Обобщенная модель воспроизводства населения и ее значение для практики демографического анализа

Захаров С.В.

Посвящается светлой памяти Э. Коула, с которым мне довелось обсуждать результаты моих первых шагов в изучении демографического перехода в России, а также всем нынешним и будущим российским студентам, приступающим к освоению математических основ демографической теории

В статье излагаются методологические основы одного из ведущих направлений в современной математической демографии, связанной с построением обобщенной теории воспроизводства населения, применимой для открытых по отношению к миграции населений с меняющимся режимом замещения поколений.

В 1980-е годы в разработке центральной проблемы математической демографии – создания обобщенной модели динамики населения с любым режимом воспроизводства (*r-variable model*) – происходит качественный скачок. Значительный успех, достигнутый в деле построения наиболее универсальной математической модели воспроизводства численности и возрастной структуры населения, оказал заметное влияние на развитие мировой демографической мысли и решение многих прикладных задач в рамках исторической, региональной и других отраслей демографии. К сожалению, для отечественных специалистов этот методологический прорыв оказался слабо замеченным, а если и замеченным, то недостаточно осознанным с теоретической и практической точек зрения. До сегодняшнего дня разделы по математическому моделированию в отечественных учебниках по демографии обходятся без ссылок на существующие обобщения теории стабильного населения на случай с переменным режимом воспроизводства населения, открытого для миграции.

Рассмотренные в статье примеры использования обобщенной модели воспроизводства населения на отечественном материале не только демонстрируют возможности модели, но и расширяют знания о демографической истории нашей страны, а также дают почву для дальнейших теоретических и статистико-математических исследований закономерностей воспроизводства любых недемографических совокупностей, единицы ко-

Захаров С.В. – к.э.н., зам. директора Института демографии НИУ ВШЭ, доцент кафедры демографии НИУ ВШЭ, директор Института международных исследований семьи. E-mail: szakharov@hse.ru

Статья поступила в Редакцию в сентябре 2011 г.

торых распределены по признаку, аналогичному возрасту (т.е. длительности пребывания в некотором состоянии, характеризующем совокупность). Для того чтобы соотношения имели силу, распределение совокупности и сила каждого фактора выбытия должны быть непрерывной функцией возраста или его аналога.

Ключевые слова: возрастная структура; возрастные коэффициенты прироста населения, закрытые и открытые для миграции населения; обобщенное уравнение популяционной динамики; нетто-коэффициент воспроизводства; r-variable-модель; стабильное население.

Введение

Цель данной статьи – проанализировать одно из направлений в современной математической демографии, связанной с построением обобщенной теории воспроизводства населения, применимой для населений, открытых для миграции и с меняющимся режимом замещения поколений.

В своей методологической основе статья была подготовлена двадцать лет назад[1] по горячим следам появления обобщенных моделей стабильного населения в первой половине 1980-х годов. В то время автор интенсивно изучал методологию косвенных оценок демографических индикаторов, способную помочь в его исследовании демографического перехода в России, составлявшего предмет диссертационной работы. Натолкнувшись в своих изысканиях на подробно цитируемую далее статью С. Престона и Э. Коула, автор сразу же осознал ее огромное значение для теории и практики демографического анализа. Более того, только после изучения этой и связанных с ней множества других работ ведущих демографов того времени автор обрел целостное представление о взаимосвязях основных компонент в процессе воспроизводства численности и возрастной структуры населения. Следует также иметь в виду, что в те годы только ограниченный круг специалистов, преодолев запертые двери специальных хранилищ («спецхранов») двух библиотек в Москве («Ленинки» и ИНИОНа), добирался до ведущих зарубежных демографических журналов. Отсюда и появление идеи не только познакомить широкие круги русскоязычных читателей с состоявшейся сменой вех в демографическом моделировании населения, но и подтолкнуть специалистов к практическому использованию новых моделей, о которых они, возможно, не имели представления в связи с ограниченностью доступа к соответствующей литературе[2].

---

[1] Первоначальный вариант статьи был подготовлен при участии Н.Н. Захаровой (ныне Мирошниковой), и, пользуясь случаем, я еще раз выражаю ей свою благодарность. Прежний вариант статьи был принят для публикации в очередном томе «Ученых записок по статистике» (издательство «Наука»), подготовленного под редакцией А.Г. Волкова. К большому сожалению, издание уже вполне готовой книги не состоялось, во многом по техническим причинам и, в частности, в связи с тяжелым переходом от машинописной к электронной форме подготовки рукописей, происходившем в те годы в связи с появлением первых персональных компьютеров и текстовых редакторов, а затем и по причине прекращения данного серийного издания.

[2] По сути та же благородная идея лежала в основе издания серии сборников «Новое в зарубежной демографии» (1968–1983 гг.), редактируемых сотрудниками тогдашнего Отдела демографии НИИ ЦСУ СССР. Силами сотрудников Института демографии НИУ ВШЭ эти

К большому сожалению, по причинам совершенно непонятным до сих пор не только в научной, но и в учебно-методической отечественной литературе, посвященной демографическому анализу, не находится места для изложения теоретико-математических основ построения обобщенных моделей воспроизводства населения, примерам их практического использования. По-видимому, в нашей стране только в статье С.В. Захарова можно найти упоминание об обобщенных моделях стабильного населения [11][3], а практическое использование данного подхода, возможно, ограничивается лишь диссертационными работами того же автора и еще одной работой, в которой методология обобщенных моделей была применена для анализа воспроизводства недемографических совокупностей – рабочей силы в профессионально-отраслевом разрезе [13].

Напротив, в зарубежных учебниках описание данных моделей прочно занимает подобающее место, а оригинальные статьи по данному вопросу рекомендованы ведущими методологами и экспертами ООН (см., в частности, многотомное издание, подготовленное по заказу Фонда народонаселения ООН [55]). Так, в одном из наиболее популярных в мире учебников по демографическому анализу методологическому подходу с позиции обобщенных моделей уделяется едва ли не центральное место [52], что, правда, не удивительно, поскольку один из авторов учебника – ведущий американский демограф С. Престон – является одним из отцов данного подхода. Можно приводить в пример и другие издания, но достаточно упомянуть, что в главном на сегодняшний день энциклопедическом изложении теории и методов в демографии [34; 35], подготовленном на английском и французском языках ведущими специалистами в мире под редакцией Г. Казелли, Ж. Валлена и Г. Вунша, раздел, посвященный моделям динамики населения [28; 29], также базируется на изложении методологии, рассматриваемой далее в нашей статье.

