V(t)} = \\ = \frac{V(1) - V(0)}{V(t)}\int_0^t \frac{dp_i(\tau)}{d\tau}q_i(\tau)d\tau + \left[\ln\frac{V(t)}{V(0)}\right]\frac{dp_i(t)}{dt}q_i(t).\end{gathered} \tag{26}$$

Уравнение (26) с помощью (24) представим в виде

$$\left[\frac{1}{t}\ln\frac{V(t)}{V(0)} - \frac{V(1)-V(0)}{V(0)}\right]\cdot\left[\int_0^t \frac{dp_i(\tau)}{d\tau}q_i(\tau)d\tau - t\frac{dp_i(t)}{dt}q_i(t)\right]. \tag{27}$$

В (27) сомножители представляют собой непрерывные и даже дифференцируемые функции параметра-переменной $t \in (0;1]$. Но первый сомножитель

$$\left[\frac{1}{t}\ln\frac{V(t)}{V(0)} - \frac{V(1)-V(0)}{V(0)}\right] = \frac{1}{t}\left[\ln(1+t\left(\frac{V(1)}{V(0)}-1\right) - t\left(\frac{V(1)}{V(0)}-1\right)\right]$$

не равен нулю при $t \neq 0$, что следует из очевидного неравенства $1 + x < e^X$, в котором $x = t(V(1) / V(0) - 1) \neq 0$. Следовательно, выполняются уравнения

$$\int_0^t \frac{dp_i(\tau)}{d\tau}q_i(\tau)d\tau - t\frac{dp_i(t)}{dt}q_i(t) = 0, \quad 0 < t \leq 1, \; i = 1,\ldots,n. \tag{28}$$

Из (25), поступая аналогичным образом, получаем уравнения

$$\int_0^t \frac{dq_i(\tau)}{d\tau}p_i(\tau)d\tau - t\frac{dq_i(t)}{dt}p_i(t) = 0, \quad 0 < t \leq 1, \; i = 1,\ldots,n. \tag{29}$$

Продифференцировав уравнения (28) и (29) по t и учитывая, что $t \in (0;1]$, получим уравнения

$$\frac{d^2p_i(t)}{dt^2}q_i(t) + \frac{dp_i(t)}{dt}\frac{dq_i(t)}{dt} = 0, \quad \frac{d^2q_i(t)}{dt^2}p_i(t) + \frac{dp_i(t)}{dt}\frac{dq_i(t)}{dt} = 0, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{30}$$

которые по непрерывности распространим на значение $t = 0$.

В [3] было показано, что пути (15) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений второго порядка (30). Наша задача заключается в том, чтобы найти все решения этой системы, для которой выполняются граничные условия

$$p_i(0) = p^0{}_i, \; q_i(0) = q^0{}_i, \; p_i(1) = p^1{}_i, \; q(1) = q^1{}_i, \; i = 1,\ldots,n \tag{31}$$

с задаваемыми положительными значениями цен и количеств. Такие решения найдем, рассматривая уравнения (30) для пар переменных $p_i(t)$, $q_i(t)$. Суммируя эти уравнения при выбранном i, получаем

$$\frac{d^2p_i(t)}{dt^2}q_i(t) + 2\frac{dp_i(t)}{dt}\frac{dq_i(t)}{dt} + \frac{d^2q_i(t)}{dt^2}p_i(t) = \frac{d^2[p_i(t)q_i(t)]}{dt^2} = 0$$

и стоимости $v_i(t)$ являются линейными функциями от t. Используя граничные условия (31), находим эти функции:

$$p_i(t)q_i(t) = p^0{}_i q^0{}_i + t(p^1{}_i q^1{}_i - p^0{}_i q^0{}_i), \; i = 1,\ldots n. \tag{32}$$

Уравнения (30) представим в виде

$$\frac{d}{dt}\ln\left[\frac{dp_i(t)}{dt}q_i(t)\right]=0,\quad \frac{d}{dt}\ln\left[\frac{dq_i(t)}{dt}p_i(t)\right]=0,$$

что позволяет получить соотношения

$$\frac{dp_i(t)}{dt}q_i(t)=a_i,\quad \frac{dq_i(t)}{dt}p_i(t)=b_i,\quad i=1,\ldots,n, \tag{33}$$

в которых a_i, b_i − константы, подлежащие определению и в силу (32) удовлетворяющие условию $a_i + b_i = p^1{}_i q^1{}_i - p^0{}_i q^0{}_i$.

