

Об оценке процентных финансовых инструментов путем численного решения уравнений срочной структуры

Макуев Н.Р., Шведов А.С.

В простейшем случае уравнение срочной структуры для цены дериватива $u(x, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xu,$$

где x – краткосрочная процентная ставка. Уравнением конвекции называется уравнение с такой же левой частью, как и у приведенного уравнения, и с нулевой правой частью. При численном решении уравнения срочной структуры разностными методами аппроксимация производной $\partial u / \partial x$ центральными разностями стала широко распространенным приемом. Однако хорошо известно, что при построении разностных схем для уравнения конвекции при аппроксимации производной $\partial u / \partial x$ нельзя использовать центральные разности, так как необходимо учитывать направление характеристик этого уравнения. То есть разностная схема в той или иной степени должна обладать свойством противоточности. В настоящей работе для уравнения срочной структуры сравниваются разностная схема с центральными разностями и другая разностная схема, называемая смешанной, которая охватывает и случай доминирующей конвекции. Приводится пример расчета, когда точность смешанной разностной схемы более чем в десять раз выше, чем у разностной схемы с центральными разностями.

Ключевые слова: стохастическая процентная ставка; уравнение срочной структуры; метод конечных разностей.

1. Введение

Задача оценки процентных деривативов является одной из центральных в финансовой экономике и финансовой математике. Как и для деривативов, связанных

Макуев Н.Р. – аспирант кафедры математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. E-mail: makuev@gmail.com

Шведов А.С. – д. физ.-мат. н., профессор кафедры математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. E-mail: ashvedov@hse.ru

Статья поступила в Редакцию в мае 2011 г.

с акциями, индексами, обменными курсами, в теории оценки процентных деривативов значительное место отводится решению начально-краевых задач для уравнений с частными производными. Однако решить такую начально-краевую задачу аналитически удается лишь в немногих редких случаях. Обычно используются численные методы, в основном, разностные схемы.

Разностная схема второго порядка точности для линейного уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mu > 0,$$

предложенная в работе [7], давно стала общепризнанной. Разностная схема второго порядка для линейного уравнения конвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -\infty < c < \infty,$$

обладающая свойством противоточности, предложенная в работах [1; 11], также хорошо известна. Существенной особенностью данной разностной схемы (как и других разностных схем для уравнения конвекции) является недопустимость использования центральных разностей для аппроксимации производной $\partial u / \partial x$, поскольку характеристики уравнения конвекции имеют различное направление при $c > 0$ и при $c < 0$, и это необходимо учитывать при построении разностных схем.

Соединяя принципы, использованные при построении этих разностных схем, в работах [3; 5] для линейного уравнения конвекции-диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

построена разностная схема второго порядка точности, названная смешанной. При стремлении коэффициента c к нулю смешанная разностная схема переходит в разностную схему из работы [7] для уравнения диффузии. При стремлении коэффициента μ к нулю смешанная разностная схема переходит в разностную схему для конвекции, близкую по своим свойствам к разностной схеме из работ [1; 11] (подробнее см. [3; 5]).

Уравнение срочной структуры для цены дериватива

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xu,$$

где x – краткосрочная процентная ставка, содержит и конвективный член, и диффузионный член. Численное решение начально-краевых задач для уравнения срочной структуры – один из основных существующих подходов к оценке процентных деривативов (см., например, [10]). Наиболее простой подход, когда для аппроксимации производной $\partial u / \partial x$ в уравнении срочной структуры используются центральные разности, стал широко распространенным (см., например, [8; 9]).

Но можно использовать для аппроксимации $\partial u / \partial x$ и более тонкие методы. Стандартные приемы вычислительной математики позволяют перенести на уравнение срочной структуры смешанную разностную схему, разработанную для линейного уравнения конвекции-диффузии с постоянными коэффициентами. В настоящей работе приводится пример расчета, где такой прием увеличивает точность результата более чем в десять раз по сравнению с аппроксимацией $\partial u / \partial x$ центральными разностями. Существуют и другие разностные схемы для уравнения конвекции-диффузии, но смешанная разностная схема обладает определенными теоретическими достоинствами (подробнее см. [5]).