В ходе подготовки данной публикации автор не только переработал и существенно дополнил историко-методологическую часть, написанную, как уже говорилось выше, много лет назад, но и кардинальным образом переработал разделы, в которых излагаются прикладные аспекты рассматриваемых моделей. В частности, читателю предлагаются абсолютно новые приложения методологии к отечественным данным.

1. К истории вопроса

Непреходящая актуальность исследований в рамках данного направления вряд ли требует особой аргументации, поскольку изучение закономерностей эволюции воспроизводства населения является центральной задачей демографии. В то же время недостаточная разработанность ряда основополагающих моментов в математической теории воспроизводства населения долгое время сдерживала развитие прикладных методов демографии, спрос на которые неуклонно возрастал в послевоенный период во всем мире, не исключая и СССР. Конкретно речь идет о возможности получения текущих и прогнозных характеристик воспроизводства для самых различных со-

---

замечательные книги сегодня переведены в электронный формат (см.: http://demoscope.ru/weekly/knigi/books.php).

[3] Здесь будет уместно упомянуть, что и с этой публикацией автору не повезло. В момент завершения подготовки книги умирает ее редактор Д.И. Валентей. Его преемники на редакторском посту в опубликованном варианте книги ошибочно приписали Е.М. Андрееву авторство раздела, написанного С.В. Захаровым, а раздела, подготовленного Е.М. Андреевым – С.В. Захарову.

вокупностей или групп индивидов; локально-территориальных, образованных по национальному признаку или по занятости в отраслевом разрезе, и других. Для таких совокупностей, в силу их «открытости», нестабильности, возможно, малого объема и, нередко, отсутствия достаточной и качественной информации о них, применение общепринятого и распространенного аппарата демографического анализа не всегда эффективно. Интерес отечественных специалистов к построению обобщенной модели воспроизводства населения и вообще к демографическому моделированию заметно возрос в 1970–1980-е годы. В этот период особо интенсивно разрабатываются прикладные аспекты демографических моделей [2; 9; 18], однако затем интерес к математической демографии в нашей стране резко упал, и на протяжении последующих десятилетий, к сожалению, в отечественных исследованиях едва ли можно заметить сколько-нибудь значимый прогресс. Напротив, приоритет математической демографии за рубежом оставался очень высоким. В результате российская отсталость от мирового уровня развития в этой области знаний достигла катастрофических размеров.

Исторический ход развития демографической мысли в области моделирования воспроизводства населения за период с конца XIX в. и вплоть до начала 1980-х годов достаточно полно освещен в советской и зарубежной литературе, изданной на русском языке [1; 4; 8; 19]. Безусловно, прав С.И. Пирожков, который увязывает развитие математической теории в анализе воспроизводства населения с насущными задачами изучения демографической реальности на различных этапах ее эволюции и с необходимостью абстрактных обобщений эмпирически наблюдаемых закономерностей [15]. Хотя в логике математических построений присутствует своя последовательность, часто отличная от последовательности исторических событий, все же актуализация идей, несомненно, происходит в зависимости от конкретных запросов практики.

Классические работы А.Дж. Лотки и Л. Даблина, В. Борткевича, Р. Кучинского [36; 44; 46] к концу 1930-х годов завершили длительный этап поисков первичных основ обобщенной модели, объединяющей воедино три основные компоненты режима воспроизводства: возрастную структуру, смертность, рождаемость. Модель стабильного населения позволила наиболее совершенным образом описать взаимосвязь основных компонентов воспроизводства для предельного состояния развития закрытой от миграции демографической системы, к которому она стремится при неизменности режима рождаемости и порядка дожития.

В 1950-е годы, когда стало очевидно, что демографический переход в Европе близится к завершению, математическая теория воспроизводства решала ряд взаимосвязанных задач: анализ населений в процессе стабилизации, изучение эволюции возрастной структуры при изменении режима воспроизводства, оценка демографических параметров населения в развивающихся странах в условиях неполноты и недостоверности статистической информации. Теоретической основой изучения служила модель стабильного населения, которая давала возможность рассмотреть характеристики предельных состояний в развитии демографических систем и «проиграть» различные ситуации, возникающие при изменениях режима воспроизводства населения, отталкиваясь от накопленной за время перехода демографической информации по европейским странам[4].

---

[4] Важно отметить, что именно в эти годы Э. Коулом формулируется (в 1957 г.) и его студентом А. Лопесом доказывается (в 1961 г.) одна из центральных теорем демографии – теорема о слабой эргодичности (см., например, [21]. В отличие от свойства *«сильной эргодич-*

Однако по мере того, как менялась демографическая ситуация в мире – послевоенный компенсационный рост рождаемости в Европе, начало демографического перехода в странах «третьего мира», – ущербность модели стабильного населения становилась все более явной.

В 1950–1960-х годах ведутся активные разработки моделей для частных случаев воспроизводства нестабильного населения: рождаемость постоянна (высока), а смертность медленно снижается, при этом возрастная структура близка к стабильной (модель квазистабильного населения), рождаемость и смертность снижаются, но не нарушают стабильность возрастной структуры населения (модель полустабильного населения). Обобщение данных разработок можно найти в работах Ж. Буржуа-Пиша, Э. Коула, Н. Кейфица, У. Кима, Дж. Полларда, Н. Райдера, А. Роджерса, Л. Таба и др. [8; 25; 30; 31; 41]. Они позволили вовлечь в научный оборот широкий информационный материал о демографических процессах в развивающихся странах, глубже понять закономерности демографического перехода и, в частности, причины эволюции возрастной структуры в сторону ее постарения. Но решающего успеха в деле построения обобщенной модели воспроизводства они не достигли.

В то же время необходимость получения надежных демографических характеристик в условиях демографического перехода в странах «третьего мира» продолжала стимулировать развитие методов косвенных оценок [26; 42]. Отдел народонаселения ООН всячески поддерживал данные разработки, и зарекомендовавшие себя методы и обобщения, подготовленные для практического применения, последовательно публиковал в отдельных изданиях [25; 47; 40]. Видимо, в поисках наилучших решений для косвенных оценок демографических параметров, определения полноты учета естественного и миграционного движения населения и родилась идея построения наиболее общей модели[5].