Уравнения (33) с помощью (32) преобразуются в дифференциальные уравнения, содержащие только по одной переменной:

$$\frac{d\ln p_i(t)}{dt}=\frac{a_i}{p_i^0q_i^0+t(p_i^1q_i^1-p_i^0q_i^0)},\quad \frac{d\ln q_i(t)}{dt}=\frac{b_i}{p_i^0q_i^0+t(p_i^1q_i^1-p_i^0q_i^0)},$$

решения которых легко находятся:

$$p_i(t)=c_i[p_i^0q_i^0+t(p_i^1q_i^1-p_i^0q_i^0)]^{h(i)},\quad q_i(t)=d_i[p_i^0q_i^0+t(p_i^1q_i^1-p_i^0q_i^0)]^{k(i)}, \tag{34}$$

где c_i, d_i, $h(i) = a_i / (a_i + b_i)$, $k(i) = b_i / (a_i + b_i)$ − константы. Они находятся из граничных условий (31) единственным образом.

Получаемые траектории переменных $p_i(t)$, $q_i(t)$, $i = 1,\ldots,n$,

$$p_i(t)=p_i^0[p_i^0q_i^0+t(p_i^1q_i^1-p_i^0q_i^0)/p_i^0q_i^0]^{\ln(p_i^1/p_i^0)/\ln(p_i^1q_i^1/p_i^0q_i^0)},$$

$$q_i(t)=q_i^0[p_i^0q_i^0+t(p_i^1q_i^1-p_i^0q_i^0)/p_i^0q_i^0]^{\ln(q_i^1/q_i^0)/\ln(p_i^1q_i^1/p_i^0q_i^0)}$$

совпадают с траекториями (15). Последние порождают индексы Монтгомери − Вартиа(I), логарифмические индексы или траекторные индексы с постоянными вдоль путей и равными (для индексов Дивизиа и Монтгомери) долями вкладов факторов цен и количеств.

Таким образом, постоянство долей вкладов факторов в точках путей, порождающих индексы Дивизиа или Монтгомери, оказывается эквивалентным факторной идентичности этих индексов. И индексы Дивизиа − Монтгомери, определяемые траекториями (15), имеют два эквивалентных аксиоматических определения.

5. Сцепленные индексы Дивизиа − Монтгомери для последовательностей состояний

В теории индексов постоянно обсуждаются целесообразность и обоснованность применения индексных формул для сравнения состояний системы цен и количеств в двух достаточно далеко отстоящих друг от друга периодах. Такие граничные периоды будем различать по их начальным моментам времени: $t = 0$ − для начального периода с параметром времени $\tau \in [0;1]$, $t = T$ − для конечного периода с $\tau \in [T;T + 1]$.

Традиционно признается необходимым рассматривать дискретную последовательность промежуточных состояний с начальными моментами времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_{T-1}$ $(0 < t_1, t_{T-1} < T)$ и рассчитывать по данным для этих состояний цепные и сцепленные индексы цен и количеств. Для упрощения используемых обозначений примем, что $t_k = k$, $k = 1,\ldots,T-1$.

Для соседних состояний рассчитываются цепные индексы IP(k – 1;k), IQ(k – 1;k), а затем соответствующие им сцепленные индексы

$$IP\,[0;k] = \prod_{s=1}^{T} IP(s-1;s), \quad IQ[0;k] = \prod_{s=1}^{T} IQ(s-1;s), \quad k = 1,\ldots,T.$$

При расчетах цепных индексов фактически используется предположение об однородности процесса перехода от k-го состояния в $(k+1)$-е. Однородность предлагается понимать как отсутствие необходимости иметь и использовать данные о ценах и количествах для периодов с такими начальными моментами времени t, что $(k-1) < t < k$. Это предположение в траекторной версии теории индексов формализуется в виде постулата постоянства долей вкладов факторов цен и количеств рассматриваемых товаров в приросте стоимости – для индексов Монтгомери и в индексе стоимости – для индексов Дивизиа. Неизменность этих долей вдоль пути, характеризующего переход из k-го состояния в $(k+1)$-е, интерпретируется как признание информационной равноценности точек искомого пути. Такой путь существует, определяется формулами (15) и порождает индексы Монтгомери – Вартиа(I) или индексы Дивизиа – Монтгомери.

