

Макрофинансы II: модель пузырей и кризисов

Смирнов А.Д.

*Модель явления должна быть как
можно более проста, но не проще.*

Альберт Эйнштейн

Работа состоит из двух частей. Первая часть опубликована в предыдущем номере журнала. Показано, как методология сложных систем применяется к исследованию макро- и микроскопических аспектов одной из особенностей развития финансовых систем – генезису, развитию и лопанию финансового пузыря. Важнейшие характеристики рынка – иррациональность и доверие – встроены в структуру финансовых связей и имеют адекватную меру, в частности, как отношение стоимости актива к стоимости денег, что вполне аналогично «финансовому рычагу». Процедура формирования структурированного финансового инструмента порождает увеличение стоимости финансовых активов, не обеспеченных ростом реального богатства, рассогласованность которых лежит в основе зарождения финансовых кризисов. Критика методологии редукционизма в финансах дополнена анализом «рациональных» пузырей, имеющим несомненное сходство с анализом сложных систем. Кратко излагаются элементы теории перколяции, используемые во второй части работы для изучения автокаталитических свойств финансового рынка.

В настоящей, второй, части работы исследуется макромоделю взаимодействия денег и долгов. Динамика стоимости совокупного актива (долга) представлена уравнением Бернулли, зависящим от трех параметров. Эволюция системы реализуется для различных гипотез монетизируемой компоненты совокупного долга. Иррациональное поведение инвесторов, которому соответствует отрицательное значение параметра ρ в макромоделе рынка, приводит к образованию финансового пузыря. Система становится автокаталитической, теряет устойчивость, а в критической точке пузырь лопается. Эти качественные изменения объясняются в рамках «классической» перколяции через взаимодействия участников рынка на микроуровне системы. Определения Дж.М. Кейнса финансовой «спекуляции» и «предприимчивости» позволяют получить уравнения этих процессов как вполне аналогичные макромоделю финансового рынка. Веро-

Смирнов А.Д. – заслуженный деятель науки РФ, доктор экономических наук, профессор, действительный член Российской академии естественных наук, Государственный университет – Высшая школа экономики. E-mail: adsmir@hse.ru

Статья поступила в Редакцию в июне 2010 г.

ятностная интерпретация предлагаемой модели использует инвариантные константы перколяции в сочетании с эмпирическими данными о глобальной ликвидности и долге. Различные вероятностные характеристики кредитного кризиса 2007–2010 гг., полученные с помощью модели, помогают объяснить провалы и потери на глобальных финансовых рынках.

Ключевые слова: финансовый пузырь; кризис; перколяция; сингулярность; сложная система.

Данная статья является логическим продолжением работы «Макрофинансы I: методология моделирования пузырей и кризисов», опубликованной в предыдущем номере журнала. Методологические соображения, высказанные в первой статье, применяются к созданию макро- и микромодели финансового пузыря, которая имеет детерминированную и вероятностную интерпретацию. Степенное распределение уровней долга, параметры которого рассчитываются эмпирически с использованием инвариантных констант перколяции, применяется для расчета ряда характеристик кредитного кризиса 2007–2010 гг. Макрофинансовый процесс моделируется нелинейным уравнением, зависящим от параметров, значения которых определяются взаимодействием денег и долгов.

1. Макромодель финансового пузыря

Взаимодействие денег и долгов, лежащее в основе современного финансового рынка, происходит на протяжении более пяти тысяч лет. Исходной и конечной точками долгового контракта являются деньги: их получает заемщик на момент заключения контракта, и они возвращаются кредитору на момент исполнения контракта вместе с оплатой использования заемных средств. Взаимодействие денег и долгов, или монетизация долга, – это базовый процесс, формирующий любую, самую развитую и сложную финансовую систему. Нарушения процесса монетизации долга порождают как локальные аномалии на отдельных рынках, так и приводят к возникновению и раздуванию глобальных финансовых пузырей, которые рано или поздно лопаются.

Деньги являются характеристикой, определяющей и обобщающей свойства и особенности развития современной рыночной экономики. Хотя, как отмечал еще Дж. Стюарт Милль, «деньги – всего лишь вуаль», но любая современная рыночная экономика – это монетарная экономика, ибо бартер обусловлен непоправимым расточительством природных ресурсов, капитала, интеллекта и труда. Деньги – историческая мера всех вещей, способ соизмерения гигантского разнообразия товарного мира, элементы которого несопоставимы по своим физическим свойствам. Очевидно, что баланс общего и финансового богатства может быть составлен, если существует мера всех, физически разнородных, вещей. Исторически этой мерой служили и служат деньги – особый товар, единственная полезность которого состоит в соизмерении всех других товаров и услуг, включая и финансовые инструменты. В частности, понятие ликвидности отражает свойство любых товаров трансформироваться в деньги, соответственно, ликвидность денег равна единице, поскольку деньги тождественны себе (имеется в виду одна национальная денежная единица). Вместе с тем хорошо известно, что такая естественная мера имеет столь же естественный недос-

таток: она сама – элемент мира товаров и активов, а потому уподобляется резиновой линейке. Крайне трудно, если возможно вообще, предложить для нее априорный стандарт¹.

Макроэкономическая природа денег достаточно хорошо изучена, тогда как органическая связь долга и денег не всегда ясна. Между тем современная денежная система основана на взаимосвязи (обмене) денег на долги, и наоборот. Идея зависимости стоимости долга как функции эмиссии денег рассматривалась в работах [5, 6], но различение макро- и микроаспектов функционирования долговых инструментов и денег не проводилось достаточно отчетливо.

1.1. Простая модель взаимодействия денег и долгов

Динамика нормального финансового рынка, развитие и лопание финансовых пузырей могут быть объяснены на модели финансового рынка Дж.М. Кейнса. В этой простой модели, которая может быть получена на основе баланса богатства, совокупная стоимость финансовых активов на каждый момент времени t предстает как финансовое богатство $A(t)$, состоящее из денег $M(t)$ и рыночной стоимости долга (debt outstanding) $B(t)$:

$$(1.1.1) \quad A(t) = M(t) + B(t).$$

Уравнение (1.1.1) предполагает непрерывный обмен денег на долги, причем относительный рост денежной массы означает относительное сокращение стоимости долга, и наоборот. В данной модели долги являются единственным активом, приносящим доход, и доходность долга будем полагать положительной величиной, $r > 0$, тогда как деньгам припишем нулевую доходность². Соответственно изменение стоимости финансового богатства за предельно короткий промежуток времени, \dot{A} , формируется посредством эмиссии денег, \dot{M} , и новых долгов, \dot{B} :

$$(1.1.2) \quad \dot{A} = \dot{M} + \dot{B}.$$

¹ Экономисты около двух столетий безуспешно пытаются избавиться от этого недостатка, в частности, посредством апелляции к полезности, или некоторой априорной единице потребительских свойств различных товаров и услуг. Эту огромную проблему мы в данном исследовании оставляем в стороне, заметив лишь, что если бы она была успешно решена, то система централизованного распределения ресурсов – принципиально неденежная – получила бы мощное основание для своего успешного функционирования. С другой стороны, введение денег под знак функции полезности – модное в 60-е годы прошлого столетия упражнение экономистов, аperiodически возникающее вновь – несет на себе печать избыточности, являясь утверждением нечто вроде «мокрой воды».

² Простота данной модели Кейнса, разумеется, относительна. Достаточно напомнить о том, что поведение инвестора формируется относительно как текущей, так и ожидаемой ставок доходности долгового актива, что порождает различные стратегии поведения инвесторов. Тем не менее объяснение формирования даже простейшего портфеля инвестора, состоящего только из денег и долгов, как показано в известной работе Дж. Тобиана, требует апелляции к фактору неопределенности, или финансовым рискам.

Взаимодействие денег и долга в процессе изменения стоимости финансового богатства особенно заметно, если $A(t) = const$. В этом случае положительное приращение долга возможно лишь при сокращении денежной массы, либо наоборот, т.е. $dM = -dB$. В общем случае отличного от нуля приращения финансового богатства, поскольку только долги являются активом, приносящим доход, имеет место равенство

$$(1.1.3) \quad \dot{A} = rB(t); \quad r > 0,$$

где постоянство ставки доходности долга является непринципиальным упрощением модели. Без потери общности можно полагать, что эмиссия денег происходит разом, или одномоментно, $\dot{M} = m(t)$, а погашение долга осуществляется посредством периодической выплаты денег. Уравнение роста стоимости финансового богатства (1.1.2), с учетом сказанного, представляет уравнение стоимости финансового контракта (1.2.1), рассмотренное в первой части работы. Это – обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно функции стоимости долга $B(t)$:

$$(1.1.4) \quad \dot{B} = rB(t) - m(t).$$

Согласно (1.1.4) приращение стоимости долга происходит в меру его рыночной доходности, причем будущая стоимость долга сокращается на величину купонных выплат, осуществляемых в форме денежной эмиссии. Экономически уравнение (1.1.4) моделирует процесс монетизации долга, который соответствует довольно сложной структуре взаимодействий между бизнесом и населением, центральным банком и правительством [22]. Приведем стилизованное объяснение этих процессов.

Исходным моментом является предположение о том, что правительство получает дополнительные средства, $\dot{B}^{Total} = Saving$, лишь размещая на свободном рынке свои долговые обязательства. Это соответствует тому, что в современных экономиках правительства не печатают деньги, – данные прерогативы переданы центральным банкам, которые полагаются независимыми от правительства. Таблица 1.1 показывает, что новые долги правительство обслуживает по рыночной ставке процента, $r > 0$, причем размеры погашения долга в каждом периоде оставляют величину $rB(t)$.

Таблица 1.1.

Баланс правительства

Активы	Пассивы
Размещение новых долгов, \dot{B}^{Total}	Обслуживание долга, $rB(t)$

Таблица 1.2 характеризует укрупненный счет населения и бизнеса, которые размещают часть своих доходов (сбережений), $Saving \equiv M^{old}$, на обещания доходов в будущем, \dot{B} . Для этих участников рыночного процесса изменение состава активов не меняет общую сумму их обязательств (пассивов), хотя формирование конкретных

инвестиционных портфелей на микроуровне может затрагивать не только структуру, но и объем пассивов. По сути, это процесс трансформации сбережений в инвестиции. Важно понять, что в основе сложного процесса замещения сбережений на обещания доходов лежит спрос населения и бизнеса на будущие доходы, который определяется наличными деньгами, благосостоянием, демографической структурой и предпочтениями во времени. Это – один из каналов связи финансов и реальной экономики, хотя, повторим, полностью процесс трансформации сбережений в инвестиции в данной модели не раскрывается.

Таблица 1.2.

Баланс бизнеса и населения

Активы	Пассивы
Продажа сбережений, $-m(t)^{old}$	
Покупка нового долга, $+\dot{B}$	

В отличие от населения и бизнеса, которые покупают новые долги на имеющиеся у них деньги, центральный банк пользуется для решения аналогичных задач своими исключительными полномочиями эмиссионного центра. В табл. 1.3 показано, что центральный банк, на основе соображений монетарной политики, диктуемых состоянием экономики, покупает часть новых долгов правительства, \dot{B}^{CB} , размещаемых на свободном рынке. Эта часть монетизируется, поскольку центральный банк на сумму покупок долгов правительства эмитирует свои обязательства, т.е. деньги, $m(t)$.

Таблица 1.3.

Баланс центрального банка

Активы	Пассивы
Покупка новых долгов, \dot{B}^{CB}	Эмиссия денег, $m(t)$

Правительство обещает и гарантирует населению и бизнесу поток доходов в будущем, получая взамен средства (деньги), необходимые для финансирования текущих потребностей, прежде всего, обслуживания долга. Таким образом, баланс правительства, представленный в табл. 1.1, конкретизируется в табл. 1.4 как монетизация долга в каждом периоде времени. Вместе с тем эмиссия денег центральным банком облегчает правительству обслуживание долга, поскольку снижает размер будущих налогов населения и бизнеса.

Таблица 1.4.

Взаимодействие основных участников рынка

Активы	Пассивы
Деньги населения и бизнеса, $m(t)^{old}$	
Эмиссия денег центральным банком, $m(t)$	Обслуживание долга правительством, $rB(t)$

Спрос на новые долги, который формирует население и бизнес, балансируется в соответствии с позициями таблицы 1.4, при небольшой перестройке позиций активов и пассивов объясняет взаимодействие основных участников рынка на макроуровне. Это представлено в табл. 1.5, которая, следовательно, полностью соответствует уравнению (1.1.4).

Таблица 1.5.

Баланс долгового контракта

Активы	Пассивы
Покупка нового долга населением и бизнесом, \dot{B}	Обслуживание долга правительством, $rB(t)$
	Эмиссия денег центральным банком, $-m(t)$

Даже весьма упрощенное объяснение процесса монетизации долга иллюстрирует сложность реальных процессов взаимодействия денег и долгов, за которыми стоят отношения большого числа участников рынка.