В 1982 г. появляется фундаментальная статья С. Престона и Э. Коула, в которой излагаются формальная и практическая стороны нового подхода [50]. В своих построениях они исходили из опыта, накопленного в математической биологии при анализе закономерностей клеточного размножения (Х. Ван Ферстер, Е. Трюко), а так-

---

ности», установленного Дж. Лоткой (теорема была доказана Лоткой и Шарпе в 1911 г.), которое гласит, что при неизменности режима воспроизводства любое закрытое от миграции население стремится к предельному состоянию возрастной структуры – «стабильному населению», однозначно определяемому возрастными функциями рождаемости и смертности, зафиксированными в начальный момент процесса стабилизации, свойство *«слабой эргодичности»* сводится к установлению теоретического факта, что если два совершенно различных населения (с различной возрастной структурой) начиная с какого-то момента времени характеризуются одинаковыми возрастными функциями рождаемости и смертности, пусть даже впоследствии меняющимися, то эти два населения, постепенно «забывая» прежнюю возрастную структуру, будут стремиться в процессе стабилизации к некоему предельному и одинаковому для них состоянию структуры («стабильному населению»), задаваемому идентичными изменениями режима воспроизводства в каждом из них. Так, если ${}^{1}P_x^t$ и ${}^{2}P_x^t$ – численности лиц возраста x в популяциях 1 и 2, то для произвольных возрастов $x1$ и $x2$ свойство слабой эргодичности описывается выражением:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{{}^{1}P_{x1}^t}{{}^{2}P_{x1}^t}-\frac{{}^{1}P_{x2}^t}{{}^{2}P_{x2}^t}\right)=0.$$

[5] Большое влияние на обобщающую работу С. Престона и Э. Коула в этом направлении оказала диссертация Н. Беннетта (1981 г.) и его статья в соавторстве с Ш. Хориуши [23].

же использовали все последние достижения в области математической демографии (Н. Кейфиц, А. Роджерс, Ф. Хоппенштадт, Г. Лангхаар, Н. Беннетт, Ш. Хориуши и др.). Авторы обобщили известные интегральные уравнения на случай с переменным режимом воспроизводства, вывели формулы для расчета основных демографических параметров, в том числе показателей воспроизводства для нестабильных населений. В этой, а также в других статьях С. Престона, Э. Коула, Н. Беннетта, Ш. Хориуши, И. Ким, Б. Артура, Дж. Воупела и других были показаны пути использования полученных взаимосвязей для различных прикладных задач. Авторами была продемонстрирована возможность применения полученной системы для любых недемографических совокупностей, единицы которых распределены по признаку, аналогичному возрасту (т.е. длительности пребывания в некотором состоянии, характеризующем совокупность).

В ходе развернувшейся дискуссии на страницах ведущих демографических изданий была подтверждена фундаментальность и практическая значимость данных построений.

2. Вывод основного тождества

Если $P(a,t)$ − численность лиц в возрасте a в момент времени t, а $P(a+da,t+dt)$ − численность лиц в возрасте $a+da$ во время $t+dt$, то, предположив $da=dt$, с тем чтобы $P(a,t)$ и $P(a+da,t+dt)$ принадлежали к одной и той же когорте, мы приходим к выражению, отражающему изменения в размере этой когорты со временем, часто называемому уравнением популяционной динамики:

$$dP(a,t) = \frac{\partial P(a,t)}{\partial t}dt + \frac{\partial P(a,t)}{\partial a}da. \tag{1}$$

Это уравнение стало широко известно после выхода работы Х. Ван Ферстера [37][6]. В дальнейшем оно использовалось Е. Трюко и Г. Ландхааром [56; 45] и известно отечественным специалистам [17; 18].

Разделив обе части уравнения (1) на $P(a,t)$, имеем:

$$\frac{dP(a,t)}{P(a,t)} = \frac{\frac{\partial P(a,t)}{\partial t}dt}{P(a,t)} + \frac{\frac{\partial P(a,t)}{\partial a}da}{P(a,t)},$$

$$\frac{dP(a,t)}{P(a,t)} = r(a,t)dt + \frac{\frac{\partial P(a,t)}{\partial a}da}{P(a,t)},$$

где $r(a,t)$ − коэффициент прироста населения возраста a в момент времени t или пропорциональное изменение численности лиц в возрасте a в единицу времени.

---

[6] Б. Артур и Дж. Воупел приписывают его авторство А.Г. Мак-Кендрику (см.: [22]). Однако давняя публикация этого автора 1926 г., на которую они ссылаются, нам оказалась недоступной. В работе Х. Ван Ферстера уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial P(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial P(t,a)}{\partial a}dt = -\lambda(t,a,...)\cdot P(t,a),$$

где λ − функция потерь от различных факторов [37, p. 394].

Левая часть уравнения (1) есть пропорциональное изменение размера когорты возраста a во времени t в малом интервале возраста от a до $a + da$ (или времени от t до $t + dt$). Имеется лишь два источника изменения размера когорты: смерть и миграция. Используя $_{da}D(a)$ для обозначения смертей в интервале от a до $a + da$ для когорты возраста a в момент t, а $_{da}M(a)$ – для обозначения сальдо миграции (иммиграция минус эмиграция) для той же когорты в течении того же интервала, имеем:

$$dP(a,t) = {}_{da}M(a) - {}_{da}D(a).$$

Общепринято определение силы функции смертности для когорты в возрасте a как

$$\mu(a) = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{{}_{da}D(a)}{P(a)da}.$$

Аналогично определим силу функции миграции:

$$\gamma(a) = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{{}_{da}M(a)}{P(a)da}.$$

Разделив обе части уравнения (1) на $da = dt$ и преобразовывая в силу того, что $da{=}dt \to 0$, имеем:

$$-\mu(a,t) + \gamma(a,t) = r(a,t)dt + \frac{\dfrac{\partial P(a,t)}{\partial a}da}{P(a,t)} \tag{2}$$

или

$$\frac{\partial \ln P(a,t)}{\partial a} = \gamma(a,t) - \mu(a,t) - r(a,t).$$

Принимая t постоянным и опуская его в обозначениях, интегрируем обе части между специфическим возрастом 0 и x:

$$\int_0^x \frac{d \ln P(a)}{da} da = \int_0^x \gamma(a)da - \int_0^x \mu(a)da - \int_0^x r(a)da$$

или

$$\ln P(x) - \ln P(0) = \int_0^x \gamma(a)da - \int_0^x \mu(a)da - \int_0^x r(a)da.$$

Экспоненциируем и переписываем предыдущее выражение:

$$P(x) = P(0) \cdot \exp\left(\int_0^x \gamma(a)da \right) \cdot \exp\left(-\int_0^x \mu(a)da \right) \cdot \exp\left(-\int_0^x r(a)da \right).$$

Это и есть базовое уравнение системы *Престона – Коула*.

Для населения, закрытого от миграции, дискретным аналогом данного выражения может являться следующее не слишком грубое приближение [43; 50]:

$$_nP_a = {_nP_0} \cdot \exp\left(-n \cdot \sum_{a=0}^{a-n} {_nr_x}\right) \cdot \frac{_nL_a}{_nL_0},$$

где n – длина возрастного интервала (чаще всего равная одному или пяти годам); $_nL_a$ – число живущих в некотором возрастном интервале по таблицам смертности.