Факторная идентичность индексов Дивизиа – Монтгомери IPDM, IQDM при общем семействе определяющих их путей S_π. имеет следствием то, что эти индексы обладают всеми свойствами, присущими индексам, порождаемым двумя различными конструкциями траекторных индексов. Из сведений, приведенных в разделе 1 статьи, следует, что индексы IPDM, IQDM удовлетворяют аксиомам стоимости (IV = IP · IQ), обратимости состояний и факторов, монотонности, согласованности при агрегировании и идентичности, не изменяются при невырожденных преобразованиях параметра t, функциями от которого являются цены $p_i(t)$ и количества $q_i(t)$.

Из постоянства долей вкладов $2n$ факторов p_i, q_i выводится инвариантность доли суммарного вклада любого подмножества таких факторов при невырожденном преобразовании соответствующих переменных [1; 2]. Очевидны также те свойства этих индексов, проявляющиеся при их сравнении с индексами из множеств D(B), D(C) и M(B), M(C), которые были рассмотрены в разделе 2 статьи.

Но анализ выполнения Аксиомы транзитивности (циркулярности) для индексов Дивизиа – Монтгомери должен базироваться на строгом определении этого свойства для траекторных индексов. Ограничимся рассмотрением такого определения для трех состояний, характеризуемых известными значениями n цен и количеств: (p^0,q^0), (p^1,q^1) (p^2,q^2).

Индексы Дивизиа и индексы Монтгомери превращаются в индексные формулы, если при любых положительных значениях переменных (p^*,q^*) и (p^{**},q^{**}) определен соединяющий эти два состояния положительный и дифференцируемый путь $\pi(t;p^*,q^*;\, p^{**},q^{**})$. Такие пути образуют семейство путей S_π. Для путей из такого семейства будем использовать следующие упрощающие обозначения:

$$\pi(t;\, p^0,q^0;\, p^1,q^1) = \pi^{0;1}, \;\; \pi(t;\, p^0,q^0;\, p^2,q^2) = \pi^{0;2}, \;\; \pi(t;\, p^1,q^1;\, p^2,q^2) = \pi^{1;2}.$$

Траекторные индексы IP, IQ, порождаемые семейством путей S_π, удовлетворяют аксиоме транзитивности, если для любых допустимых состояний (p^0,q^0), (p^1,q^1) (p^2,q^2) выполняются соотношения

$$\mathrm{IP}(\pi^{0;1}) \cdot \mathrm{IP}(\pi^{1;2}) = \mathrm{IP}(\pi^{0;2}), \ \ \mathrm{IQ}(\pi^{0;1}) \cdot \mathrm{IQ}(\pi^{1;2}) = \mathrm{IQ}(\pi^{0;2}). \tag{35}$$

В общем случае, т.е. для семейства путей S_π, не удовлетворяющего специальным ограничениям, равенства (35) не выполняются. Это доказывается построением достаточно простых примеров таких семейств. Но можно ограничиться рассмотрением только транзитивных семейств путей, для которых путь $\pi^{0;2}$ является объединением путей $\pi(t;\, p^0,q^0;\, p^*,q^*)$ и $\pi(t;\, p^*,q^*;\, p^2,q^2)$, если точка-состояние (p^*,q^*) принадлежит пути $\pi^{0;2}$. Тогда условия транзитивности (35) будут выполняться для индексов Дивизиа, порождаемых семейством транзитивных путей, при условии, что состояние (p^1,q^1) не произвольно, а принадлежит пути $\pi(t;\, p^0,q^0;\, p^2,q^2) = \pi^{0;2}$. Такую транзитивность траекторных индексов можно называть условной транзитивностью относительно семейства транзитивных путей S_π. В то же время необходимо иметь в виду, что индексы Монтгомери не являются условно транзитивными относительно транзитивной системы путей. Балк в [15] фактически использовал именно определение условной транзитивности индексов, не формулируя такое определение явно.