1.2. Решение уравнения модели: стоимость микродолга

Экономическая интерпретация уравнения (1.1.4), приведенная выше, объясняет возрастание будущей стоимости долга. Для «нормального» финансового процесса, т.е. процесса монетизации долга, рост стоимости последнего корректируется на величину совокупных купонных выплат за весь период времени t рассмотрения процесса:

$$(1.2.1) \quad B(t) = B(0)\exp(rt) - \int_0^t m(z)\exp[-r(z-t)]dz.$$

Интересна модификация этого решения, которая происходит при специальном выборе произвольной константы интегрирования. Обычно, как в решении (1.2.1), эта константа совпадает с начальным уровнем задолженности, $B(0)$. Между тем процесс монетизации гарантируется на неопределенно долгий срок, если формирование стоимости долга подчинить условию

$$(1.2.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m(t)\exp(-rt) = 0,$$

Согласно условию трансверсальности (1.2.2) асимптотический рост купонных платежей не должен превышать величину ставки доходности по долгам, и его выполнение позволяет задать произвольную константу интегрирования как сходящийся интеграл:

$$(1.2.3) \quad A = \int_0^{\infty} m(t)\exp(-rt)dt < \infty,$$

а общее решение уравнения (1.1.4) представить в форме

$$(1.2.4) \quad B(t) = \int_t^{\infty} m(z) \exp[-r(z-t)] dz.$$

Согласно решению (1.2.4) текущая стоимость долга на любой момент времени t является дисконтированным по рыночной ставке процента непрерывным потоком будущих доходов, приведенная стоимость которого увеличивается по мере перемещения вдоль оси календарного времени³. Ситуация отрицательного долга, предполагающая изменение положения участников контракта с должника на кредитора, в данной модели не рассматривается.

Для положительных значений доходности долга, $r > 0$, уравнение (1.1.4) является неустойчивым. В зависимости от размеров купонных платежей стоимость долга может неограниченно возрастать, сохраняться неизменной, либо достигать нулевого значения (см. рис. 1.1). Купонные выплаты определяют обратные связи в системе «деньги-долги», а указанные качественные изменения динамики долга зависят от размеров купонных выплат. Так, в линейной модели долга (1.1.4), если купонные выплаты меньше размеров роста стоимости долга, то последний растет неограниченно, иными словами, не может быть погашен. Одним из наиболее интересных аспектов анализа устойчивости модели долга (1.1.4) является исследование проблемы погашения долга за конечный промежуток времени. Отметим, что эта проблема актуальна лишь на микроуровне, поскольку любой индивидуальный эмитент долга может его погасить полностью; анализ макромоделей долга будет дан в следующем разделе работы.

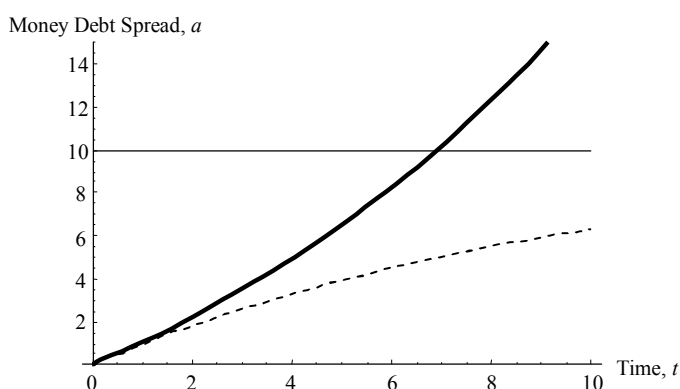


Рис. 1.1. Динамика погашаемого и невозвратного долга

³ Аналогичное уравнение исследуется в работах [4, 15]. Идея трансверсальности, которая задает асимптотические свойства системы «деньги-долги», широко используется в расчетах дискретной динамики стоимости акции (известно, что динамика акции и «длинного» долга вдоль координаты реального времени мало чем отличаются друг от друга):

$$x_t = y_t \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1+\rho}{1+\delta} \right)^j = \frac{y_{t+1}}{\rho - \delta}.$$

Это равенство известно как формула Гордона стоимости акции, хотя она впервые была предложена в работе Вильямсона. Для модели Дюрана стохастический аналог этой формулы, как показано в [47], приводит к анализу пузырей на фондовом рынке и фрактальным явлениям типа Петербургского парадокса.

Возможность погашения долга за конечный период времени следует из общего решения (1.2.1). Если долг погашается за некоторый конечный период времени, то $B(t) = 0$ и

$$(1.2.5) \quad B(0) = \int_0^t m(z) \exp(-rz) dz.$$

Формула (1.2.5) погашаемого долга, начальный размер которого равен величине $B(0)$, связывает размеры первоначальных заимствований, непрерывный поток переменных купонных платежей, рыночную доходность долга и конечное время погашения. Для фиксированных размеров купонных выплат, $m(t) = m$, на микроуровне – это хорошо известная формула аннуитета

$$(1.2.6) \quad B(0) = \frac{m}{r} (1 - \exp[-rt]).$$

1.3. Макромодель стоимости долга и денег

Исторически, что вполне естественно, долги всегда исчислялись и погашались деньгами. Так, клинописные таблички, относящиеся к временам XX династии фараонов, которые содержали записи долгового характера, указывают на существование денег. Последние могли иметь различную форму: зерна, рабов или металла, но обязательно выполняли функции измерения и погашения долга. Поэтому деньги и долги не являются независимыми субстанциями, а долг имеет своей мерой некоторое количество денег. В принципе допустимо и обратное, поскольку столь же справедливо утверждение о том, что в основе современной денежной системы лежат долги. Так, независимый центральный банк, покупая на свободном рынке долги правительства, увеличивает свои активы, что позволяет ему эмитировать собственные обязательства, т.е. деньги⁴. В модели принимается допущение о функциональной зависимости стоимости долга B и купонных выплат m от размеров эмиссии денег s , или наличие соотношений

$$(1.3.1) \quad B = B(s) \text{ и } m = m(s).$$

С учетом сказанного, общая макромодель системы «деньги-долги» представлена уравнением

$$(1.3.2) \quad \frac{dB}{ds} = rB(s) - \rho m(s),$$

⁴ Старинная японская история рассказывает об одном бедном человеке, который мог заработать себе лишь на хлеб. Он ел его, однако, всегда с удовольствием, поскольку до него доносился чудесный аромат жареной рыбы, которая готовилась в харчевне неподалеку. Однажды хозяин харчевни потребовал, чтобы человек оплатил эту «услугу». Бедняк не стал спорить, а потряс кошельком, в котором забренчала мелочь: «Я вдыхал запах твоей жареной рыбы и заплатил за это звоном своих монет. Думаю, что мы в расчете».

Взаимосвязь денег и долгов, по нашему мнению, во многом напоминает эту историю, или, выражаясь формально, принадлежит одному классу универсальности явлений.

которое зависит от двух параметров, r и ρ , а функция купонных выплат $m(s)$ удовлетворяет различным гипотезам, отражающим режимы развития финансового рынка. Параметр r соответствует номинальной ставке процента, а параметр ρ служит мерой рациональности финансового рынка. Положительные значения ρ отражают преимущественно рациональный характер взаимодействия инвесторов; отрицательные значения этого параметра соответствуют различным градациям «иррационального возбуждения» (irrational exuberance) инвесторов.

Следует отметить, что интерпретация уравнения (1.3.2) совершенно другая по сравнению с истолкованием уравнения (1.1.4). Дело в том, что в современной монетарной экономике деньги и долги должны существовать всегда. Следовательно, в макромоделе «деньги-долги» (1.3.2) нулевые значения этих переменных лишены экономического смысла: для $m(s) = 0$ стоимость долга растет неограниченно, но это может происходить не в монетарной, а бартерной системе. С другой стороны, условие $B(s) = 0$ для произвольной эмиссии денег предполагает динамику не долга, а кредита (отрицательного долга), которая, как отмечено выше, в данной работе не рассматривается. Из сказанного следует, что асимптотика системы денежной эмиссии, в отличие от стоимости микродолга во времени, скорее всего, экономического смысла не имеет. Печатный станок за фиксированный (тем более, бесконечно короткий) интервал времени может произвести лишь конечную, пусть сколь угодно большую, сумму денег. Это справедливо как для нормальной экономики, так и периодов знаменитых гиперинфляций, имевших место в Германии, России, Венгрии и в некоторых латиноамериканских странах.

Для произвольной, не связанной с уровнями задолженности функции купонных выплат $m(s)$ и значении параметра $\rho = +1$ решение уравнения (1.3.2) записывается вполне аналогично решению (1.2.1):

$$(1.3.3) \quad B(s) = \exp(rs) \left[B(0) - \int_0^s m(z) \exp(-rz) dz \right].$$

Формула (1.3.3) характеризует эволюцию финансового богатства для рационального поведения инвесторов, что имеет место для ограниченных размеров эмиссии денег. Тем более интересно, что даже конечные размеры эмиссии денег могут, при определенных условиях, породить иррациональное поведение инвесторов, неизбежно приводящее к катастрофе, или сингулярности системы. Прежде чем перейти к анализу этого явления, рассмотрим несколько гипотез купонных платежей, которые соответствуют различным режимам развития макросистемы «деньги-долги».

1.3.1. Простая гипотеза эмиссии денег $m(s) = s$

Важным частным случаем процесса монетизации долга является непосредственное возмещение долгового купона денежной эмиссией, иначе, условие $m(s) = s$. В этом предположении уравнение (1.3.2) является неоднородным линейным уравнением и имеет своим решением функцию

$$(1.3.4) \quad B(s) = \left[B(0) - \frac{1}{r^2} \right] \exp[rs] + \frac{rs + 1}{r^2},$$

которая показана на рис. 1.2 для начального долга в 15 трлн. долл., ежегодной доходности в 10% и эмиссии денег в интервале от нуля до 3 трлн. долл. Увеличение эмиссии денег говорит о возможности некоторого роста общего долга, стоимость которого затем, по мере роста эмиссии денег, снижается. В пределах ограниченной эмиссии денег линейная гипотеза достаточно реалистично характеризует «нормальный» режим функционирования системы «деньги-долги», в котором взаимодействие инвесторов рационально и потому не оказывает влияния на эволюцию системы.

Линейная модель долга, как известно, имеет неустойчивую динамику, причем стационарное значение долга практически недостижимо: последний либо неограниченно растет, либо выплачивается полностью. Между тем большинство стран с развитой экономикой имеют удельный долг, значение которого колеблется на достаточно высоком уровне: хотя номинал долга не погашается, но это, как правило, не вызывает потрясений финансовых и реальных рынков. Существование непрерывной и значительной стоимости долга на макроуровне – неперенный атрибут современной рыночной экономики, отобразить который можно посредством введения обратной связи между выплатами и уровнем долга. Соответствующая модификация приводит к так называемой логистической модели долга.

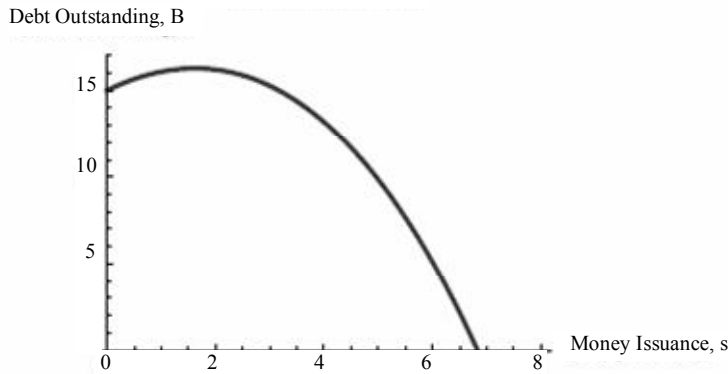


Рис. 1.2. Изменение стоимости простого долга

1.3.2. Гипотеза логистического долга: $m(s) = rB^2(s)$

В рамках данного предположения о функциональной форме купонных выплат гомогенные заемщики конкурируют за ограниченный объем кредитов. Простая модификация уравнения (1.3.2) приводит к логистическому уравнению

$$(1.3.5) \quad \frac{dB}{ds} = rB(1 - B),$$

где функция $s(t) = rB^2(t)$ отражает совокупное поведение заемщиков, конкурирующих за ограниченные кредиты. Нелинейные взаимодействия логистического типа порождают обратные связи, стабилизирующие долговую систему, поскольку на нормально

функционирующем финансовом рынке повышение уровня задолженности у заемщика затрудняет ему получение кредитов, и наоборот. Из уравнения (1.3.5) видно, что увеличение долга вызывает падение темпа его прироста, $\dot{B}/B(t)$, что стабилизирует систему (см. рис. 1.3). Отметим, что логистическая модель (1.3.5) сохраняет универсальность принципа отсутствия арбитражной прибыли, характеризующего «нормальный» финансовый рынок.