3. От модели стационарного населения к обобщенной модели населения

Стационарное население. Если предположить, что число лиц в населении – непрерывная функция возраста, то соответствующее изменение числа лиц по мере увеличения возраста в стационарном населении примет вид

$$\frac{1}{P(a)} \cdot \frac{dP(a)}{da} = -\mu(a),$$

где $\mu(a)$ – возрастной коэффициент смертности или сила смертности в возрасте a.

В этом населении число рождений одно и то же в каждом календарном году, а число лиц в каждом возрасте не изменяется со временем.

Стабильное население является населением, в котором число рождений изменяется со временем с постоянным коэффициентом r, а режим смертности один и тот же год от года. Число лиц в каждом отдельном возрасте также меняется со временем с коэффициентом r. Как результат, каждая последующая (более молодая) когорта больше (или меньше, если r отрицателен) в каждом возрасте, чем предыдущая (более старшая) на постоянный множитель. Поскольку стабильное население в общем случае подчиняется фиксированному режиму смертности $\mu(a)$, соответствующая численность изменяется с возрастом как результат независимого влияния смертности в возрасте a и соответствующей разницы в величине соседних когорт r:

$$\frac{1}{P(a)} \cdot \frac{dP(a)}{da} = -\mu(a) - r.$$

Любое закрытое население. В любом закрытом населении соответствующая численность в возрасте a меняется с возрастом в силу смертности, а также в зависимости от того, какая по объему когорта (большая или маленькая) замещает исходную. Так, в любой момент

$$\frac{1}{P(a)} \cdot \frac{dP(a)}{da} = -\mu(a) - r(a),$$

где $r(a)$ – коэффициент прироста численности лиц в возрасте a, выраженный в виде функции возраста и определяемый как

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(a,t+\Delta t) - P(a,t)}{P(a,t)\Delta t}.$$

Данное уравнение выражает относительное изменение численности с возрастом как сумму двух независимых слагаемых: изменение, которое имело бы место в результате одной смертности, и изменение, которое было бы, если бы численность в возрасте a менялась со временем в отсутствии смертности.

Поскольку $\frac{1}{P(a)} \cdot \frac{dP(a)}{da}$ может быть записано как $\frac{d \ln P(a)}{da}$, то, как уже было показано, после интегрирования следует базовое уравнение системы Престона – Коула:

(3) $$P(a) = P(0) \cdot \exp\left(-\int_0^a r(x)dx - \int_0^a \mu(x)dx\right)$$

или

$$P(a) = N \cdot \exp\left(-\int_0^a r(x)dx\right) \cdot \rho(a),$$

где $P(a)$ – число лиц в возрасте a в момент t или значение функции $P(a,t)$ в некоторой точке a в некоторый момент t; $\rho(a)$ – вероятность дожития от возраста 0 до возраста a в соответствии с таблицей смертности, преобладающей во время t или $\rho(a) = \exp\left(-\int_0^a \mu(x)\right)dx$; $r(x)$ – годовой коэффициент прироста числа лиц в возрасте x, оцененный в момент времени t; N – число рождений в момент времени t.

Авторы обращают внимание, что уравнение (3) выводилось уже много раз в различных контекстах, но его практическое значение для демографического анализа долгое время не осознавалось. В частности, такое пренебрежение могло быть результатом убежденности, что ряд $r(x)$ теоретически неинтересен, поскольку это в чистом виде функция прошлых режимов смертности и рождаемости. Однако с помощью этой функции могут быть прояснены многие связи между другими демографическими параметрами.

Покажем, как происходит простое обобщение уравнений, характеризующих стабильное население.

(4) Коэффициент рождаемости:

$$n = \frac{N}{\int_0^\infty P(a)da} = \frac{N}{\int_0^\infty N \cdot \exp\left(-\int_0^\infty r(x)dx\right) \cdot \rho(a)da} = \frac{1}{\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^a r(x)dx\right) \cdot \rho(a)da}.$$

(5) Доля населения в возрасте a:

$$C(a) = \frac{P(a)}{\int_0^\infty P(a)da} = \frac{N \cdot \exp\left(-\int_0^\infty r(x)dx\right) \cdot \rho(a)}{\int_0^\infty N \cdot \exp\left(-\int_0^a r(x)dx\right) \cdot \rho(a)da} = n \cdot \exp\left(-\int_0^a r(x)dx\right) \cdot \rho(a).$$

Коэффициент рождаемости может быть также представлен как

$$n = \int_{\alpha}^{\beta} c(a) \cdot n(a) da,$$

где $n(a)$ – коэффициент рождаемости женского пола у женщин в возрасте a; α и β – нижняя и верхняя возрастные границы деторождения.

Подставив (5) в это выражение, мы имеем

$$n = \int_{\alpha}^{\beta} n \cdot \exp\left(-\int_{0}^{a} r(x)dx\right) \cdot \rho(a) \cdot n(a) da$$

или

$$1 = \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\int_{0}^{a} r(x)dx\right) \cdot \rho(a) \cdot n(a) da. \tag{6}$$

Если возрастные коэффициенты прироста постоянны с возрастом и равны некоторой оценке r, то уравнения (4), (5) и (6) становятся легко узнаваемыми классическими уравнениями [31; 14], характеризующими стабильное население (табл. 1).

Население, открытое для миграции. Формулировки (4)–(6) могут быть легко обобщены и на случай открытого населения с возрастной силой функции чистой миграции $\gamma(x)$. Для этого нужно понять, что сила функции миграции влияет на процесс роста населения в точной аналогии с манерой действия смертности. Возрастное распределение не «осознает», покидают ли люди население вследствие смерти или эмиграции, и сальдо миграции может возместить, иногда более чем полностью, влияние смертности. Как было показано ранее,

$$P(a) = P(0) \cdot \exp\left(-\int_{0}^{a} r(x)dx\right) \cdot \exp\left(-\int_{0}^{a} \gamma(x)dx\right) \cdot \rho(a). \tag{7}$$

Три основных уравнения (4)–(6) могут быть теперь получены простым добавлением $\gamma(x)$ к $r(x)$, и любое население аналитически превращается в закрытое.

Фактически ничто не ограничивает нас только одной формой «миграции» или даже одной формой смертности. Любая форма выбытия или пополнения совокупности может просто вводиться в (7) с тем условием, что она должна действовать аналогично миграции или смертности.