Очевидно, что семейство путей (15) транзитивно. Поэтому индексы Дивизиа – Монтгомери, являясь частным случаем индексов Дивизиа, условно транзитивны относительно этого семейства. Однако сцепленные индексы IP[0;T], IQ[0;T], получаемые из индексов Дивизиа – Монтгомери IPDM(k; k + 1) и IQDM(k; k + 1) и обозначаемые IPDM[0;T] и IQDM[0;T], не являются индексами Дивизиа, поскольку в общем случае последовательность состояний (p^k,q^{k+1}), $k = 0,1,\ldots,T$ не принадлежит пути $\pi(t;\, p^0,q^0;\, p^T,q^T)$. Именно для таких последовательностей и конструируются сцепленные индексы. Формулы для таких индексов

$$\ln IPDM[0;T] = \sum_{k=1}^{T} \ln IPDM(k-1;k), \ \ \ln IQDM[0;T] = \sum_{k=1}^{T} \ln IQDM(k-1;k)$$

базируются на тождестве

$$\ln\frac{V(T)}{V(0)} = \sum_{k=1}^{T} \ln\frac{V(k)}{V(k-1)} = \sum_{k=1}^{T} \ln IPD^{\pi^\bullet}(k-1;k) + \sum_{k=1}^{t} \ln IQD^{\pi^\bullet}(k-1;k) =$$
$$= IPD^{\pi^\bullet}[0;T] + IQD^{\pi^\bullet}[0;T],$$

в котором используются пути $\pi^\bullet(t; p^{k-1}, q^{k-1}; p^k, q^k)$, генерирующие индексы Дивизиа – Монтгомери. В нем реализуется конструкция индексов Дивизиа, применяемая к последовательности состояний $\{R_0{}^T\} \equiv (p^0,q^0),(p^1,q^1),\ldots,(p^T,q^T)\}$, соединяемых путями $\pi^\bullet(t; p^{k-1}, q^{k-1}; p^k, q^k)$. Поэтому индексы IPDM[0;T] и IQDM[0;T] можно называть также сцепленными индексами Дивизиа и обозначать $\mathrm{IPD}^{\pi^\bullet}[0;T]$, $\mathrm{IQD}^{\pi^\bullet}[0;T]$. Но для той же последовательности состояний и путей конструкция индексов Монтгомери базируется на другом тождестве

$$V(T)-V(0)=\sum_{k=1}^{T}(V(k)-V(k-1))=\sum_{k=1}^{t}(\Delta_p^{\pi^\bullet}V(k)+\sum_{k=1}^{T}\Delta_q^{\pi^\bullet}V(k)=\Delta_p^{\pi^\bullet}(V(T))+\Delta_q^{\pi^\bullet}(V(T)).$$

Следовательно, индексы Монтгомери $\mathrm{IPM}^{\pi^\bullet}[0;T]$, $\mathrm{IQM}^{\pi^\bullet}[0;T]$ для последовательности состояний $\{R_0{}^T\}$ вводятся по аналогии с формулами (4):

$$\ln IPM^{\pi^\bullet}[0;T]=\Delta_p^{\pi^\bullet}(V(T))\frac{\ln V(T)-\ln V(0)}{V(T)-V(0)}=\sum_{k=1}^{T}IPM^{\pi^\bullet}(k-1;k)\frac{V(k)-V(k-1)}{LnV(k)-\ln V(k-1)}\cdot\frac{\ln V(t)-\ln V(0)}{V(T)-V(0)},$$

$$\ln IQM^{\pi^\bullet}[0;T]=\Delta_q^{\pi^\bullet}(V(T))\frac{\ln V(T)-\ln V(0)}{V(T)-V(0)}=\sum_{k=1}^{T}IQM^{\pi^\bullet}(k-1;k)\frac{V(k)-V(k-1)}{LnV(k)-\ln V(k-1)}\cdot\frac{\ln V(t)-\ln V(0)}{V(T)-V(0)},$$

в которых индексы Дивизиа – Монтгомери IPDM(k – 1; k) и IQDM(k – 1; k) суммируются с весами $b(k)=L(V(k-1),V(k))/L(V(0),V(T))$.