Логистическое уравнение, решение которого представляет так называемую S-образную кривую, было предложено бельгийским математиком Х. Верхульстом (Verhulst) еще в середине XIX столетия для анализа динамики популяций в биологии. Практическая применимость логистического уравнения весьма велика, например, издательство «Springer» выпустило в середине 1990-х гг. интересную монографию, посвященную практическим применениям этой модели. Российскому читателю любопытно знать, что в конце 20-х гг. XX в. советские экономисты-математики использовали логистическое уравнение в рамках «теории затухающих темпов», призванной объяснить особенности первого пятилетнего плана реконструкции народного хозяйства СССР. Современный анализ дискретного логистического уравнения, зависящего от параметра, в популярной форме обобщен Р. Мэем (R. May) в его знаменитой статье, опубликованной журналом «Nature» (1972), где была раскрыта сложная динамика этого простого нелинейного уравнения. Научная литература, в которой феномен хаоса исследуется применительно к экономическим процессам, огромна, и в нашу задачу не входит ее систематизация или даже простой обзор [23]. Следует отметить, что интерес к экономическим моделям хаоса, весьма популярным в 1990-е гг., постепенно уменьшился, во многом из-за отсутствия должных эмпирических обоснований возникновения хаотических ситуаций [30].

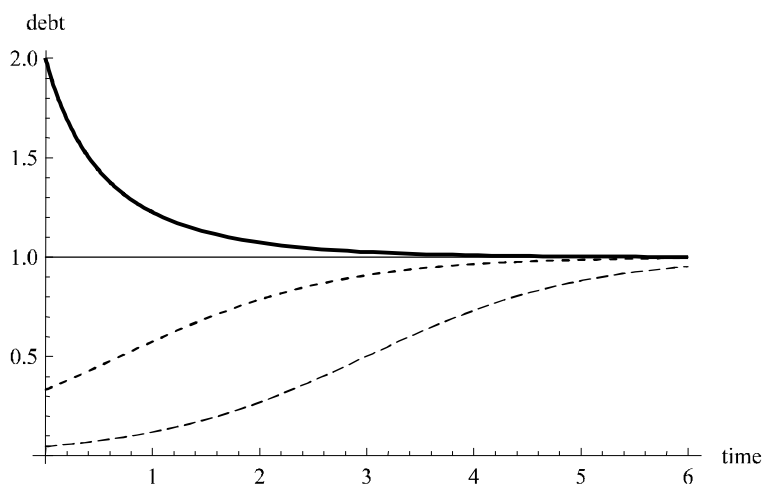


Рис. 1.3. Динамика долга в простой логистической модели

Хаотические процессы основаны на принципиально иной, в отличие от вероятностной, трактовке неопределенности, поскольку порождаются детерминированными

нелинейными системами, зависящими от параметра. Хаос представляет аperiodическое и непредсказуемое поведение детерминированной системы за длительные периоды времени [38, 46]. В экономике дрейф системы к хаосу означает развал рынка, на котором инвесторы полностью теряют ориентиры поведения. Это объясняет наш интерес к дискретному логистическому уравнению⁵, которое представлено как модель внешнего государственного долга России [3]. Система внешних заимствований России в 1999 г., как следует из расчетов, была близка к хаосу, равносильному полному коллапсу. Это экономическое событие осталось в тени финансового краха августа 1998 г. Хотя модель хаотического типа обобщить весьма затруднительно, она интересна своеобразной трактовкой ситуации коллапса долговой системы.

1.4. Логистическая модель дрейфа к хаосу российского долга

Известно, что в дискретном случае одно нелинейное конечно-разностное уравнение, например логистическое, способно породить хаотическое поведение системы, которое, по сути, является проявлением развала системы. Эти свойства демонстрирует модель удельного внешнего долга России, которая показывает, по крайней мере, возможность дрейфа экономики к хаосу [3].

В нелинейной модели рост долговой зависимости заставляет добросовестного должника, если ему позволяют доходы, увеличивать размеры платежей, что следует, с учетом сказанного в разделе 1.3.2, из дискретного уравнения логистического типа

$$(1.4.1) \quad \beta_{t+1} = a\beta_t(1 - \beta_t),$$

где β_t – удельный внешний долг. Динамика внешнего долга и производства Российской Федерации за 1990-е гг. представлена в табл. 1.4.1, где последняя строка таблицы⁶ рассчитана по формуле

$$(1.4.2) \quad a_t = \frac{\beta_{t+1}}{\beta_t(1 - \beta_t)}.$$

По экономическому смыслу параметр управления a_t представляет соотношение номинальной ставки процента, темпа изменения производства и обменного курса валют: $a_t = \frac{1+i_t}{1+\lambda_t} \alpha$; $\alpha = \frac{e_{t+1}}{e_t}$, где e_t – номинальный обменный курс доллара США в рублях.

Таблица 1.4.1 показывает, что удельный внешний долг России достиг в 1999 г. своего максимального значения в 80,1%. Это произошло, однако, в результате не столько увеличения объема долгов, сколько из-за резкого обесценения рубля и сокращения объемов производства после кризиса августа 1998 г. Параметр управления a_t достигает в 1999 г. своего максимального значения, равного 3,460, что с эко-

⁵ В непрерывном случае требуются три дифференциальных уравнения для того, чтобы система демонстрировала свойства хаотического поведения.

⁶ Таблица составлена по данным [1].

номической точки зрения является сигналом тревоги в платежных отношениях страны с внешним миром.

Таблица 1.4.1.

Динамика удельного внешнего долга России за 1995–2001 гг.

	1995 г.	1996 г.	1997 г.	1998 г.	1999 г.	2000 г.	2001 г.
Номинальный ВВП, млрд. долл.	313,8	391,7	404,9	271,2	195,9	259,7	306,6
Внешний государственный долг, млрд. долл.	128,0	143,3	147,0	166,4	155,0	143,4	130,1
Внешний долг/ВВП, %	37,9	34,8	35,8	59,5	80,1	55,2	42,0
Средняя ставка по кредитам, %	147,4	91,4	32,0	41,8	39,7	24,4	17,9
Параметр управления, a_t	1,469	1,578	2,589	3,324	3,463	1,698	

Максимальное значение удельного долга, как следует из $f'(\beta) = a - 2a\beta = 0$, достигается в точке $\beta^* = \frac{1}{2}$, где значение удельного долга равно $\frac{a}{4}$. Следовательно, если значения параметра a ограничены пределами $0 \leq a \leq 4$, то все допустимые значения удельного долга принадлежат отрезку единичной длины. С учетом сказанного, динамика удельного внешнего долга России задана на множествах значений удельного долга и параметра управления:

$$(1.4.3) \quad 0 \leq \beta_t \leq 1 \text{ и } 0 \leq a \leq 4.$$

Логистическое уравнение (1.4.1) имеет две точки равновесия:

$$(1.4.4) \quad \beta_1 = 0, \text{ и } \beta_2 = 1 - \frac{1}{a},$$

существование которых эквивалентно утверждению о возможности расплатиться с долгами. Это, однако, обусловлено свойствами устойчивости системы, которые зависят от значений рыночной ставки процента и темпа роста производства.

В диапазоне значений параметра управления $0 < a < 1$ существует, с учетом условий (1.4.3), только одна точка равновесия, причем в нуле система устойчива, так как $f'(0) = a < 1$, и локально удельный долг тяготеет к равновесному значению. В указанном диапазоне значений рыночная ставка процента ниже темпа роста ВВП, а значит, погашение долга не вызывает затруднений. Когда значение параметра управления становится равным единице, система претерпевает качественное изменение: две точки равновесия сливаются в одну. Это – так называемая *транскритическая бифуркация* системы в точке $\beta = 0$, которая происходит при $f'(0) = a = 1$. Дальнейшее возрастание значения параметра управления приводит к появлению новой, причем

устойчивой, точки равновесия в диапазоне значений параметра управления $1 < a < 3$, а начало координат становится неустойчивым равновесием.

На интервале $1 < a < 2$ точка устойчивого равновесия соответствует пересечению прямой и левой ветви функции $f(\beta) = a\beta(1 - \beta)$, а в диапазоне $2 < a < 3$ – прямой и правой ветви функции $f(\beta)$. Для значений параметра управления в интервале $1 < a < 3$ величина долга стремится к некоторому постоянному значению, например, $\beta = 0,64$ для $a = 2,8$. Наличие постоянной и значительной задолженности становится непререваемым атрибутом макроэкономической динамики. Подобные равновесия долговой динамики, особенно на левой ветви кривой $f(\beta) = a\beta(1 - \beta)$, типичны для развитых в экономическом отношении стран, которые практически постоянно имеют значительные долги, как внутренние, так и внешние.

Дальнейшее увеличение значения параметра управления порождает новую, при значении $a = 3$, бифуркацию системы долга, на этот раз так называемую бифуркацию «щелчка» (*flip bifurcation*)⁷, которая происходит при значении удельного долга $\beta = 2/3$. Она по типу относится к бифуркации «сборки» (*pitchfork bifurcation*) и, по сути, означает, что система начинает дрейфовать к хаосу. Стационарная точка $\beta = 2/3$ становится неустойчивой, так как $f'(2/3) = -1$. Потеря устойчивости при этом значении удельного долга – несомненный сигнал о нарастающих трудностях в обслуживании долга. В интервале значений параметра управления

$$3 < a < 1 + \sqrt{6}$$

появляются две устойчивые точки равновесия, а точка равновесия $\beta = 0,64$ становится неустойчивой. В цикле периода 2 возникают противоречивые тенденции в динамике факторов, которые определяют амплитуду колебаний долга между 0,55 и 0,83 при его фактическом значении на уровне 0,69. Известно, что начало хаотической перестройки системы демонстрируется так называемым циклом второго порядка (*period – 2cycle*), характеризующим колебания удельного долга вокруг двух точек равновесия, которые появляются после бифуркации системы при значении параметра управления $a = 3$. Колебания уровней внешнего долга между двумя, а затем между четырьмя, восемью, и т.д. устойчивыми значениями экономически характеризует начало распада системы заимствований и обслуживания долга, что приводит к коллапсу долговой системы и банкротству страны-должника. Это – прямое следствие теории хаоса, которая утверждает о появлении колебательных циклов порядка четыре, восемь, шестнадцать и т.д. при увеличении параметра управления. Соответственно растет число точек равновесия системы, локализация которых становится непредсказуемой. При значении параметра управления $a_\infty = 3,5699\dots$ число точек равновесия ста-

⁷ Интересно отметить, что эмпирически, по правилам МВФ, значение удельного долга, равное 0,7, считается критическим, свидетельствующим о наличии или нарастании негативных процессов в экономике страны-должника. Если полагать гипотезу логистической модели долга адекватной действительности, то бифуркация «щелчка» подкрепляет теоретически данное правило, слегка корректируя критическое значение удельного долга – до 0,64.

новится чрезвычайно большим, а их появление, т.е. поведение системы, становится хаотическим и *полностью непредсказуемым*⁸ (рис. 1.4).

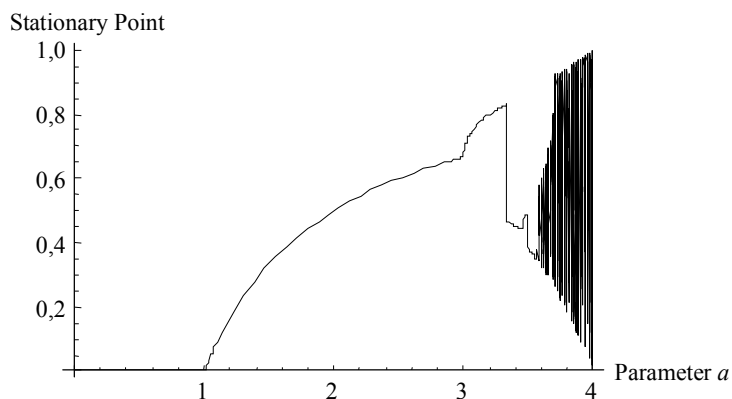


Рис. 1.4. 500 итераций логистического отображения

Эмпирические данные о величинах номинального темпа прироста российского ВВП в долларах, инфляции и номинальной ставке доходности вполне согласуются с гипотезой о хаотической перестройке удельного внешнего долга России в 1999 г. В предположении о том, что основная масса внешних долгов была оформлена как еврооблигации, доходность последних в 1999 г. равнялась доходу по американским T-bills плюс спред примерно в 40% годовых⁹. Отметим, что это примерно совпадает со средней ставкой процента по коммерческим кредитам российских банков в 39,7% за 1999 г. Таким образом, эмпирическая величина параметра управления составила $a = 3,16$ при ее расчетном значении, приведенном в табл. 1.4.2, равном 3,46. Оценка параметра управления по фактическим данным позволяет утверждать, что цикл второго порядка появился практически достоверно, указывая на дрейф долговой системы России к хаосу. Итерации логистического уравнения удельного долга России для $\beta_0 = 0,218$; $a = 3,2$ показаны на рис. 1.5.

Фактически, однако, Россия не объявила дефолт по внешним долгам и не стала банкротом. Столь счастливый исход объяснялся ростом мировых цен на нефть и увеличением объемов экспорта, что при сокращении импорта позволило увеличить долговые выплаты. Разумеется, при этом сократились расходы на внутреннее частное и государственное потребление, а также на инвестиции. В целом, как представляется, логистическая модель правильно указывает на трудности с выплатой внешнего долга, резко усилившиеся в 1999 г.

⁸ Строго говоря, хаос имеет свой порядок и структуру, представленную, например, последовательностью чисел Фейгенбаума, появлением так называемых «окон» и устойчивого колебательного цикла порядка три.