Возрастной состав любого населения в любой момент, предполагая только, что возрастное распределение и его изменение постоянны во времени, полностью определяется коэффициентами прироста численности в каждом возрасте в данный момент и коэффициентом выбытия (включая выбытие с отрицательным знаком) в каждом возрасте по причине каждого из ряда независимых факторов. Так, если коэффициент прироста $r(x)$ известен для каждого возраста x от 0 до предельно достижимого возраста, и если оценки i различных факторов выбытия известны, коэффициент выбытия для невключенного фактора может быть исчислен.

В этих целях используется следующее выражение:

$$(8)\qquad P(a) = P(0)\cdot \exp\left(-\int_0^a r(x)dx\right)\cdot \exp\left(-\sum_i \int_0^a \mu_i(x)dx\right).$$

Данное уравнение применимо к чрезвычайно широкому миру явлений. Для этого достаточно, чтобы члены воспроизводящихся совокупностей имели определенную длительность пребывания в некотором состоянии, аналогичную возрасту (длительность жизни от рождения). Другими примерами являются: длительность проживания, стаж работы, длительность пребывания в профессии, длительность пребывания в больнице и т.п. Для того чтобы соотношения имели силу, распределение совокупности и сила каждого фактора выбытия должны быть непрерывной функцией возраста или его аналога.

4. Интерпретация функции $r(x)$

Возрастные коэффициенты прироста играют ключевую роль в универсальной системе Престона – Коула и поэтому требуют дополнительного пояснения. Хотя $r(x)$ формально была определена как $\frac{\partial P(a,t)}{P(a,t)\partial t}$ [7], но она может рассматриваться и, главное, использоваться как функция возраста, а не календарного времени. С. Престон и Э. Коул приводят изящную аналогию $r(x)$ со скоростью автомобиля, которая классически определяется как производная по времени пройденного пути, но может быть также рассмотрена как характеристичная особенность транспортного средства в данный момент, идентифицируемая по показанию спидометра. Конкретное значение скорости не означает, что автомобиль пройдет данное расстояние в любой час или то, что он покрыл данное расстояние часом ранее. Можно вообразить некий демографический «спидометр», который снимает в каждый момент показания $r(x)$ у наблюдаемой совокупности.

В уравнении (8) $r(x)$ формально аналогичен любому из i-х факторов выбытия и математически может быть включен как $(i + 1)$-я форма выбытия. Однако коэффициент прироста отличается тем, что он есть «встроенная» форма выбытия, результат разницы в размере соседних когорт, которая является превращенным результатом прошлой истории населения (прошлого входа и выхода из некоторой совокупности), тогда как другие формы выбытия экзогенны.

Любое население может предполагаться как стационарный демографический объект с многократными «уменьшителями», один из которых есть прирост $r(x)$. В ситуации многократного условного уменьшения можно поставить вопрос о характере структуры населения, если бы один или ряд из «уменьшителей» не действовали. Если устраняемый «уменьшитель» и есть $r(x)$, то мы остаемся со стационарным населением, являющимся результатом деятельности экзогенных «уменьшителей» $\mu_i(x)$. Если в ка-

[7] В расчетах она определяется как

$$r(x) = \frac{1}{\Delta t}\cdot \ln\left[\frac{P(x,t+\Delta t)}{P(x,t)}\right].$$

честве единственного остающегося «уменьшителя» выступает смертность, то мы получаем условное население в контексте таблиц смертности, т.е. модель населения, которая традиционно именуется *стационарной*.

Таким образом, для того чтобы превратить некоторое возрастное распределение на момент времени t в возрастное распределение гипотетического стационарного демографического объекта с текущими силами выбытия и сегодняшним источником рождений, необходимо только умножить текущее число лиц в возрасте a на

$$\exp\left(\int_0^a r(x,t)\,dx\right).$$

Подробное изложение демографической сущности функции $r(x)$ можно найти в специальной работе Ш. Хориуши и С. Престона [39]. К настоящему моменту все чаще рассматриваемую обобщенную модель населения называют кратко *r-variable model*, отдавая должное центральной роли, которую играет коэффициент изменения численности когорты с возрастом/временем как в математическом основании самой модели, так и в практике применения модели для анализа различных сторон воспроизводственного процесса.

5. Новое выражение для нетто-коэффициента воспроизводства населения и других базовых демографических показателей

Распределение рождений по возрасту матери (в долях единицы)[8] можно представить в следующем виде:

$$V(a)=\frac{N(a)}{\int_\alpha^\beta N(a)\,da}=\frac{P(a)\cdot n(a)}{\int_\alpha^\beta P(a)\cdot n(a)\,da}.$$

Используя уравнение (3) для численности населения в закрытом населении, получаем новое выражение для распределения рождений:

$$V(a)=\frac{N\cdot\exp\left(-\int_\alpha^\beta r(x)\,dx\right)\cdot\rho(a)\cdot n(a)}{\int_\alpha^\beta N\cdot\exp\left(-\int_0^a r(x)\,dx\right)\cdot\rho(a)\cdot n(a)\,da}=\exp\left(-\int_0^a r(x)\,dx\right)\cdot\rho(a)\cdot n(a).$$

[8] Если более точно, то речь должна идти о распределении по возрасту *матерей*, родивших детей в некоторый момент времени. Подмена данного распределения распределением *рождений* по возрасту матери часто используется в практических расчетах и не является слишком грубой (см. также [33]).

Можно переписать данное уравнение следующим образом:

$$V(a)\cdot\exp\left(\int_0^a r(x)dx\right)=\rho(a)\cdot n(a).$$

Проинтегрировав обе стороны уравнения в пределах интервала возраста деторождения, получаем в левой и правой частях нетто-коэффициент воспроизводства населения:

$$R_0=\int_\alpha^\beta \rho(a)\cdot n(a)da,$$

$$R_0=\int_\alpha^\beta V(a)\cdot\exp\left(\int_0^a r(x)dx\right)da. \qquad (9)$$

Первое выражение является достаточно распространенным, а второе получено исходя из обобщения модели воспроизводства. Второе выражение говорит о том, что нетто-коэффициент воспроизводства в любом закрытом для миграции населении может быть точно исчислен исходя из информации о распределении рождений по возрасту матери и возрастных коэффициентах прироста. Таким образом, расчет величины нетто-коэффициента не обязательно требует знания величин вероятностей дожития до возраста матери, обычно получаемых из таблиц смертности. Для стабильного населения с некоторым собственным коэффициентом прироста r[9] выражение для нетто-коэффициента приобретает следующий вид:

$$R_0=\int_\alpha^\beta V(a)\cdot\exp(ra)da.$$

Последнее выражение несколько необычно и нечасто использовалось в теории стабильного населения, поскольку «нормальной» аналитической проблемой является получение r из величины нетто-коэффициента, а не обратное. Однако если за межпереписной период удается аппроксимировать r или функцию $r(x)$[10], а также если присутствует распределение родившихся по возрасту матери (что часто имеет место), то новая формула для расчета нетто-коэффициента может быть чрезвычайно полезна, поскольку не будет требовать построения таблиц смертности и получения возрастных коэффициентов рождаемости. Еще раз напомним, что речь идет о закрытом для миграции населении или, точнее, о населении с нулевым сальдо миграции для всех воз-

[9] Его часто называют *истинным коэффициентом естественного прироста* или коэффициентом прироста Лотки.