В разделе 2 данной работы рассматривается уравнение срочной структуры, отвечающее классической (не обобщенной) модели Кокса – Ингерсолла – Росса. Приводится аналитическое решение этого уравнения для цены бескупонной облигации, также принадлежащее авторам данной модели. В разделе 3 строится разностная схема, для чего уравнение срочной структуры записывается в потоковой форме. Хотя такой прием хорошо знаком в математической физике, нам не известно, чтобы он применялся для уравнения срочной структуры. Раздел 4 содержит результаты расчетов.

2. Уравнение срочной структуры

В модели Кокса – Ингерсолла – Росса [6] динамика краткосрочной процентной ставки x задается соотношением

$$dx = (\alpha - \eta x)dt + \sigma\sqrt{x}dz_t,$$

где α , η , σ – положительные константы; z_t – стандартное броуновское движение.

В однофакторных моделях считается, что цена процентного дериватива зависит лишь от x и t . Более сложные, многофакторные модели в настоящей работе не рассматриваются.

Пусть $[0, T]$ – промежуток времени, в течение которого дериватив существует. В дальнейшем удобнее через t обозначить время, оставшееся до момента T . Тогда уравнение для цены процентного дериватива $u(x, t)$ имеет вид

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (\beta x - \alpha) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma^2}{2} x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x u.$$

Вывод уравнения срочной структуры при достаточно общей форме динамики краткосрочной ставки дается, например, в работе [4, параграф 6]. Конкретно для модели Кокса – Ингерсолла – Росса о связи коэффициентов β и η см., например, [12].

Уравнение (1) используется для расчетов безарбитражных цен различных процентных деривативов. В данной работе мы ограничимся случаем, когда в качестве дериватива рассматривается бескупонная облигация. Тогда начальное условие для уравнения (1) может быть записано в виде

$$(2) \quad u(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x < \infty.$$

В классической модели Кокса – Ингерсолла – Росса хорошо известно следующее решение для задачи (1), (2):

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= A(t) e^{-B(t)x}, \\
 A(t) &= \left(\frac{U(t)}{V(t)} \right)^{2\alpha/\sigma^2}, \\
 B(t) &= \frac{W(t)}{V(t)}, \\
 U(t) &= 2\gamma e^{(\beta+\gamma)t/2}, \\
 V(t) &= 2\gamma + (\beta + \gamma)(e^{\gamma t} - 1), \\
 W(t) &= 2(e^{\gamma t} - 1), \\
 \gamma &= \sqrt{\beta^2 + 2\sigma^2}.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Единственный не совсем тривиальный момент в проверке того, что функция, заданная выражением (3), является решением задачи (1), (2), – это использование выражения для производной

$$A'(t) = \frac{2\alpha}{\sigma^2} A(t) \frac{U'(t)V(t) - V'(t)U(t)}{U(t)V(t)}.$$

Ясно, что если дополнить задачу (1), (2) краевым условием $u(0, t) = A(t)$, то (3) будет решением и этой начально-краевой задачи. Однако (3) – не единственное решение задачи (1), (2). Пример другого решения задачи (1), (2) дается в [12].

Целью настоящей работы является изучение вопроса об аппроксимации конвективного члена $(\beta x - \alpha) \partial u / \partial x$ при построении разностной схемы для уравнения (1), и в качестве тестового решения нами используется решение (3). Однако и в такой упрощенной постановке следует обратить внимание еще на одну особенность задачи. Коэффициент диффузного члена $\sigma^2 x / 2$ в уравнении (1) стремится к нулю при x , стремящемся к нулю. Подробнее об этом говорится в следующем разделе.