⁹ Журнал «Экономист» (The Economist, 2003, October 9) отмечал, что спред по российским еврооблигациям за 1999 г. находился в диапазоне 3000–5000 базисных пунктов.

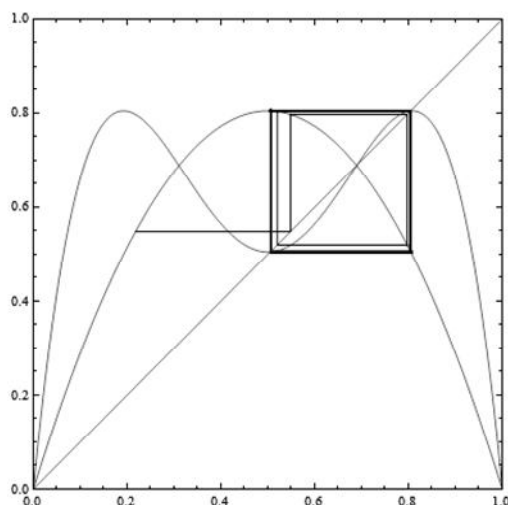


Рис. 1.5. Итерации логистического уравнения долга для $a = 3,2$

1.5. Простая модель сингулярного долга:

$$m(s) = \rho B^a(s); r \cong 0; \rho < 0; a > 1$$

Общее уравнение долга (1.3.2) в рамках этой гипотезы для весьма малых значениях параметра r и значении параметра рациональности рынка $\rho = -1,0$ модифицируется к простому уравнению Бернулли

$$(1.5.1) \quad \frac{dB}{ds} = B^a(s); a > 1.$$

Уравнения (1.3.5) и (1.5.1) можно рассматривать как модели взаимодействия участников рынка, в которых нелинейность Верхульста, $m(t) = \mu B(t)^2$, замещается на более общую нелинейность Бернулли. При этом параметр взаимодействия инвесторов, $a > 1$, не обязан равняться целому числу, например двум, как в логистической модели (1.3.5).

Снижение практически до нуля параметра доходности $r \cong 0$ имеет эмпирическое объяснение, основанное на монетарной политике центральных банков основных стран мира. Так, с начала кредитного кризиса 2007–2010 гг. ФРС увеличила размеры своих активов более чем в два раза, одновременно снизив ставку рефинансирования (federal funds target rate), которая более полутора лет находится в диапазоне от нуля до 25 базисных пунктов. Аналогичное снижение ставок рефинансирования провели центральные банки всех экономически развитых стран, включая Европейский центральный банк. Подобная когерентная политика центральных банков вполне объяснима в свете коллапса кредитных рынков и потери доверия инвесторов к структурированным инструментам типа обеспеченных долгами активов (collateralized debt obligation, CDO), обязательств с аукционной ставкой доходности (auction rate security, ARS) и обеспе-

ченных активами коммерческих векселей (asset backed commercial paper, АВСР), и последующего их массового сброса участниками рынка [21, 25].

Теоретически уравнение Бернулли (1.5.1) является, пожалуй, наиболее простым представлением динамической системы, претерпевающей сингулярность на конечном отрезке изменений независимой переменной. В контексте динамики это уравнение моделирует изменение стоимости долга, происходящее в силу нелинейного роста спроса на долговые активы, порождаемого взаимодействием их покупателей. Для начальных условий в 15 млрд. долл., параметре иррациональности $\rho = -1$ и $a = 1,42$ динамика системы, моделируемой уравнением Бернулли (1.5.1), представлена на рис. 1.6. Как видно, даже для сравнительно небольших изменений денежной эмиссии – от 3 до 4 млрд. долл. – система имеет бесконечное множество решений, т.е. практически не существует. Кроме того, значения долга порядка 10^{70} экономического смысла, понятно, иметь не могут, что вполне соответствует ранее сделанному утверждению об экономической некорректности асимптотики макродолга.

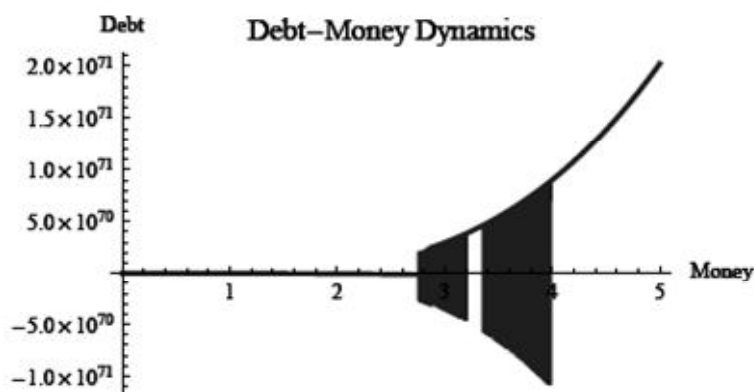


Рис. 1.6. Динамика системы деньги-долги

Модель сингулярности можно рассматривать как режим, в котором взаимодействие участников рынка не стабилизирует, а дестабилизирует систему. Формально доминирование факторов иррациональности в поведении финансовых инвесторов приводит к исчезновению тренда (линейной компоненты) и перемене знака у нелинейной компоненты модели (1.3.2). Можно полагать, что подобная трансформация отражает смену инвесторами стереотипов своего поведения, которая происходит на фоне последовательного снижения центральными банками ставки рефинансирования. Эти процессы, как будет показано в следующем разделе, способствуют усилению гомогенности системы вследствие значительного роста параметра связности (connectedness) элементов [36]. Скачок от несвязности к связности, по-видимому, объясняет изменение знака параметра ρ с положительного на отрицательный, что, в свою очередь, драматически меняет свойства системы в целом. Макроскопически стоимость долга начинает расти неограниченно, а поэтому, не может быть погашена, тогда как внезапная утрата доверия инвесторов к торгуемым инструментам может породить каскад разорений и общий коллапс системы.

Как известно, простой подстановкой $z(s) = B(s)^{1-a}$ уравнение (1.5.1) может быть приведено к линейному, которое имеет аналитическое решение:

$$(1.5.2) \quad B(s) = B(0) \left[1 - \frac{s}{s_c} \right]^{\frac{-1}{a-1}},$$

где критический объем эмиссии денег s_c зависит от параметра a и начальных условий системы $B(0)$:

$$(1.5.3) \quad s_c = \frac{a-1}{[B(0)]^{a-1}}.$$

Сингулярность решения (1.5.2) в точке s_c объясняется тем, что в модели с нелинейностью Бернулли (1.5.1) значение мгновенного темпа изменения долга $\frac{d \ln B(s)}{ds} = B^{a-1}$ возрастает по мере увеличения стоимости долга $B(s)$, а значит, изменений эмиссии денег s . Эта положительная обратная связь, порождаемая взаимодействием участников рынка, является важнейшим механизмом сингулярности процесса роста стоимости долга. Основным фактором, приводящим к положительным обратным связям и усилению неустойчивости финансовой системы, выступает иррациональность (irrational exuberance), принимающая формы подражательности и «сбивания в стаю» (herding), а также «животных инстинктов» (animal spirit), которые при определенных обстоятельствах начинают формировать стереотипы поведения участников финансового рынка [7, 39, 40]. Таким образом, положительные обратные связи лежат в основе формирования «финансовых пузырей», которые подготавливают неустойчивость системы и финансовые кризисы.

Забегаю несколько вперед, отметим, что уравнение макрофинансовой динамики (1.5.1) оказывается точно таким же, что и уравнение поведения участников рынка на микроуровне, которое будет получено в следующем разделе работы. Это объясняется тем, что иррациональный характер раздувания финансового пузыря приводит к неизбежному перерождению финансового рынка, а процесс перколяции моделируется уравнением Бернулли.

2. Микрофинансовая модель кризиса

Известно, что состояние финансового рынка определяется огромным количеством факторов, а полное описание всех его изменений – дело чрезвычайно трудное, если возможное вообще. В микромодели финансового пузыря изменение объемов ликвидности влияет на поведение инвесторов, принимающих решения независимо, но способных образовать кластеры участников с однотипным поведением, например, кластеры покупателей долга. Исследование пузыря сводится к определению точки, в которой происходят необратимые качественные изменения структуры рынка (перколяция системы), за ними неизбежно следует собственно кризис ликвидности. Строго говоря, «созревший» кредитный пузырь – не кризис, но кризис обязательно наступит вследствие необратимых изменений структуры рынка.

2.1. Микроструктура рынка долгов

Случайная микродинамика финансового рынка представлена как *двумерная модель перколяции*, которая объясняет процесс кластеризации покупателей долга, происходящий под влиянием накопления ликвидности. Отрезок значений ликвидности $[s^*, \hat{S}]$ удобно нормализовать, например, как

$$p = \frac{s - s^*}{\hat{S} - s^*}; \quad 0 \leq p \leq 1,$$

где s^* – объем ликвидности, обеспечивающий полное погашение долга, а константа \hat{S} определяет объем ликвидности в условиях абсолютного доминирования кластера покупателей долга. Параметр p положителен, равен нулю и единице на концах отрезка $[s^*, \hat{S}]$, следовательно, может интерпретироваться как априорная вероятность, p , значение которой определяет некоторое случайное состояние финансового рынка. Поэтому все рассуждения можно проводить в терминах ликвидности, которым соответствуют некоторые априорные вероятности состояний финансового рынка, строго говоря, с точностью до некоторой константы пропорциональности. Феномен перколяции на финансовом рынке понимается как появление кластера покупателей долга в размерах, сопоставимых с размерами системы. Доминирование на рынке кластера покупателей долга делает систему самоподобной, а ее размерность – фрактальной [45].

Различные состояния рынка предстают как стохастическая последовательность конфигураций (числа, размеров и локализации кластеров) на заданной сети ячеек, где ячейка (клетка) отождествляется с действиями некоторого инвестора. Уровень априорной вероятности p характеризует размер ликвидности, циркулирующей на финансовом рынке: $0 \leq p \leq 1$; $\sum_i p_i = 1$. Для каждого уровня априорной вероятности на сети линейного размера L , $L \times L = N$, последовательно рассматриваются все ячейки $b_i, i \in N$, которые случайным образом, независимо друг от друга, находятся в одном из двух состояний:

$$b_i = \begin{cases} +1, & p_i < p, \\ 0, & p_i \geq p. \end{cases}$$

Принимается, что ячейка в «занятом» состоянии (+1) соответствует длинной позиции, т.е. инвестор b_i преимущественно покупает долги. Длинная позиция инвестора может объясняться либо его предпочтениями в условиях избыточной ликвидности, либо наличием недооцененного актива. Такие инвесторы участвуют в формировании кластеров покупателей долга. Напротив, если ячейка принимает состояние (0), то ассоциированный с ней инвестор покупает и продает долги, не демонстрируя явно выраженных предпочтений, следовательно, не участвует в формировании кластеров покупателей.

Для заданного шага, например, $\Delta p = 0,1$, происходит последовательный перебор значений априорной вероятности (нормированных значений ликвидности). При каждом значении априорной вероятности на сети формируется некоторая конфигурация «занятых» ячеек сети, которая случайным образом изменяется для каждого цикла имитации системы. Таким образом, хотя каждый инвестор принимает решение о приобретении долга независимо, но совокупность покупателей долга образует кластеры. Формально кластеры вычисляются по алгоритму Хошена – Копелмана (Hoshen – Kopelman) как множество ячеек, находящихся в состоянии (+1) и имеющих общее ребро [19]. С помощью компьютерной программы для системы линейного размера $L = 100$ был проведен ряд экспериментов, некоторые результаты которых приведены ниже. Для разных объемов ликвидности, $s = \frac{s_c}{p_c} p$, либо априорной вероятности на рис. 2.1 представлены три типичные конфигурации, взятые из работы Пименовой И.В. [2].

Для небольших объемов ликвидности, $s < s_c$, рынок функционирует «нормально». Это означает, что число продавцов и покупателей активов, а также объемы их транзакций, различаются незначительно, а поведение инвесторов имеет относительно низкую когерентность. Как правило, «нормальный» рынок – «глубокий» и «широкий», на котором размеры кластеров покупателей долга сравнительно малы. На рис. 2.1а видно, что в этом состоянии число темных ячеек (продавцов и покупателей долга) примерно равно числу светлых ячеек (покупателей долга), а средний размер кластеров покупателей долга $\langle b \rangle$ конечен и сравнительно невелик. Это говорит о гетерогенности финансового рынка в том смысле, что предпочтения инвесторов разделены и симметричны, а число покупателей примерно равно числу продавцов. Для таких объемов ликвидности размер кластеров покупателей долга не зависит от размера рынка в целом.