[10] В любом закрытом населении собственный коэффициент прироста должен равняться среднему текущему возрастному коэффициенту прироста ниже некоторого возраста, лежащего внутри интервала деторождения. В грубом приближении для некоторого календарного периода времени он будет равен среднему хронологическому коэффициенту прироста населения для возраста, близкого к среднему возрасту матери при рождении ребенка.

растов. Для населений, испытывающих миграционный прирост, при расчете традиционного нетто-коэффициента воспроизводства населения функцию $r(x)$ следует освободить от миграционной компоненты.

С. Престон и Э. Коул рассчитали величину нетто-коэффициента по формуле (9) для Швеции с 1973 по 1977 гг. [50]. Эти данные (0,889; 0,896; 0,849; 0,809; 0,792) были сравнены с официальными данными, основанными на традиционном методе расчета (0,896; 0,899; 0,851; 0,806; 0,785). Очевидно, что расхождения крайне незначительные.

Как будет далее показано (см. раздел 7.3), использование данного метода расчета нетто-коэффициента дало более чем удовлетворительные результаты и применительно к российским данным.

Таблица 1.

Формулы основных демографических функций в системе Престона – Коула для моделей населения, закрытых для миграции с различным режимом воспроизводства

Функция	Стационарное население	Стабильное население	Население с любым режимом
$C(a)$	$n\cdot\rho(a)$	$n\cdot\exp(-ra)\cdot\rho(a)$	$n\cdot\exp\left(-\int_0^a r(x)dx\right)\cdot\rho(a)$
n	$\dfrac{1}{\int_0^\omega \rho(a)da}$	$\dfrac{1}{\int_0^\omega \rho(a)\cdot\exp(-ra)da}$	$\dfrac{1}{\int_0^\omega \rho(a)\cdot\exp\left(-\int_0^a r(x)dx\right)da}$
$V(a)$	$\rho(a)\cdot n(a)$	$\rho(a)\cdot n(a)\cdot\exp(-ra)$	$\rho(a)\cdot n(a)\cdot\exp\left(-\int_0^a r(x)dx\right)$
$n(a)$	$\dfrac{V(a)}{\rho(a)}$	$\dfrac{V(a)\cdot\exp(ra)da}{\rho(a)}$	$\dfrac{V(a)\cdot\exp\left(\int_0^a r(x)dx\right)}{\rho(a)}$
e_0^0	$\dfrac{\int_0^\omega c(a)da}{n}$	$\dfrac{\int_0^\omega c(a)\cdot\exp(ra)da}{n}$	$\dfrac{\int_0^\omega c(a)\cdot\exp\left(\int_0^a r(x)dx\right)da}{n}$
R_0	$\int_\alpha^\beta V(a)da=1$	$\int_\alpha^\beta V(a)\cdot\exp(ra)da$	$\int_\alpha^\beta V(a)\cdot\exp\left(\int_0^a r(x)dx\right)da$

Условные обозначения:

$C(a)$ – доля лиц в возрасте a во всем населении; n – общий коэффициент рождаемости; $V(a)$ – доля женщин, родивших в возрасте a среди всех женщин, родивших ребенка; $n(a)$ –

коэффициент рождаемости у женщин в возрасте a; $e_0^0 = \int_0^{\omega} \rho(a) da$ – средняя ожидаемая продолжительность жизни для новорожденных (a = 0); $R_0 = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(a) \cdot n(a) da$ – нетто-коэффициент воспроизводства населения.

Источник: [50, p. 253].

6. Поверхность Лексиса и дальнейшее развитие общей модели воспроизводства населения

Выше рассмотренные связи между компонентами воспроизводства населения были выражены в терминах условных поколений. В 1984 г. Б. Артур и Дж. Воупел опубликовали работу [22], в которой та же система взаимосвязей показана в контексте реальных поколений (совокупностей лиц по году рождения, когорт).

В целях наглядности и удобства «когортной» интерпретации основных соотношений авторами привлекается понятие «поверхности Лексиса» – пространственного изображения функции плотности населения $P(a,t)$ в трехмерной системе координат: времени, возраста, и значения плотности. При таком представлении обеспечивается возможность визуального сопоставления различных режимов и компонент воспроизводства населения одновременно в пространстве календарного времени и возраста[11].

Исходя из геометрической интерпретации уравнения популяционной динамики Ван Ферстера и ряда соотношений, позволяющих перейти от одной точки на поверхности Лексиса к другой, выводится следующее тождество (подробнее см.: [22, p. 215–218]):

$$P(0, t-a) = P(0,t) \cdot \exp\left(-\int_0^a g(y,t) dy \right), \tag{10}$$

где $g(y,t) = r(0, t-y)$ представляет собой коэффициент прироста рождений на y лет ранее времени t (см.: [22, p. 253]):

$$g(y,t) = -\left[\frac{\partial P(0, t-y)}{\partial y} \right] / P(t-y).$$

В практических расчетах может с успехом применяться следующая формула для оценки $g(y,t)$ или экспоненциала формулы (10):

$$\exp\left(\int_0^a g(y,t) dy \right) = \frac{N(t-a)}{N(t)}.$$

[11] Подобное графическое построение Г. Цейнер предложил еще в 1869 г. Однако большее распространение получил его двумерный аналог – демографическая сетка Лексиса, что, видимо, и привело к появлению термина «поверхность Лексиса». О преимуществах трехмерного изображения см., например: [10].