3. Разностные схемы для уравнения срочной структуры

Уравнение (1) запишем в потоковой форме

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (c(x)u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x)u,$$

где

$$\mu(x) = \frac{\sigma^2}{2} x, \quad c(x) = \beta x - \alpha + \frac{\sigma^2}{2}, \quad f(x) = -x + \beta.$$

Будем считать, что $0 \leq x \leq x_{max}$. Значение x_{max} обычно выбирается исходя из существующего уровня процентных ставок. В области $[0, x_{max}] \times [0, T]$ рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (4). Начальное условие при $0 \leq x \leq x_{max}$ дается формулой (2), и в соответствии с (3)

$$u(0, t) = A(t), \quad u(x_{max}, t) = A(t)e^{-B(t)x_{max}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Приводимый ниже метод численного решения данной краевой задачи теоретически обоснован лишь при выполнении условия, что при $0 \leq x \leq x_{max}$

$$0 < \mu_1 < \mu(x) < \mu_2,$$

где μ_1 и μ_2 – некоторые константы (см., например, [2, гл. 7]). Для уравнения (4), где $\mu(x) = \sigma^2 x/2$, это условие не выполняется. Но в вычислительной математике нередки случаи, когда важная для приложений краевая задача оказывается более общего вида, чем те аналогичные задачи, для которых существуют алгоритмы численного решения, безупречно обоснованные с теоретической точки зрения. Тогда на первый план выходят вычислительный опыт и проверка сходимости численного решения при измельчении сетки. При численном решении приведенной краевой задачи для уравнения (4) мы также контролируем скорость сходимости к аналитическому решению (3).

Выберем шаги $h > 0$ и $\tau > 0$ по переменным x и t соответственно так, что x_{max}/h и T/τ – целые числа. Через u_j^n обозначим численное решение в точке (x_j, t_n) , где $x_j = jh$, $t_n = n\tau$. Будем использовать обозначения: $x_{j-1/2} = x_j - \frac{1}{2}h$, $x_{j+1/2} = x_j + \frac{1}{2}h$. Всегда считаем выполненным следующее ограничение на временной шаг τ :

$$\frac{\tau}{h} \max_j |c(x_{j-1/2})| \leq 1,$$

где $j = 1, \dots, x_{max}/h$. Положим

$$\lambda(x, t) = \mu(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - c(x)u(x, t)$$

и проинтегрируем уравнение (4) по прямоугольнику $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$. Воспользовавшись формулой Ньютона – Лейбница, получаем

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\lambda(x_{j+1/2}, t) - \lambda(x_{j-1/2}, t)) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(x)u(x, t) dx dt.$$

На основе этого соотношения строится разностная схема

$$(5) \quad h(u_j^{n+1} - u_j^n) = \frac{\tau}{2} (\lambda(x_{j+1/2}, t_n) + \lambda(x_{j+1/2}, t_{n+1})) - \frac{\tau}{2} (\lambda(x_{j-1/2}, t_n) + \lambda(x_{j-1/2}, t_{n+1})) + \frac{\tau}{2} hf(x_j)(u_j^{n+1} + u_j^n),$$

где принимается, что

$$\begin{aligned} \lambda(x_{j+1/2}, t_n) &= \mu(x_{j+1/2}) \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} - c(x_{j+1/2}) (\bar{q}_j u_j^n + (1 - \bar{q}_j) u_{j+1}^n), \\ \lambda(x_{j+1/2}, t_{n+1}) &= \mu(x_{j+1/2}) \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} - c(x_{j+1/2}) (\bar{\bar{q}}_j u_j^{n+1} + (1 - \bar{\bar{q}}_j) u_{j+1}^{n+1}), \\ \lambda(x_{j-1/2}, t_n) &= \mu(x_{j-1/2}) \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} - c(x_{j-1/2}) (\bar{p}_j u_j^n + (1 - \bar{p}_j) u_{j-1}^n), \\ \lambda(x_{j-1/2}, t_{n+1}) &= \mu(x_{j-1/2}) \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} - c(x_{j-1/2}) (\bar{\bar{p}}_j u_j^{n+1} + (1 - \bar{\bar{p}}_j) u_{j-1}^{n+1}). \end{aligned}$$