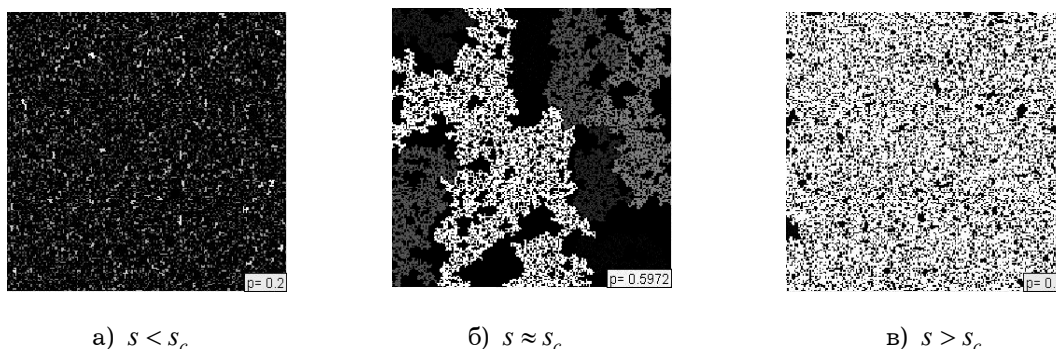


Рис. 2.1. Конфигурации сети участников рынка размера $L = 100$ для разных объемов ликвидности

Увеличение ликвидности усиливает когерентность поведения участников рынка, поскольку большая масса денег способствует росту числа покупателей долга. Рост объемов ликвидности влечет за собой увеличение числа и среднего размера

$\langle b \rangle$ кластеров покупателей долга. Для каждого уровня характеристического размера системы $L \geq \xi(p)$ система макроскопически гомогенна, тогда как для $L < \xi(p)$ рынок гетерогенный [43]. Перколяционный (spanning) кластер, возникающий в критической точке, является фракталом, т.е. самоподобен и имеет дробную размерность. На рис. 2.1б представлена конфигурация системы для объемов ликвидности, близких к критическому уровню, $s \approx s_c$. В этом состоянии общее число продавцов долга по-прежнему примерно равно числу покупателей, но последние организованы в единый кластер (ячейки светлого цвета), который имеет максимальную размерность, сопоставимую с размерами всего рынка. Это характеризует явление *перколяции системы*, которое знаменует необратимое изменение рынка, ведущее к неизбежному кризису.

В критической точке, $s \approx s_c$, кластер покупателей долга имеет размер, сопоставимый с размерами рынка. Геометрически, для сети конечного размера, кластер покупателей может располагаться, например, от верхней до нижней границы сети¹⁰. Вместе с тем организация максимального (spanning) или перколяционного кластера довольно рыхлая. Перколяционный кластер, как видно на рис. 2.1б, имеет нерегулярную форму с «дырами», а, кроме того, на сети различимы многие независимые кластеры покупателей долга конечной размерности. Модель перколяции финансового рынка утверждает, что в малой окрестности критического значения эмиссии ликвидности $s = s_c$, распределение средних размеров кластеров следует степенному закону

$$(2.1.1) \quad \langle b \rangle \propto |s - s_c|^{-\gamma},$$

где $\gamma = 43/18$ – одна из инвариантных констант перколяции для ячеистой плоской сети [45]. В окрестности критической точки конечный объем ликвидности способствует формированию кластера покупателей долга сколь угодно большой размерности, увеличивая (теоретически – до бесконечных размеров) спрос на активы и их стоимость. Иными словами, конечные объемы ликвидности монетизируют произвольно большие объемы задолженности.

Инвариантность масштаба, свойственная степенному распределению, характеризует перколяционный кластер как фрактал [11], размерность которого равна $d = 0,189 \pm 0,03$. Фрактальный характер перколяционного кластера говорит о качественных изменениях, происходящих на финансовом рынке, где начинает доминировать кластер покупателей долга. Размер перколяционного кластера определяется «корреляционной связностью» $\xi(p) \propto |s - s_c|^{-\nu}$ системы, т.е. степенью взаимного влияния покупателей долга, не нарушенного собственными предпочтениями участников данного кластера. Связность элементов системы и средний размер кластера в окрестности критической точки становятся теоретически бесконечными, хотя в реальных конечных системах они ограничены размерами всего накопленного долга. Свойство самоподобия системы – важнейшее свойство фрактала, которое появляется в результате резкого

¹⁰ Определение перколяционного кластера для систем конечной размерности является предметом специального соглашения.

увеличения корреляционной связности ячеек сети (инвесторов), что отражает иррациональный характер «эффекта толпы» на финансовом рынке, происходящего под воздействием увеличения объема ликвидности.

Наконец, на рис. 2.1в воспроизводится конфигурация рынка долгов для объемов ликвидности, превышающих критический уровень, $s > s_c$. В этом состоянии когерентность поведения инвесторов настолько велика, что практически все становятся покупателями долга. Только очень малое число участников рынка продает долги и образует отдельные кластеры (светлого цвета). Однако все постоянно и неопределенно долго покупать не могут. Осознание этого факта приводит к массовой смене позиций участниками рынка с длинной на короткую, что приводит к дефициту ликвидности. «Теория еще большего дурака», рассмотренная в первой части работы, представляется простым и вполне убедительным объяснением такого поведения. Рынок покупателей на «закритической» стадии лопания «финансового пузыря» превращается в рынок продавцов, означающий наступление кризиса ликвидности.

Важнейшее преимущество использования модели перколяции – это возможность адаптации результатов, полученных в исследовании систем совершенно другой природы [26]. Вместо экспериментов в финансах, которые либо невозможны, либо чрезвычайно опасны, теория перколяции предлагает ряд инвариантных констант, или «критических экспонент» (critical exponent), полученных в результате экспериментирования с фазовыми переходами совершенно других систем. В нашей модели такие константы используются непосредственно, но, вообще говоря, этому должны предшествовать специальные исследования. Критические экспоненты перколяции на ячеистой сети, строго говоря, справедливы для бесконечно больших систем ($L \rightarrow \infty$), тогда как реальная финансовая система имеет конечный размер. Следовательно, объем критической задолженности существует и конечен, а в окрестности критической точки существуют различные кластеры, величины которых следуют степенному распределению. Проблема в том, как эмпирически определять размеры системы: числом фирм, участвующих в торговле финансовыми инструментами, либо брокеров-дилеров, и т.д. Апелляция к системам бесконечной размерности позволяет использовать в расчетах константы перколяции, не решая сложные вопросы агрегации, по крайней мере, на предварительных этапах.

Напомним, что гипотеза свободной конкуренции включает требования большого количества примерно равных (малых), независимых участников рынка, который не разгорожен барьерами. Эти условия нарушаются в экстремальной ситуации кризиса, когда дефицит ликвидности делает всех участников рынка зависимыми друг от друга, равно как и от состояния системы в целом. Связность элементов системы становится сопоставимой с ее размерами. Это и является объяснением того, что в экстремальных ситуациях механизмы саморегуляции рынка неспособны предотвратить дестабилизацию и коллапс системы. Свойство сложных систем, в том числе финансовых, резко увеличивать связность в критических ситуациях (во время кризиса) проливает свет, в частности, на причины провала сегмента структурированных продуктов, обеспеченных непогашенными долгами, в том числе CDO (collateralized debt obligation), соответственно, разорение крупных участников рынка – бывших инвестиционных банков, – торговавших этими инструментами в больших количествах [48]. Такие продукты, как полагали многие теоретики, позволяли диверсифицировать риски среди большого числа участников рынка. Однако это могло иметь место лишь при условии независимости рыночных агентов, тогда как кризис вызвал скачкообразный рост корреляцион-

ной связности в критической точке. В результате для критических объемов ликвидности самые различные участники сегмента ипотеки, практически никак не связанные друг с другом в нормальных условиях, оказались как бы в «одной лодке». Как следствие, риски, вместо диффузии и распределения малыми дозами среди многих инвесторов, оказались сконцентрированными у нескольких крупных банков и финансовых страховщиков типа Bear Stearns, Merrill Lynch, AIG, Lehman Brothers. В условиях всеобщего падения стоимости активов неспособность продажи рисков предопределила разорение гарантов и держателей рискованных долгов, структурированных в сложные инструменты.

2.2. Кластеры и стоимость финансового актива

Экономическая интерпретация изменений микроструктуры финансового рынка вполне соответствует характеристике, данной Дж.М. Кейнсом процессам «спекуляции» и «предприимчивости» инвесторов [27]. Как известно, под термином «спекуляция» (speculation) он понимал аспект поведения инвесторов, состоящий в предвидении действий других участников рынка. С другой стороны, инвесторы заняты постоянным поиском и приобретением активов, имеющих наивысшую стоимость для владельца или максимальную доходность для покупателей. Этот аспект поведения инвесторов Кейнс характеризовал посредством термина «предприимчивость» (enterprise)¹¹. Спекуляция и предприимчивость на финансовом рынке – сопряженные понятия, поскольку изменение цен активов когерентно формированию кластеров покупателей долга. В контексте определений Кейнса цепь причинно-следственных зависимостей следующая: накопление избыточной ликвидности формирует основной импульс образования кластеров покупателей долга, что увеличивает спрос на долги и вызывает рост их стоимости. Интересно, что данная последовательность полностью соответствует утверждению У. Баффета о росте стоимости активов как «финансовом наркотике»¹² для инвестора.

Перестройка микроорганизации рынка, ведущая к перколяции, позволяет составить уравнение «спекуляции», которое характеризует динамику среднего размера кластеров $\langle b \rangle$ покупателей долга. По мере приближения эмиссии ликвидности к критическому уровню размеры конечных кластеров увеличиваются. С учетом этого, дифференцируя равенство (2.1.1) по переменной ликвидности, получаем:

$$\frac{d\langle b \rangle}{ds} = (-\gamma) |s - s_c|^{-\gamma-1} \frac{d}{ds} |s - s_c| = \gamma \langle b \rangle^{\frac{1}{\gamma}} \langle b \rangle \propto \langle b \rangle^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}, \text{ для } s < s_c.$$

Это приводит к нелинейному дифференциальному уравнению для среднего размера кластеров:

$$(2.2.1) \quad \frac{d\langle b \rangle}{ds} = \langle b \rangle^{\frac{\gamma+1}{\gamma}},$$

¹¹ Это понятие не следует смешивать с термином «предпринимательство» (entrepreneurship), который обычно используется в широком социально-экономическом контексте.

¹² FT.com, June 2, 2010.

где γ – критическая экспонента перколяции. По мере формирования кластеров покупателей долга изменяется стоимость новых заимствований: чем больше покупателей и чем более согласованно они действуют, тем выше спрос на активы, следовательно, выше их стоимость. Динамика стоимости новых заимствований является нелинейным процессом, поскольку избыточность ликвидности влечет качественные изменения микроструктуры рынка. Пожалуй, самой простой моделью нелинейности является дифференциальное уравнение «предприимчивости», по сути, совпадающее с уравнением «спекуляции»

$$(2.2.2) \quad \frac{dB}{ds} = B^a(s); \quad a > 1,$$

где параметр $a > 1$ характеризует меру влияния стоимости новых долгов на скорость их роста. Из аналогии процессов формирования кластеров покупателей долга и возрастания стоимости новых заимствований следует равенство соответствующих параметров в правых частях уравнений (2.2.1) и (2.2.2), которые измеряют скорости изменения состояний. Согласно равенству $\frac{1+\gamma}{\gamma} = a = 1,42$ средний размер кластера покупателей растет в результате взаимодействия каждого участника кластера примерно с двумя другими, что через параметр $a = 1,42$ влияет на рост стоимости новых заимствований. Уравнение (2.2.2), как было выяснено в разделе 1.5, редуцируется к линейному уравнению, что позволяет вычислить критический объем эмиссии ликвидности

$$(2.2.3) \quad s_c = \frac{1}{a-1} B(0)^{-(a-1)},$$

и стоимость нового долга

$$(2.2.4) \quad B(s) = B(0) \left[1 - \frac{s}{s_c} \right]^{-\frac{1}{a-1}}.$$

В критической точке s_c , как следует из (2.2.4), стоимость новых долгов становится сопоставимой с размерами всего долга, что может иметь место лишь для бесконечно высоких объемов заимствований. Однако бесконечно высокие объемы заимствований не могут иметь надежное обеспечение активами, а деньги в таких условиях теряют свою ценность. Это эквивалентно коллапсу финансовой системы. Конечные размеры всех реально существующих систем лишь маскируют этот феномен. Как утверждалось ранее, уравнение (2.2.2) в точности совпадает с уравнением сингулярности макрофинансового пузыря (1.5.1), которое получено в первой части данной работы. Таким образом, процессы образования кластеров покупателей долга объясняют раздувание финансового пузыря, иррациональный характер которого отражается в изменении параметра ρ уравнения (1.3.2) с положительного на отрицательное значение.

2.3. Фрагмент системы «раннего предупреждения» кризисов

По модели перколяции были проведены расчеты, аналогичные представленным в [5], но по другим исходным данным и для более позднего – 2007 г. Так, уравнение (2.2.4) было использовано для расчета характеристик глобального внутреннего долга (global domestic debt), который является одной из мер мировой задолженности и рассчитывается Базельским банком международных расчетов. Данные, взятые из Годового отчета банка [8], приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1.