Следовательно, конструкции индексов Дивизиа и Монтгомери, идентичные при использовании путей (15) для соседних состояний, в случае их распространения на последовательность состояний $\{(p^0,q^0),(p^1,q^1),\ldots,(p^T,q^T)\}$ определяют различные пары сцепленных и взвешенных сцепленных индексов цен и количеств, а именно индексы

$$\mathrm{IPDM}[0;T]=\mathrm{IPD}^{\pi^\bullet}[0;T]\neq\mathrm{IPM}^{\pi^\bullet}[0;T],\ \ \mathrm{IQDM}[0;T]=\mathrm{IQD}^{\pi^\bullet}[0;T]\neq\mathrm{IQM}^{\pi^\bullet}[0;T].$$

Но взвешенно-сцепленные индексы Монтгомери $\mathrm{IPM}^{\pi^\bullet}[0;T]$, $\mathrm{IQM}^{\pi^\bullet}[0;T]$ для последовательностей $\{R_0{}^T\}$ не удовлетворяют Аксиоме условной транзитивности, формулируемой по отношению к последовательностям $\{R_0{}^{T(1)}\}$, $\{R_{T(1)}{}^{T(2)}\}$ и $\{R_0{}^{T(2)}\}$. Эта Аксиома требует, чтобы последовательности состояний $\{R_0{}^{T(1)}\}$ и $\{R_{T(1)}{}^{T(2)}\}$ включались в последовательность $\{R_0{}^{T(2)}\}$. В то же время сцепленные индексы Дивизиа – Монтгомери IPDM[0;T], IQDM[0;T] или сцепленные индексы Дивизиа $\mathrm{IPD}^{\pi^\bullet}[0;T]$, $\mathrm{IQD}^{\pi^\bullet}[0;T]$ удовлетворяют Аксиоме условной транзитивности. Поэтому применение в рассматриваемых ситуациях индексов IPDM[0;T] и IQDM[0;T] следует считать более обоснованным.

6. Заключение

Предложено согласованное аксиоматическое и интерпретируемое в рамках принимаемых в прикладной статистике предположений решение проблемы выбора путей и проблемы выбора конструкции индексов среди траекторных конструкций индексов Дивизиа и Монтгомери. При расчетах индексов непосредственно для пар состояний цен и количеств, а также и для соединяющих их последовательностей состояний, у индексов, рекомендуемых для теоретического и практического применения, сохраняются свойства, признаваемые теорией индексов необходимыми и присущими индексам, порождаемым двумя этими конкурирующими конструкциями.

Для рассматриваемых периодов-состояний теория и статистическая практика полагают известными количества и средние для периода цены товаров и услуг. Это принимаемое в классической теории индексов цен и количеств без обсуждения допущение оправданно, если со временем в каждом из периодов цены не изменяются. В ситуациях, когда цены не постоянны, средняя для периода цена товара зависит от динамики его количества, которая, как правило, не наблюдаема статистически. Поэтому в практических расчетах индексов традиционно используются эвристические, не имеющие обоснования и не связанные с динамикой количества оценки средней для периода цены товара. В дальнейшем предполагается дать практически реализуемое и согласующееся с индексами Дивизиа – Монтгомери решение проблемы определения по доступным статистическим данным средних цен для предполагаемых однородными периодов с непостоянными ценами товаров.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ершов Э.Б.* Вступительная статья к монографии [4].

2. *Ершов Э.Б.* Индексы цен и количеств Фишера и Монтгомери как индексы Дивизиа // Экономика и математические методы. 2003. № 2.

3. *Ершов Э.Б.* Линейные связности в пространствах цен и количеств, индуцируемые индексами Фишера и Монтгомери // Экономика и математические методы. 2005. № 4.

4. *Кевеш П.* Теория индексов и практика экономического анализа. М.: Финансы и статистика, 1990.

5. *Ковалевский Г.В.* Индексный метод в экономике. М.: Финансы и статистика, 1989.

6. *Федоров В., Егоров Ю.* К вопросу о разложении прироста на факторы // Вестник статистики. 1977. № 5.