В приведенных формулах \bar{q}_j , $\bar{\bar{q}}_j$, \bar{p}_j , $\bar{\bar{p}}_j$ – некоторые величины, лежащие между нулем и единицей. Если положить все эти величины равными $1/2$, получается разностная схема с центральными разностями. Если положить

$$\bar{q}_j = \frac{1}{2}(1 + \nu_{j+1/2}), \quad \bar{\bar{q}}_j = \frac{1}{2}(1 - \nu_{j+1/2}), \quad \bar{p}_j = \frac{1}{2}(1 - \nu_{j-1/2}), \quad \bar{\bar{p}}_j = \frac{1}{2}(1 + \nu_{j-1/2}),$$

где

$$\nu_{j-1/2} = \frac{\tau}{h} c(x_{j-1/2}), \quad \nu_{j+1/2} = \frac{\tau}{h} c(x_{j+1/2}),$$

то получается смешанная разностная схема.

Устойчивость смешанной разностной схемы исследуется в работах [3; 5]. Там же обосновывается применимость метода прогонки для решения системы линейных уравнений (5) относительно неизвестных u_1^{n+1} , u_2^{n+1} , ..., u_{J-1}^{n+1} , где $J = x_{max}/h$.

4. Численное сравнение разностной схемы с центральными разностями и смешанной разностной схемы

Сравнение производится для уравнения (4) краевой задачи, описанной в предыдущем разделе. Для времени до экспирации выбрано значение $T = 2$. Параметры модели и максимальная процентная ставка взяты такими же, как и в работе [8]:

$$\alpha = 0,01925, \quad \beta = 0,55, \quad \sigma = 0,39, \quad x_{max} = 0,1.$$

Для оценки точности численного решения используются величины

$$d_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq J-1} |u_j^n - u(x_j, T)|,$$

$$d_2 = \left(h \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^n - u(x_j, T))^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $n = T/\tau$ и значения $u(x_j, T)$ определяются по формуле (3). Результаты расчетов приведены в табл. 1 (см. также рис. 1, 2).

Таблица 1.

Результаты расчетов

Число узлов сетки		Точность разностной схемы с центральными разностями		Точность смешанной разностной схемы	
x_{\max}/h	T/τ	d_{∞}	d_2	d_{∞}	d_2
10	40	$6,5 \times 10^{-6}$	$1,5 \times 10^{-6}$	$3,6 \times 10^{-7}$	$7,0 \times 10^{-8}$
20	80	$1,7 \times 10^{-6}$	$4,0 \times 10^{-7}$	$1,3 \times 10^{-7}$	$2,6 \times 10^{-8}$
40	160	$4,4 \times 10^{-7}$	$1,0 \times 10^{-7}$	$4,0 \times 10^{-8}$	$8,1 \times 10^{-9}$
80	320	$1,1 \times 10^{-7}$	$2,7 \times 10^{-8}$	$1,1 \times 10^{-8}$	$2,3 \times 10^{-9}$

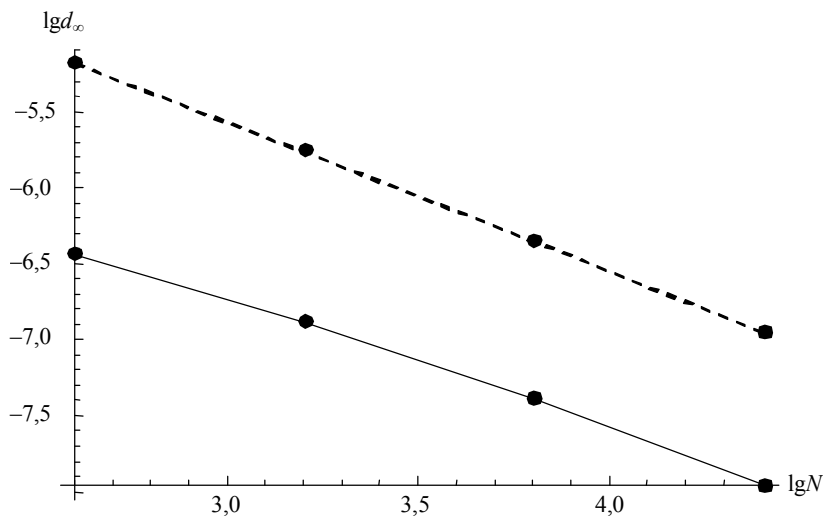


Рис. 1. Зависимость $\lg d_{\infty}$ от логарифма числа узлов сетки $\lg N = \lg \frac{x_{\max} T}{h\tau}$ для обеих разностных схем (штриховая линия соответствует схеме с центральными разностями, сплошная — смешанной разностной схеме)