**Объемы мировой задолженности и их изменения, млрд. долл.
(на декабрь)**

	2006 г.	2007 г.	2008 г.
Объем мирового долга	49735,1	56210,7	59666,0
Приращения объемов мирового долга		3969,4	3743,5

Согласно данным инвестиционного банка NATIXIS, приращение мирового объема денежной базы составило за 2007–2008 гг. около 1,3 трлн. долл.¹³ Значение параметра $a = \frac{1+\gamma}{\gamma}$ было сохранено таким же, как и в предыдущем варианте расчетов, т.е. $a = 1,42$. Решение уравнения

$$b(1 - 0,42 \cdot 1,3 \cdot b^{0,42})^{-2,39} = 3,7$$

относительно параметра $b(0)$ дает значение $b(0) = 0,76$. Соответственно критическое значение эмиссии денежной базы составило $s_c = 2,67$, или 2,67 трлн. долл. Для указанных значений сравнительные результаты расчетов представлены в табл. 2.2.

Из приведенной таблицы видно, что, несмотря на существенные различия в исходных данных, основные характеристики модели довольно близки друг к другу. Так, сопоставление расчетов показывает нарастание предкризисных напряжений в системе мирового долга [20]. Эти напряжения вызваны, прежде всего, значительным падением уровня монетизации долга – с 0,55 до 0,35 – за период 2005–2007 гг., по которым проводились расчеты. Нарастание кризисных явлений выразилось в более чем двукратном росте вероятностей кризиса – до 29% в 2007 г. при 12% за 2005 г. Соответственно вероятность перколяции системы увеличилась с 21% в 2005 г. до 49% в 2007 г.; при этом существенно сократилось «время возврата» (до перколяции системы) – до двух, вместо почти пяти, лет.

Анализ данных, представленных в табл. 2.2, говорит о том, что заметное нарастание опасных изменений в системе глобального долга, если бы оно было своевременно обнаружено, не должно было остаться без внимания и принятия адекватных мер.

¹³ Special Report, 199, 2 July, 2009.

Таким образом, табл. 2.2 может считаться фрагментом системы «раннего предупреждения» кризисов, вполне в духе предложений МВФ [18]. За последнее время, особенно в связи с «незамеченностью» финансового кризиса 2007–2010 гг., интерес к возможностям создания таких систем, как отмечалось в первой части работы, существенно возрос.

Таблица 2.2.

**Сравнительные результаты расчетов индикаторов модели
по данным за 2005 и 2007 гг.**

	2005 г.	2007 г.
Фактическая эмиссия денег s , трлн. долл.	0,61	1,3
Фактическая эмиссия долга $b(s)$, трлн. долл.	1,1	3,7
Параметр $b(0)$, трлн. долл.	0,62	0,76
Критическая эмиссия денег s_c , трлн. долл.	2,91	2,67
Уровень монетизации долга $s/b(s)$	0,55	0,35
Априорная вероятность кризиса p	0,12	0,29
Условная вероятность перколяции s/s_c	0,21	0,49
Вероятность «выживания» $u = 1 - s/s_c$	0,79	0,51
Периодичность, или время до перколяции от соответствующего года $t = s_c/s$	4,8	2,05

В завершение данного раздела заметим, что объем критической эмиссии денег для 2007 г. (2,67 трлн. долл.) оказался весьма близким к объемам фактической эмиссии денег для декабря 2008 г. (2,34 трлн. долл.), полученным в разделе 3.2 по величинам TED-спреда для модели перколяции.

2.4. Скорость дивергенции стоимости долга в критической точке

Уравнение $B(s) = B(0)[1 - s/s_c]^{-\gamma}$ можно истолковать в вероятностном смысле, если полагать, что переменная s/s_c является вероятностью перколяции финансового рынка для фактической эмиссии денег в размере s . Тогда, по определению, величина $1 - s/s_c = u$ характеризует вероятность отсутствия перколяции, или «выживания» (survival) системы. С учетом сказанного уравнение (2.2.4) можно записать в виде

$$(2.4.1) \quad \frac{B(s)}{B(0)} = u^{-\gamma}.$$

С другой стороны, в точке, сколь угодно близкой к точке перколяции, функция $B(s)$ может быть разложена в ряд Тейлора с точностью до линейного члена разложения:

$$B(s) \cong B(s_c) - \frac{dB}{ds}(s_c)(s_c - s) = B(s_c) \left[1 - \frac{s_c}{B(s_c)} \frac{dB}{ds}(s_c) \left(1 - s \frac{s}{s_c} \right) \right] = B(s_c)(1 - \varepsilon u),$$

где $\varepsilon = -\frac{s_c}{B(s_c)} \frac{dB}{ds}(s_c)$ – эластичность стоимости долга по ликвидности¹⁴, и

$$(2.4.2) \quad \frac{B(s)}{B(0)} = 1 - \varepsilon u.$$

Приравнявая (2.4.1) и (2.4.2), получаем уравнение

$$(2.4.3) \quad u^{-\gamma} + \varepsilon u - 1 = 0.$$

Для известных вероятностей отсутствия перколяции это уравнение можно использовать, оценивая параметр эластичности, характеризующий чувствительность изменений стоимости долга в зависимости от объемов эмиссии ликвидности. Соответствующие результаты расчетов по уравнению (2.4.3) представлены в табл. 2.3 и на рис. 2.2.

Таблица 2.3.

Вероятности и эластичности перколяции

Вероятность перколяции, s/s_c	Вероятность «выживания», u	Эластичность, ε
0,2	0,8	0,88
0,8	0,2	229,2

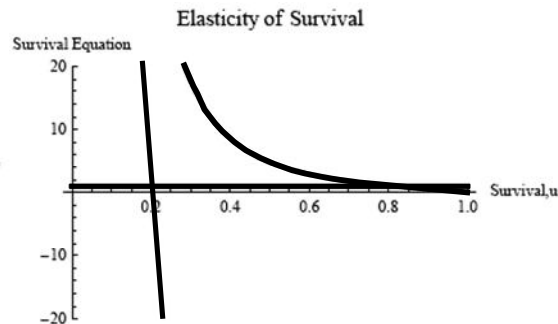


Рис. 2.2. Изменение эластичности стоимости долга

¹⁴ Разложение, для простоты, проводим в критической точке, что можно делать только для конечномерной системы, и пренебрегаем ошибкой из-за линейности разложения.

Приведенные данные показывают, что по мере приближения к критической точке скорость изменения стоимости долга стремительно возрастает. Это соответствует теоретическому выводу, приведенному в разделе 2.5 предыдущей части работы, и показывает, что остановить кризисные явления можно только заблаговременно, задолго до формирования перколяционного кластера. С другой стороны, если известны параметры уравнения (2.4.3), то оно может использоваться для оценки вероятностей перколяции рынка, что представляет несомненный практический интерес¹⁵. При этом следует иметь в виду, что в общем случае свободный член в уравнении (2.4.3) отличен от единицы.

3. Вероятностные характеристики модели кризиса

Исследование финансовых и экономических кризисов до самого последнего времени носило, как правило, описательный характер; известны несколько интересных и глубоких работ такого типа, например [13, 28]. Информация о кризисах фрагментирована, статистика кризисов неполна, коротка и не очень надежна [30]. Финансовый кризис, как неоднократно указывалось выше, — явление сложное и многопараметрическое. В общем виде понятие «кризис» не является операциональным, хотя известен ряд подходов, аппроксимирующих это сложное явление. В целом, как это не парадоксально, серьезные эмпирические исследования экономических и финансовых кризисов лишь только начинаются.

3.1. Простой вероятностный анализ кризисов

В порядке иллюстрации, не более, предлагаемых методов исследования, предположим, что можно идентифицировать некоторые события, попадающие по ряду признаков в разряд кризисов. Приведем следующую таблицу финансовых и экономических кризисов за последние сто лет, составленную, в основном, по данным работы [29]. Если общее число кризисов обозначить через m , а весь период наблюдений — t (лет), то частота (плотность вероятностей) появления события, называемого кризисом, за данный период будет равна

$$(3.1.1) \quad h = \frac{m}{t}.$$

Для нашей таблицы кризисов имеем: $m = 13$, $t = 100$, $h = 0,13$. Разделив на m правую часть выражения (3.1.1), получаем, что $\frac{1}{t/m} = h$, или $h \cdot TR = 1$, где TR — «время возврата», или средний интервал времени возникновения кризиса. Таблица кризисов 3.1 характеризует «время возврата» в 7,7 лет, или примерно семь лет и восемь месяцев.

¹⁵ Свободный член в уравнении (2.4.1) отличен в общем случае от единицы.

Таблица 3.1.

Финансовые кризисы за 1907–2007 гг.

Описание события	Годы
Банковская паника, США	1906–1907
Великая депрессия, страны мира	1929–1933
Финансовая рецессия, США	1980
«Классический» финансовый кризис, страны мира	1987
Кризис ипотечных финансов (S&L), США	1989–1990
Банковский кризис, страны Скандинавии	1991–1992
«Текила»-кризис, Мексика	1995–1996
Финансовый кризис, страны Юго-Восточной Азии	1997
Финансовый дефолт и банкротство LTCM, Россия, США	1998
Финансовый кризис и «рецессия роста», Япония	1990–2003
Долговой кризис, Аргентина	2001
Dotcom кризис, США	2002
Ипотечный и кредитный кризис, США, страны мира	2007–2010

Поскольку как банковская паника 1907 г., так и кризис «высокотехнологических компаний» 2002 г., сами по себе, вряд ли предопределили возникновение кредитного кризиса 2007 г., то в первом приближении допустимо предположить взаимную независимость финансовых кризисов. Если, кроме того, плотность распределения событий на временной оси, по крайней мере, за последние сто лет, одинакова, то вероятность осуществления кризиса за предстоящий год составляет

$$p = h\Delta t = 0,13,$$

где $h\Delta t = t$ и длина стандартного интервала времени Δt равна одному году.

Соответственно вероятность возникновения кризиса в течение предстоящих двух лет составит

$$P_2 = p^2 + 2p(1-p) = 2p - p^2 = 1 - (1 - 2p + p^2) = 1 - q^2,$$

где $q = 1 - h$ может трактоваться как вероятность отсутствия кризиса в предстоящем году. Для нашего примера $P_2 = 0,24$. Для произвольного числа лет вероятность возникновения кризиса может быть вычислена как $P_k = 1 - q^k$, но точность таких расчетов будет, разумеется, не очень велика в силу общности составленной модели явления.

Биномиальное и пуассоновское распределения кризисов. Согласно табл. 3.1, в предположении независимости вероятность тринадцати кризисов ($m = 13$) за сто лет

($n = 100$) может быть рассчитана непосредственно по формуле биномиального распределения:

$$(3.1.2) \quad P_{m,n} = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m},$$

что для $p = 0,13$ составляет 0,118. Дополнив условия независимости событий и их одинаковой плотности распределения на всем временном интервале требованием практической несовместности событий (пренебрежимо малой вероятности двух и более кризисов на коротком временном интервале сравнительно с вероятностью осуществления одного кризиса), рассматриваемый вероятностный процесс можно считать пуассоновским, зависящим от параметра ht .

Пуассоновский процесс – дискретный, и его часто называют «законом редких событий». Действительно, согласно табл. 3.1, кризисы, хотя и происходят аperiodически, но не часто, примерно один раз за восемь лет, а потому плотность вероятностей осуществления кризисов для гипотезы Пуассона имеет порядок небольшой, примерно на уровне 0,1. Так, для пуассоновского процесса вероятность осуществления 13 кризисов за последние сто лет составляет $\Pr[k = 13, 13] = \frac{13^{13} \exp[-13]}{13!} = 0,11$, что весьма

близко к эмпирически найденной плотности вероятностей $h = 0,13$. Отличие от биномиальной вероятности вызвано тем, что закон Пуассона является предельным для биномиального распределения, т.е. предполагается, что он реализуется для бесконечно большого числа наблюдений.

Большой практический интерес представляет расчет вероятности события, состоящего в отсутствии кризиса в течение одного (предстоящего) года, часто называемой вероятностью «выживания» (survival) системы:

$$(3.1.3) \quad S \equiv \Pr[k = 0, (ht)] = \frac{(ht)^0 \exp(-ht)}{0!} = \exp(-ht).$$

Для нашего иллюстративного расчета вероятность отсутствия кризиса в предстоящем году составляет $\exp[-0,13 \times 1] = 0,878$. Соответственно вероятность того, что в течение одного года произойдет хотя бы один кризис, равна $1 - S = 1 - \exp(-ht)$. Для табл. 3.1 вероятность (хотя бы) одного кризиса в течение предстоящего года составляет $1 - S = 0,122$, что весьма близко к расчетной плотности вероятностей кризиса $h = 0,13$. Функция пуассоновского распределения кризисов представлена на рис. 3.1.

Эмпирическая информация об экстремальных финансовых событиях, а кризисы, несомненно, являются таковыми, явно недостаточна для того, чтобы делать статистически надежные выводы о частоте и времени их появления [33]. Эксперименты с моделями перколяции, если полагать появление перколяционного кластера соответствующим началу финансового кризиса, позволяют обойти это ограничение.