7. *Хумал А.* Разделение прироста произведения // Известия АН ЭССР. Сер. физ. мат. и техн. наук. 1962. № 1.

8. *Шеремет А.Д., Дей Г.Г., Липовецкий С.С.* Логарифмический метод экономического анализа многофакторных показателей хозяйственной деятельности // Вестник МГУ. Сер. 6, экономика. 1984. № 1.

9. Экономическое обоснование структуры сельскохозяйственного производства. М.: Экономика, 1965.

10. *Allen R.G.D.* Index Numbers in Theory and Practice. London and Basingstoke: Macmillan Press Ltd., 1975. Русский перевод: Ален Р. Экономические индексы. М.: Статистика, 1980.

11. *Blackorby C., Primont D.* Index Numbers and Consistency in Aggreganion // Journal of Economic Theory. 1980. 22. P. 87–98.

12. *Balk B.M.* Changing Consumer Preferences and the Cost of Living Index: Theory and Nonparametric Expressions // Zeitschrift für Nationalökonomie. 1989. № 2.

13. *Balk B.M.* Axiomatic Price Index Theory: A Survey // International Statistical Review. 1995. 63. № 1.

14. *Balk B.M.* Consistency-in-aggregation and Stuvel Indices // Review of Income & Wealth. Series 42. 1996. № 3.

15. *Balk B.M.* (2005). Divisia Price and Quantity Indices: 80 Years After // Statistica Neerlandica. № 2.

16. *Balk B.M.* Price and Quantity Index Numbers: Models for Measuring Aggregate Change and Difference. Cambrige University Press, 2008.

17. *Cyhelský L., Matějka M.K.* Rozklad absolutnich rozdilů a indexů // Statistika. 1976. № 8.

18. *Diewert W.E.* Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation // Econometrica. 1978. № 4.

19. *Diewert W.E.* Basic Index Number Theory. Ch. 15 // Consumer Price Index Manual: Theory and Practice. Geneva: International Labour Office, 2004.

20. *Divisia F.* L'monétaire et la théorie de la monnaie // Revue D'Economie Politique. 1925–1926. Vol. 39. № 4–6; Vol. 40. № 1.

21. *Gorman W.M.* Notes on Divisia Indices // C. Blackorby, A.F. Shorrocks (eds.). Separability and Aggregation. Collected work of W.M. Gorman. Vol. 1. Oxford: Clarendon Press, 1970.

22. *Hulten C.R.* Divisia Index Numbers // Economertrica. 1973. № 6.

23. *Malaney P.N.* The Index Number Problem: A Differential Geometric Approach. Ph.D, Thesis, Harvard University, Cambridge, MA, 1996.

24. *Montgomery J.K.* Is There a Theoretically Correct Price Index of a Group of Commodities? Private edition. Rome: International Institute of Agricalture, 1929.

25. *Montgomery J.K.* The Mathematical Problem of the Price Index. L.: P.S. King et Sons, Ltd., 1937.

26. *Richter M.K.* Invariant Axioms and Economic Indexes // Econometrica. 1966. № 4. P. 739–755.

27. *Samuelson P.A., Swamy S.* Invariant Economic Index Numbers and Canonical Duality: Survey and Synthesis //American Economic Review. 1974. № 4.

28. *Törnqvist L.* The Bank of Finland's Consumer Price Index // Bank of Finland Monthly Bulletin. 1936. Vol. 10. P. 1–8.

29. *Triplett J.E.* Price Index Research and its Influence on Data: A Historical Review. Bureau of Economic Analysis of the U.S. Department of Commerce, 1988.

30. *Vartia Y.O.* Ideal Log-change Index Numbers. University of Helsinki, Department of Economics. Discussion Papers № 18. 1975-06-01. 1975.

31. *Ville J.* The Existence-conditions of a Total Utility Function // The Review of Economic Studies. 1951–1952. Vol. 19. P. 123–128.

32. *Vogt A.* Divisia Indices on Different Paths // W. Eichhorn, R. Henn, O. Opitz, R.W. Shephard (eds): Theory and Applications of Economic Indices.Würzburg: Physica-Verlag, 1978.

33. Consumer Price Index Manual: Theory and Practice. Geneva. International Labour Office, 2004.