С другой стороны имеем

$$(11)\qquad P(a,t)=P(0,t-a)\cdot\exp\left(-\int_0^a \mu(x,t-a+x)dx\right),$$

где экспоненциал есть не что иное, как когортная функция дожития $\rho(a,t)$. Объединяя (10) и (11), получаем для любого закрытого от миграции населения новое обобщение системы в когортном представлении (система IIASA[12]):

$$(12)\qquad P(a,t)=P(0,t)\cdot\exp\left(-\int_0^a g(y,t)dy\right)\cdot\rho_c(a,t).$$

Возрастная структура любого закрытого населения в момент времени t получается следующим образом:

$$(13)\qquad C(a,t)=n(t)\cdot\exp\left(-\int_0^a g(y,t)dy\right)\cdot\rho_c(a,t),$$

где общий коэффициент рождаемости в тот же момент t:

$$n(t)=\frac{1}{\int_0^\omega \exp\left(-\int_0^a g(y,t)dy\right)\cdot\rho_c(a,t)da}.$$

В стабильном населении $\rho_c(a,t)$ и $g(a,t)$ постоянны во времени:

$$n=\frac{1}{\int_0^\omega \exp(-ga)\cdot\rho_c(a)da},$$

$$C(a)=n\cdot\exp(-ga)\cdot\rho_c(a),$$

$$1=\int_0^\omega \exp(-ga)\cdot\rho_c(a)\cdot n(a)da.$$

Как и модель Престона – Коула, модель IIASA в частном случае сводится к стандартному виду интегрального уравнения Лотки – Вольтерра [16, с. 17–18; 14, с. 154] для стабильного населения.

[12] Авторы в момент работы над данной темой сотрудничали с Международным институтом прикладного системного анализа (International Institute for Applied System Analysis – IIASA, Laxenburg, Austria).

Сравнение двух систем Престона – Коула и IIASA показывает, что внешне они чрезвычайно похожи, а в случае стабильного населения – идентичны. Различия проистекают из двойственности восприятия математического отображения замещения поколений: рассматривается ли воспроизводство населения как непрерывное замещение условных или реальных поколений. Там, где Престон и Коул используют характеристику r вдоль оси возраста, Артур и Воупел оперируют ее аналогом g вдоль оси времени. В системе Престона – Коула заняты традиционные моментные таблицы смертности (для календарных периодов), в системе IIASA – когортные (по году рождения индивидуумов). Первой системе требуется информация о возрастных коэффициентах прироста населения, а вторая использует данные об изменении чисел рождений во времени. Поэтому преимущества и недостатки каждой из систем очевидны. Возможно, система IIASA теоретически точнее воспроизводит динамику реальных населений, однако практическое ее использование упирается в узость статистической базы, поскольку требует очень длинных непрерывных динамических рядов показателей, достаточно уникальных для прошлых исторических периодов (возрастных коэффициентов смертности, в частности).

Для работы с системой Престона – Коула часто бывает достаточно лишь информации о двух не слишком отдаленных переписях населения или репрезентативных выборочных обследований, что позволяет анализировать воспроизводство таких специфических населений, как малые народности, небольшие локальные общности. Возможно также производить оценки в условиях недостоверного текущего учета населения. При этом появляется проблема качества переписного материала или данных выборочных обследований. Однако практика показывает, что достоверность материалов переписей, особенно в прошлом, в целом выше, чем качество текущего учета движения населения.

Поскольку в основе обеих систем лежит одно и тоже дифференциальное уравнение, то в принципе возможен переход от параметров одной системы к параметрам другой. Так, тождество (14) показывает связь между моментными и когортными таблицами смертности:

$$\exp\left(-\int_0^a r(x,t)dx\right)\cdot \rho_p(a,t) = \exp\left(-\int_0^a g(y,t)dy\right)\cdot \rho_c(a,t), \tag{14}$$

где $\rho_p(a,t)$ и $\rho_c(a,t)$ соответственно функции дожития в моментных и когортных таблицах смертности.

Отсюда следует, что если три из четырех характеристик r, g, ρ_p, ρ_c известны, то можно рассчитать оставшуюся. Такая зависимость обнадеживает в смысле возможностей косвенной оценки функции дожития когортных таблиц смертности, которая, как правило, редко бывает доступна. Так, если $\varphi(a,t)$ – обозначение интенсивности изменения во времени когортной функции дожития ρ_c:

$$\varphi(a,t) = \left[\frac{\partial \rho_c(a,t)}{\partial t}\right] / \rho_c(a,t),$$

то, опустив промежуточные шаги, запишем следующее выражение:

$$r(a,t) = g(a,t) + \varphi(a,t).$$

Это тождество говорит о том, что функция изменяется со временем в силу как прироста чисел родившихся, так и изменения в коэффициентах смертности. Используя тождество (14), Артур и Воупел в итоге получили следующее выражение[13]:

$$\rho_p(a,t) = \rho_c(a,t) \cdot \exp\left(\int_0^a \varphi(x,t)dx\right).$$

Последнее уравнение можно применять для оценки ошибки при использовании моментных таблиц смертности вместо когортных или при изучении соответствия динамики смертности в реальных и условных поколениях.

7. Практическое использование обобщенной модели воспроизводства населения Престона − Коула

Как уже было сказано, наиболее перспективными возможностями система Престона − Коула обладает в сфере производства косвенных оценок неизвестных демографических параметров. Данная концепция взаимосвязи компонент динамики населения исторически выросла из необходимости получения более надежных оценок основных демографических характеристик, и поэтому именно в этой области уже достигнуты наиболее существенные практические результаты.

Следует, однако, отметить, что обобщенная модель не снимает всех проблем, связанных с получением качественного отображения реальных демографических процессов. Система взаимосвязей Престона − Коула, разрешая ряд важнейших теоретических вопросов, как бы раздвигает рамки внешних, концептуальных ограничений и в значительной степени переводит ряд проблем в плоскость поиска практических решений. При этом неизбежно возникают новые «головоломки», однако уровень их «проблемности», на наш взгляд, существенно ниже.

В системе Престона − Коула определяющими моментами получения надежных результатов являются качество и частота проведения переписей и масштабных выборочных исследований населения, дающих оценки возрастного распределения населения. Хотя теоретически и не ставятся какие-либо ограничения на счет временного интервала между датами переписи (что является существенным преимуществом), но чем более далеки друг от друга переписи населения, тем более существенные сдвиги в режиме воспроизводства могут происходить в промежутках между ними и тем более усредненный, «мистический» характер приобретает ключевая функция $r(x)$.

Значительный недоучет, «возрастная аккумуляция», особенности учета отдельных состояний (пребывание в браке, в занятости и т.п.), систематические нарушения современных принципов проведения переписей и выборочных исследований − все это также требует особого внимания, поскольку может оказывать существенное влияние на характер и динамику возрастного распределения изучаемой совокупности населения. Этим и другим вопросам точности оценивания уделяется особое внимание в соответствующей литературе (см., например: [23; 32; 38; 42; 48; 51; 53]).

Приведем ряд конкретных примеров, основанных на использовании обобщенной системы взаимосвязи компонент динамики населения Престона − Коула.

[13] Сходный результат получили С. Престон и Э. Коул [50, p. 253].