Имитация предложенной модели на протяжении порядка 10^3 циклов показала, что появление перколяционных кластеров происходит в течение квазипериодических интервалов времени. Подобная аperiodичность вполне естественна, поскольку процедура выбора занятых ячеек и формирования кластеров носит случайный харак-

тер. Однако для того, чтобы распределение кризисов во времени (1 цикл = 1 год) соответствовало распределению Пуассона, появление кризисов (перколяционных кластеров) должно быть чисто случайным и независимым, происходить с весьма малой вероятностью и одинаковой средней плотностью, причем соответствовать условию $\langle T \rangle = \sigma_T^2$. Эти условия в совокупности, как показывают эксперименты, являются слишком жесткими даже для модели, не говоря о реальной действительности. В частности, модель перколяции основана, как говорилось выше, на последовательном увеличении объемов ликвидности и измерении реакции системы, т.е. поведения инвесторов, формирования кластеров и роста стоимости активов. Понятно, что кризис не может наступать при малых значениях избыточной ликвидности, соответственно, «восстановление» нормальной монетизации долга не может непосредственно предшествовать кризису. Однако подобные, экономически невозможные, события вполне согласуются с гипотезой пуассоновского процесса, который носит чисто случайный характер, а потому «в чистом виде» вряд ли приемлем для моделирования финансового рынка.

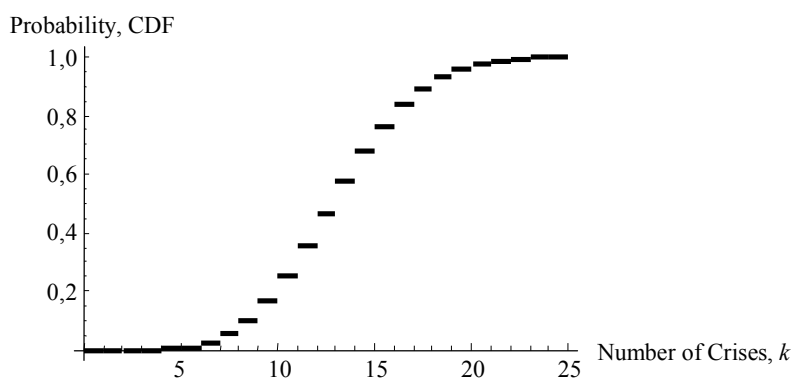


Рис. 3.1. Пуассоновское распределение кризисов

Экспоненциальная гипотеза распределения времени кризисов. По мнению многих экспертов, последний кризис ликвидности имел место в 1998 г. после российского дефолта и краха хедж-фонда LTCM¹⁶. Следовательно, финансовые кризисы достаточно далеко разнесены во времени, что позволяет считать их независимыми друг от друга. Из эмпирических соображений следует также, что вероятность кризиса на длинном временном интервале выше, чем на коротком, а ранний кризис более ве-

¹⁶ Long Term Capital Management, LTCM – крупный хедж-фонд, в котором участвовали два нобелевских лауреата по финансам. Фонд имел крупный пакет производных по российскому долгу инструментов, которые обесценились после августовского дефолта 1998 г., что поставило LTCM на грань разорения. При активном участии ФРС, которая стремилась избежать масштабной катастрофы, фонд был продан консорциуму частных финансовых организаций. Предотвращение последствий краха LTCM – первый случай вмешательства государства в попытке спасения финансового игрока, «слишком большого для того, чтобы разориться» (too big to fail). В период кредитного кризиса 2007–2010 гг. подобные действия стали политикой центрального банка и правительства США.

роятен, чем коллапс системы, отдаленный во времени. Сказанное позволяет трактовать длительность промежутка времени между очередными кризисами как случайную величину T , имеющую экспоненциальное распределение вероятностей. Непрерывное экспоненциальное распределение времени осуществления очередного кризиса тесно связано с дискретным пуассоновским процессом распределения кризисов и имеет функцию распределения следующего вида:

$$(3.1.4) \quad P(t) \equiv \Pr[T \leq t] = \int_0^t p(z) dz = 1 - \exp(-ht).$$

Функция плотности для экспоненциального распределения дается выражением

$$(3.1.5) \quad p(t) = \begin{cases} h \exp(-ht), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

где h – условная вероятность (hazard rate) наступления кризиса ликвидности,

$$(3.1.6) \quad h = \frac{1}{1 - P(t)} \frac{dP}{dt}.$$

Соответствующее пуассоновским событиям время осуществления события (кризиса) распределено экспоненциально и обладает свойством отсутствия памяти. Однако компьютерные эксперименты, строго говоря, псевдослучайны, следовательно, следы памяти присутствуют. Эмпирические исследования поведения инвесторов, как правило, подтверждают наличие памяти как следование трендам или дрейфам, что превращает гипотезу экспоненциального распределения в элемент более общей системы.

3.2. Степенной закон и перколяция глобального долга

Вернемся к вопросу о прогнозе возможных сроков наступления кризиса ликвидности (дефолта системы) и объемов глобальной задолженности на этот момент. В модели перколяции, рассмотренной в предыдущем разделе работы, глобальная задолженность определялась через объем денежной базы, которая в реальных условиях может изменяться из-за потребностей рынков товаров и услуг. Поэтому расчет критического объема долга «напрямую» представляет несомненный практический интерес.

Напомним, что согласно модели перколяции величина кластеров покупателей долга определяет стоимость глобальной задолженности, а в окрестности критической точки объем долга является случайной величиной, имеющей степенное распределение вероятностей состояний. Примем, что объем глобального внутреннего долга B – случайная величина, которая на момент перколяции (глобального кризиса) t равна

$$(3.2.1) \quad B = B(0) \exp[rt],$$

где r – непрерывно начисляемый темп изменения глобального внутреннего долга¹⁷, а T – случайный временной отрезок между очередными кризисами, распределенный

¹⁷ Глобальный внутренний долг – не однородная величина, а сложная композиция различных долгов частных корпораций и государств. Поэтому данный подход неявно использует

экспоненциально. Согласно данным 79-го ежегодного отчета Базельского банка, приведенным в табл. 2.1, из соотношения $\exp(r \cdot 3) = \frac{59,7}{49,7}$ непрерывно начисляемый за последние три года темп прироста глобального внутреннего долга r составляет 0,061, или примерно 6% за год.

Известно [35], что величина, изменяющаяся экспоненциально во времени, в нашей модели – стоимость глобального долга, $b = b(0)\exp(rt)$, и имеющая экспоненциальное распределение вероятностей времени состояний $P(t) = \Pr[T \leq t] = 1 - \exp(-ht)$, следует степенному закону, или распределению Парето, с плотностью вероятностей

$$(3.2.2) \quad p(b) = p(t) \left| \frac{dt}{db} \right|.$$

Плотность распределения глобального долга вычисляется достаточно просто и равна $p(b) = \frac{a-1}{b(0)} \left(\frac{b}{b(0)} \right)^{-a}$, откуда

$$(3.2.3) \quad P(b) = \Pr[B \leq b] = 1 - \int_b^\infty p(b') db = 1 - \left(\frac{b}{b(0)} \right)^{-\beta} \text{ и}$$

$$(3.2.4) \quad u = \Pr[B > b] = \left(\frac{b}{b(0)} \right)^{-\beta},$$

где $a = \beta + 1$; $\beta = \frac{h}{r}$. Параметр β является параметром Парето соответствующего распределения (не смешивать с параметром порядка в моделях перколяции, который традиционно обозначается таким же символом); h – условная вероятность перколяции; $b(0)$ – минимальное значение глобального долга для степенного распределения (3.2.3).

Как говорилось выше, кризис ликвидности можно идентифицировать, если существуют некоторые содержательные представления о характеристиках дефолта системы. Как таковое, степенное распределение их не содержит, но модель перколяции дает значения инвариантных констант, которые могут быть использованы для оценки размера глобального долга на момент дефолта. Эти вероятности и соответствующие им временные характеристики помогают практически определить степень опасности

предпосылку о существовании единичной корреляции между дефолтами различных частных и суверенных долгов. Такое предположение, разумеется, малореалистично, но принципиально упрощает финансовую систему, позволяя рассматривать ее как единое целое. Для окрестности критической точки, где система подобна своему элементу, данное допущение методологически может быть принято, по крайней мере, в первом приближении. Дальнейшие исследования в этом направлении могут использовать хорошо развитые подходы прогнозирования дефолтов в системе взаимосвязанных долгов.

долгового пузыря, не формулируя в явном виде критерий, согласно которому «здоровый» рост стоимости долговых активов можно отличать от гипертрофированного¹⁸.

Из сопоставления (2.4.1) и (3.2.4) находим, что параметр Парето – это обратная величина к инвариантной константе перколяции γ :

$$(3.2.5) \quad \beta = \frac{1}{\gamma}.$$

Параметры «корреляционной» перколяции. Использование величины $\gamma = 2,39$ для «классической» перколяции дает очень низкое значение параметра Парето, $\beta = 0,42$. Между тем, как отмечалось в предыдущей части работы, большинство финансовых индикаторов имеют этот показатель, равный примерно трем (кубический закон) [32]. По нашему мнению, низкое значение параметра Парето является следствием того, что система перколяции не имеет памяти и в этом смысле подобна чисто случайному процессу, что напоминает расчет параметра Парето для «рационального пузыря», приведенный в первой части работы. Однако эмпирический финансовый рынок не является чисто случайным процессом [31]. Люди помнят, по крайней мере, недавнее прошлое и делают по возможности выводы на основе полученного опыта. Поведение, известное под термином «herding», отражает эффекты подражания успешным действиям, следовательно, содержит следы памяти, корреляции во времени и инерции¹⁹ [11, 49]. Учет подобных факторов характеризует большое направление исследований, известное как «коррелированная перколяция». Разработка и экономическое содержание модели коррелированной перколяции (и ее разновидностей) – особая тема, которая в данной работе не рассматривается. В приведенных ниже расчетах используется лишь то обстоятельство, что фактор коррелированности поведения инвесторов изменяет значения инвариантных констант [12, 35, 37, 41, 42], которые для модели финансового рынка приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2.

Параметры случайной и коррелированной перколяции

	Случайный процесс	Коррелированный процесс
σ	0,397	2,0
γ	2,39	0,475
Параметр Парето, β	0,42	2,105

Использование константы $\gamma_{corr} = 0,475$ соответствует значению параметра Парето $\beta_{corr} = 2,105$, которое может считаться вполне реалистическим значением этой характеристики. Для этого значения параметра Парето и темпа прироста долга $r = 0,065$ находим по формуле (3.2.5) величину условной вероятности перколяции

¹⁸ Актуальность исследований в этом направлении отмечена, например, лондонским «Экономистом» (Economist.com, April 26th, 2008).

¹⁹ Существует распространенное мнение о том, что финансовый кризис 1987 г. произошел из-за того, что поколение трейдеров, помнивших крах 1929 г., ушло, а новые поколения не действовали столь же осторожно, как их предшественники.

$$h = 2,105 \cdot 0,065 = 0,12,$$

которая оказывается весьма близкой к значению этого параметра, найденному по табл. 3.1. Соответственно вероятность кризиса через год составляет для экспоненциального распределения $P(t) = 0,12$, а вероятность отсутствия кризиса (перколяции) равна $u(t) = 0,88$. Эти величины весьма близки к результатам, полученным выше для биномиального и пуассоновского распределений.

Для вероятностной модели, имеющей распределение Парето, характеристики долгового рынка становятся намного реалистичнее. Модель степенного распределения глобального долга (3.2.3) с константами коррелированной перколяции и $b(0) = 56,7$ трлн. долл. (мировой долг за 2007 г.) определяют вероятность кризиса в 2008 г. величиной 0,897, или почти в 90%. Практическая достоверность данного события вполне согласуется с действительностью, если вспомнить коллапс мировых кредитных рынков в конце 2008 г.

Спред доходностей. Реалистичность гипотезы степенного распределения подтверждается и расчетом, использующим эмпирическую величину спреда доходностей долговых инструментов. Известно, что распространенная мера рискованности рынка денег – TED-spread – рассчитывается как разность ставок LIBOR по негарантированным кредитам и доходности 3-месячных казначейских векселей США [9, 14]. Это – очень чувствительная характеристика рынка, мгновенно реагирующая на самые различные события. Например, получившие широкую известность трудности «Goldman Sachs» в апреле 2010 г. немедленно отразились в росте спредов по долгам этого, по общему мнению, самого успешного банка.

В декабре 2008 г. TED-spread достиг огромного значения – 0,0656, или почти 6,6 процентных пункта, что свидетельствовало о том, что рынок кредитов практически перестал функционировать [10]. Аналог этого спреда для модели перколяции финансового рынка можно представить как логарифм отношения кластерной массы $G(p)$ к среднему размеру кластеров $\langle b \rangle$ в окрестности критической точки:

$$(3.2.6) \quad \log \frac{G(p)}{\langle b \rangle} = - \left(\frac{1}{\sigma_{corr}} - \gamma_{corr} \right) \log(p - p_c); \text{ для } p < p_c.$$

Для априорной вероятности $p = 0,519$ это дает объем мировой ликвидности в 2,34 трлн. долл.: $s = \frac{0,519 \cdot 2,67}{0,592} = 2,34$.

Денежная эмиссия в таких размерах определяет перколяцию глобального финансового рынка для декабря 2008 г. как практически достоверное событие, вероятность которого весьма близка к только что рассчитанному его значению для распределения Парето. Оно происходит с вероятностью $\frac{s}{s_c} = 0,88$, или 88%, при весьма ма-

лой вероятности «выживания» системы: $u = 1 - \frac{s}{s_c} = 0,12$.