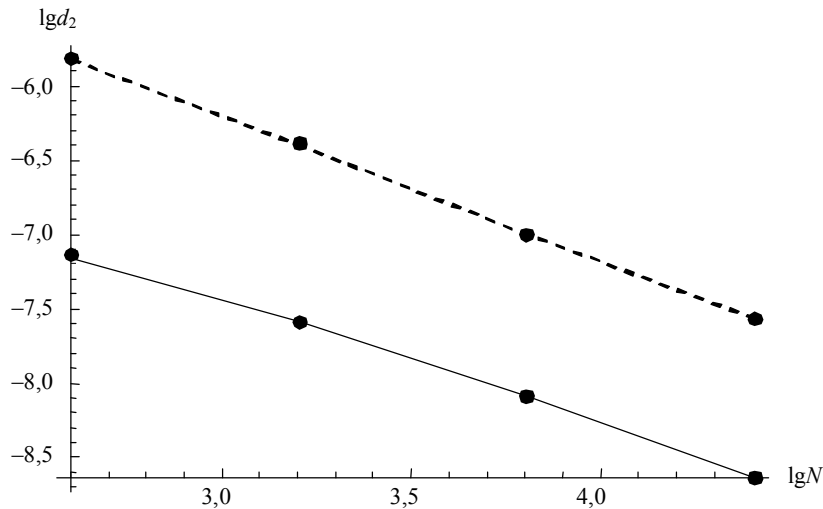


Рис. 2. Зависимость $\lg d_2$ от логарифма числа узлов сетки $\lg N = \lg \frac{x_{max} T}{h \tau}$ для обеих разностных схем (штриховая линия соответствует схеме с центральными разностями, сплошная — смешанной разностной схеме)

Приведенные результаты показывают, что точность смешанной разностной схемы в данном расчете значительно выше, чем точность разностной схемы с центральными разностями. При этом обе разностные схемы на рассматриваемом решении имеют порядок аппроксимации, близкий ко второму.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета решений гидромеханики // Математический сборник. 1959. 47. С. 271–306.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
3. Шведов А.С. Разностная схема второго порядка для одномерного уравнения конвекции-диффузии: препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 1996. № 59.
4. Шведов А.С. Процентные финансовые инструменты: оценка и хеджирование. М.: ГУ ВШЭ, 2001.
5. Шведов А.С. Применение метода конечных разностей для оценки финансовых инструментов // Экономический журнал ВШЭ. 2002. Т. 6. № 2. С. 193–216.
6. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates // Econometrica. 1985. 53. P. 385–407.
7. Crank J., Nicolson P. A Practical Method for Numerical Integration of Solutions of Partial Differential Equations of Heat Conduction Type // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1947. 43 (1). P. 50–67.

8. *Ekström E, Lötstedt P., Tysk J.* Boundary Values and Finite Difference Methods for the Single-factor Term Structure Equation // *Applied Mathematical Finance*. 2009. 16 (3). P. 253–259.
9. *Hull J., White A.* Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 1990. 25(1). P. 87–100.
10. *James J., Webber N.* Interest Rate Modeling. Chichester: Wiley, 2000.
11. *Lax P.D., Wendroff B.* Systems of Conservation Laws // *Comm. Pure Appl. Math.* 1960. 13. P. 217–237.
12. *Longstaff F.A.* Multiple Equilibria and Term Structure Models // *Journal of Financial Economics*. 1992. 32. P. 333–344.