Для гипотезы степенного распределения интерес представляют две ситуации развития событий, которые уточняют результаты [6]. Во-первых, на отметке при-

мерно в 56 трлн. долл. шансы осуществления, либо отсутствия, кризиса глобальной системы долга уравниваются и составляют 50:50. Это важное состояние системы находится из решения уравнения $P(b) = u(b)$, или

$$(3.2.7) \quad 1 - \left(\frac{b}{b(0)} \right)^{-\beta} = \left(\frac{b}{b(0)} \right)^{-\beta},$$

Графики функций перколяции и «выживания» системы глобального долга для $b(0) = 40$ трлн. долл. приведены на рис. 3.2.

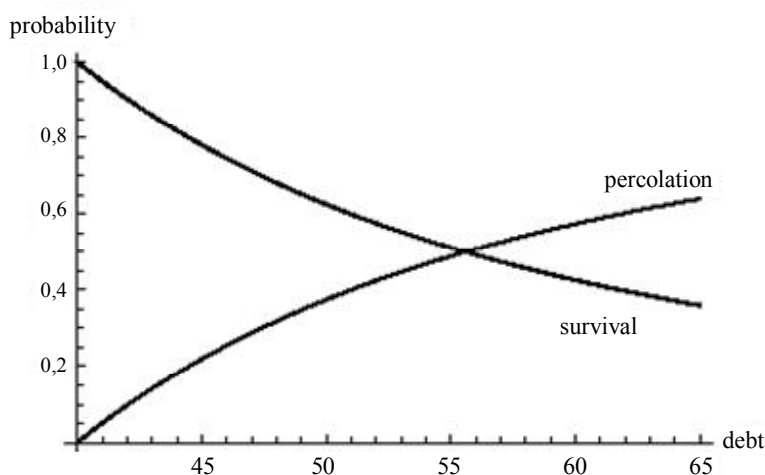


Рис. 3.2. Вероятности перколяции и «выживания» для глобального долга

Во-вторых, если полагать, что степенное распределение с данными параметрами существует в окрестности точки перколяции, то из уравнения

$$(3.2.8) \quad 0,59274 = 1 - \left(\frac{b}{40} \right)^{-2,105}$$

следует, что при значениях глобального внутреннего долга, близких к 61 трлн. долл., система претерпевает качественную перестройку. «Точность» результата, разумеется, эфемерна, — скорее это сигнал о попадании системы в зону быстрого и неуправляемого роста задолженности, о которой шла речь в разделе 2.4.

Наконец, подставляя величины $b_t = 61,29$ и $r = 0,061$ в уравнение (3.2.1), $61,29 = 56,7 \exp(0,061t)$, можно восстановить период времени, оставшийся до глобального кризиса. Считая от 2007 г., это время составляет 1,3 года, что практически совпадает с фактическим коллапсом глобальных кредитных рынков в октябре-декабре 2008 г. Отметим, что для гипотезы простого экспоненциального распределения (3.1.4) ожидаемое время глобального кризиса, $\langle T \rangle = 1/h \cong 8$ лет, представляется чрезмерно оптимистичным и вряд ли может служить приемлемым ориентиром.

Заключение

Мировой кризис переходит в третью стадию или фазу. Первая фаза – это обрушение различных сегментов рынка кредитов, а затем фондового рынка. На второй стадии отсутствие кредитов реальному сектору, равно как и инерция череды финансовых провалов, привели к сокращению мирового спроса, падению производства и огромному росту безработицы. Практически полный коллапс финансовых рынков был предотвращен гигантскими инъекциями денег и капитала со стороны центральных банков и правительств, что привело к медленному и неуверенному восстановлению экономики в 2009–2010 гг. Однако чудес не бывает, и только барон Мюнхгаузен мог себя самого вытащить за волосы. Беспрецедентная накачка в экономику государственного капитала привела к огромному росту денежной массы и задолженности, в основном стран, развитых в экономическом отношении. Неизбежный рост, абсолютный и относительный, государственного долга, а также, пусть с лагом в несколько лет, тенденция увеличения цен означают переход глобального кризиса в третью, долговую, фазу.

По долгам надо платить, и в конечном счете государства это могут сделать только одним способом – увеличив налоги и разного рода сборы, – перекладывая тем самым тяжесть выплат на население и бизнес. Долговой кризис в Греции, огромные трудности с финансированием разбухшего бюджетного дефицита в Португалии, Испании, Ирландии и даже Великобритании, несмотря на большие различия в деталях, имеют общую основу – необходимость выплаты огромных долгов, которая будет растянута на многие поколения. Это требует глубокой структурной перестройки экономики, поскольку рост экономики, доселе подпитываемой непогашенными долгами, сменяется на развитие, обусловленное погашением долгов.

Сейчас все более очевидно, что за эксцессы финансовой верхушки, которую в мире именуют собирательным термином «Уолл-стрит», расплачиваются и будут расплачиваться поколения простых людей. Однако модель социального партнерства, в которой всегда выигрывает только одна сторона, по вполне понятным причинам, энтузиазма не вызывает. Наиболее дальновидные представители мировой «элиты» отчетливо понимают непривлекательность и неприемлемость модели, суть которой сводится к тому, что «орел означает наш выигрыш, а решка – ваш проигрыш»²⁰. Неопределенность в отношении возможностей роста в условиях выплаты гигантской задолженности ставит вопрос о перестройке экономической и социальной модели современного общества, которая предотвращала бы развитие событий в негативном направлении.

В свете «столь захватывающих» перспектив профилактика социальной болезни, а финансы – важная часть социальной активности, действительно, выглядит намного дешевле. Финансовые и экономические невзгоды коренятся в бесконтрольном раздувании финансового пузыря. Условия, порождающие массовое иррациональное поведение финансовых инвесторов, необходимо решительно изменить, даже ценой отказа от быстрого, но неустойчивого и чреватого провалами экономического развития. Осознание необходимости глубоких реформ мировых финансовых рынков, равно как и движение в этом направлении, налицо [16]. Но насколько глубокими и целост-

²⁰ Американский вариант выражен весьма кратко: «Heads we win, tails you lose». В порядке обсуждения этой модели газета «Файненшл Таймс» разослала своим подписчикам обширный материал, содержащий радикальный пересмотр основ корпоративного управления [17].

ными окажутся такие реформы на практике и когда они будут реализованы, окутано пеленой неопределенности. Хотелось бы, чтобы на этот раз «мужик перекрестился» до того, «как грянет гром».

* *

*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гавриленков Е., Струченевский А. Экономика России. М.: Тройка-Диалог, 2003. Сентябрь.
2. Пименова И.В. Перколяционная модель финансового рынка и кризисы ликвидности: Бакалаврская работа. М.: ГУ ВШЭ, 2010.
3. Смирнов А.Д. Внешний долг и хаос: модель российского опыта конца 90-х годов. Доклад на 5-ой Международной конференции «Модернизация экономики России». М., 2004.
4. Смирнов А.Д. Монетизация государственного долга. М.: ГУ ВШЭ, 2005.
5. Смирнов А.Д. Монетизация глобального долга: погашение или кризис // Экономический журнал ВШЭ. 2007. Т. 11. № 4.
6. Смирнов А.Д. Кредитный кризис и перколяция финансового рынка // Вопросы экономики. 2008. № 10.
7. Akerlof G., Shiller R. Animal Spirits, etc. Princeton: Princeton University Press, 2009.
8. Bank for International Settlement. 79th Annual Report. Basel, 2009.
9. Blake D. Financial Market Analysis. L.: McGraw Hill Book Company, 2000.
10. Bloomberg. 2009. September 16.
11. Bunde A., Havlin S. Fractal Geometry: A Brief Introduction to «Encyclopedia of Complexity and Systems Science». Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.
12. Chaves C., Koiller B. Universality, Thresholds and Critical Exponents in Correlated Percolation // Physica A. 1995. 218. P. 271–278.
13. Cooper G. The Origin of Financial Crises: Central Banks, Credit Bubbles and the Efficient Market Fallacy. L.: Harriman House, 2008.
14. Cuthbertson K., Nitzsche D. Financial Engineering. Derivatives and Risk Management. Chichester, Sussex, England: John Wiley & Sons, 2002.
15. Dixit A., Pindyck R. Investment under Uncertainty. Princeton University Press, 1994.
16. The Economist (June 3d, 2010) Time for a Rent Cut. L., 2010.
17. The Financial Times. A Need to Reconnect. 2009. March 12. L., 2009.
18. Ghosh A., Ostry J., Tamirisa N. Anticipating the Next Crisis // Finance and Development. 2009. September. Washington.
19. Gould H., Tobochnik J., Christian W. An Introduction to Computer Simulation Methods: Application to Physical Systems, 3rd ed. Addison-Wesley, Reading, MA, 2006.
20. Global Financial Stability Report. Washington: IMF, October 2009.
21. Greenlaw D., Hatzius J., Kashyap A., Shin H.S. Leveraged Losses: Lessons from the Mortgage Market Meltdown. US Monetary Policy Forum Conference. February, 2008.
22. Hayford M., Malliaris A.G. Monetary Policy and the U.S. Stock Market // Economic Enquiry. 2004. Vol. 42. № 3. P. 387–401.
23. Hsieh D. Chaos and Nonlinear Dynamics // The Journal of Finance. 1991. Vol. 16. № 5.
24. International Banking and Financial Markets Development. BIS Quarterly Review. Basel, December 2008.
25. Kasapis A. Mastering Credit Derivatives. 2nd ed. L.: Prentice Hall, 2008.

26. *Kesten H.* What Is Percolation // Notices to AMS. 2006. Vol. 53. № 5.
27. *Keynes J.M.* The General Theory of Employment, Interest and Money. N.Y.: Harcourt-Brace, 1936.
28. *Kindleberger C.P.* Manias, Panics and Crashes: A History of Financial Crises. N.Y.: J. Wiley, 2000.
29. *Krugman P.* The Return of Depression Economics. L.: Penguin Books, 2008.
30. *Lauven L., Valencia F.* Systemic Banking Crises: A New Database: IMF Working Papers, WP/08/224. 2008.
31. *Lillo F., Farmer J.D.* The Long Memory of the Efficient Market // Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics. 2004. Vol. 8. Iss. 3. Berkeley Electronic Press. (www/bepress.com/snede)
32. *Lux T.* Financial Power Laws: Empirical Evidence, Models, and Mechanism // Power Laws in Social Sciences / C. Cioffi (ed.) Cambridge University Press, 2006.
33. *Mantegna R., Stanley H.E.* An Introduction to Econophysics. Cambridge University Press, 2000.
34. *Newman M.J.E.* Power Laws, Pareto Distributions and Zipf's Law. arXiv: cond-math/0412004 v3 29 May 2006.
35. *Newman W.I., Turkotte D.L.* A Simple Model for the Earthquake Cycle Combining Self-organized Complexity with Critical Point Behavior // Nonlinear Processes in Geophysics. 2002. 9. P. 453–461.
36. *Sahimi M.* Percolation Phase Transition // Encyclopedia of Complexity and Systems Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.
37. *Sahimi M.* Long Range Correlated Percolation and Flow and Transport in Heterogeneous Porous Media // Journal of Physics. France. 1994. Vol. 4. P. 1263–1268.
38. *Sauer T. et al.* Chaos: An Introduction to Dynamic Systems. N.Y.: Springer Verlag, 1996.
39. *Shiller R.* Irrational Exuberance. Princeton: Princeton University Press, 2000.
40. *Simon H.* Bounded Rationality and Organizational Learning // Organization Science. 1991. 2(1). P. 125–134.
41. *Sornette D., Sammis C.* Positive Feedback, Memory, and the Predictability of Earthquakes // PNAS. 2002. Vol. 99. Suppl. 1. P. 2501–2508.
42. *Spyratos V., Bourgeron P., Ghil M.* Development at the Wildland-urban Interface and the Mitigation of Forest Fire Risk // PNAS. 2007. Vol. 104. № 36.
43. *Stanley H.E., Gopikrishnan P., Plerou V., Salinger M.A.* Patterns and Correlations in Economic Phenomena Uncovered Using Concepts of Statistical Physics // Lecture Notes in Physics (Series). Vol. 621. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003.
44. *Stauffer D.* Classical Percolation // Lecture Notes in Physics (Series). Vol. 762. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.
45. *Stauffer D.* Percolation Models of Financial Market Dynamics // Schweitzer F. (ed.) Modeling Complexity in Economic and Social Systems. River Edge: World Scientific, 2001.
46. *Strogatz S.* Nonlinear Dynamics and Chaos. N.Y.: Addison Wesley, 1994.
47. *Szekely G., Richards D.* The St. Petersburg Paradox and the Crash of High-tech Stocks in 2000 // The American Statistician. 2004. Vol. 58. № 3.
48. Wikipedia, the free encyclopedia. Collateralized Debt Obligations. 2010.
49. *Zaliapin I., Wong H., Gabriellov A.* Hierarchical Aggregation in Percolation Model // Tectonophysics. 2006. № 413. P. 93–107.