7.1. Оценка возрастной структуры открытого населения

В табл. 2 приведен расчет возрастной структуры женщин Швеции в 1976 г. по пятилетним возрастным интервалам, взятый из статьи С. Престона и Э. Коула [50]. Оценка доли лиц в каждом возрастном интервале производилась по формуле:

$$ {}_5C_a = {}_5C_0 \cdot \exp\left(\int_0^a \left({}_5r_x + {}_5e_x \right) dx \right) \cdot \frac{{}_5L_a}{{}_5L_0}. $$

Таблица 2.

Расчет возрастной структуры женского населения Швеции в 1976 г.

Возраст, лет	$5 \cdot {}_5r_x$	$\exp(-5 \cdot {}_5e_x)$	$\frac{{}_5L_a}{{}_5L_0}$	$\frac{{}_5C_a}{{}_5C_0}$ **	${}_5C_a$ ***	
					расчет	факт
0–4	−0,11185	1,00000	1,00000	1,00000	0,06176	0,06399
5–9	−0,06716	1,00677	0,99854	1,11829	0,06907	0,06722
10–14	0,15488	0,99417	0,99749	1,08119	0,06678	0,06863
15–19	−0,01180	1,00148	0,99587	1,02368	0,06323	0,06279
20–24	−0,01436	1,02013	0,99340	1,07352	0,06630	0,06645
25–29	−0,15421	1,01423	0,99083	1,20175	0,07422	0,07615
30–34	0,26978	0,99497	0,98767	1,14428	0,07067	0,07484
35–39	0,12165	0,98983	0,98319	0,94298	0,05824	0,05751
40–44	−0,00090	0,98926	0,97649	0,88718	0,05480	0,05246
45–49	−0,07114	0,98833	0,96682	0,91544	0,05654	0,05583
50–54	−0,17321	0,98642	0,95245	1,02243	0,06315	0,06148
55–59	0,11577	0,98501	0,93075	1,03021	0,06363	0,06215
60–64	−0,04301	0,98386	0,89807	0,95924	0,05925	0,05935
65–69	0,04364	0,98354	0,84714	0,90493	0,05589	0,05602
70–74	0,08447	0,98385	0,76448	0,76653	0,04734	0,04648
75–79	0,15348	0,98410	0,63254	0,56365	0,03481	0,03435
80–84	0,13461	0,98346	0,44501	0,34347	0,02121	0,02114
85–89	0,18350	0,98300	0,23948	0,15763	0,00974	0,00970
90–94	0,29375	0,98291	0,08733	0,04527	0,00280	0,00294
95–99	0,05377	0,98272	0,01844	0,00802	0,00030	0,00047
100 и более	0,41825	0,98313	0,00066	0,00112	0,00007	0,00004

** Сумма по возрасту отношений ${}_5C_a/{}_5C_0$ равна 16,191. *** ${}_5C_0$ = 1/16,191.

Источник: [50, p. 240].

Функция ${}_5L_a$ взята из таблиц смертности 1976 г., а функция ${}_5r_x$ представляет собой коэффициенты прироста в каждом пятилетнем возрастном интервале среднего женского населения в 1976 г. Функция интенсивности сальдо миграции ${}_5e_x$ (в числителе которой разность между выбывшими и прибывшими) определялась аналогично. Интеграл $\int_0^a {}_5r_x dx$ аппроксимировался методом трапеций. Если оценку данного интеграла произвести на основе коэффициентов прироста по однолетним возрастным интервалам, а в остальном технику расчета оставить прежней, то расхождения между фактической и расчетной структурой составит менее одного процента во всех возрастах.

Г. Казелли и Ж. Валлен в своей статье, получившей широкую известность [27], развивая подход, предложенный ранее С. Престоном с соавторами [54], показали, как система взаимосвязей компонент в обобщенной модели может быть применена для оценки роли каждого из демографических факторов (рождаемости, смертности, миграции) в изменениях возрастной структуры населения. Так, в частности, было доказано, что современные тенденции снижения смертности населения пожилого возраста в развитых странах по своему значению, в отличие от предыдущих эпох, играют едва ли не ключевую роль в постарении населения. Прежде доминирующая роль в этом процессе принадлежала, как известно, снижающейся рождаемости. Кроме того, на примере Италии и Франции было показано, что в современных условиях в изменениях возрастной структуры не должна игнорироваться и роль внешней миграции.

7.2. Оценка основных функций таблиц смертности

В табл. 3 показан пример построения среднегодовой таблицы смертности для женщин Швеции (за период с 1966 по 1970 гг.), приведенный в статье С. Престона и Н. Беннетта [49]. Исходя из системы Престона – Коула, получаем следующую формулу:

$$\frac{L(a)}{L(0)} = \frac{\exp\left(\int_0^a r(x)dx\right) \cdot P(a)}{P(0)}.$$

В этом случае средняя ожидаемая продолжительность жизни для новорожденных определяется как

$$e_0^0 = \int_0^\omega \frac{P(a)}{P(0)} \cdot \exp\left(\int_0^a r(x)dx\right) da.$$

Возрастные распределения женщин за 1966 и 1970 гг. были взяты из Шведского регистра населения. С целью учета миграции из коэффициентов $r(x)$ вычтены возрастные коэффициенты сальдо миграции. Интеграл $\int_0^a r(x)dx$ аппроксимировался методом трапеций. Соответственно числа живущих в стационарном населении оценивались как

$$_5L_a = {_5\overline{P}_a} \cdot \exp\left(5 \cdot \sum_0^{a-5} {_5r_x} + 2{,}5 \cdot {_5\overline{r}_a}\right),$$

где $_5\overline{P}_a$ – среднегодовое за период 1966–1970 гг. число лиц в каждом пятилетнем возрастном интервале. Остальные стандартные функции таблиц смертности для точного возраста j определялись по следующим хорошо известным формулам:

$$T_j = \sum_{a=j}^{\omega} {_5L_a}; \qquad l_j = \frac{_5L_j + {_5L_{j-5}}}{10}; \qquad e_j^0 = \frac{T_j}{l_j}.$$

Таблица 3.

Определение средней продолжительности жизни для женщин Швеции за период 1966–1970 гг.

Возраст, лет	$_5\overline{P}_a/5$	$_5\overline{r}_a$	Точный возраст a	$\int_0^a \overline{r}(x)dx$	$_5L_a$	$T(a)$	$l(a)$	$e(a)$	
								расчет	факт
0–4	277957	–0,00111	0	0,00274	278721	4300267	–	–	–
5–9	267024	0,01575	5	0,03937	277745	4021546	55647	72,27	72,52
10–14	259265	–0,00504	10	0,06612	276987	3743801	55473	67,49	67,64
15–19	285619	–0,03325	15	–0,02962	277284	3466815	55427	62,55	62,71
20–24	309826	0,00398	20	–0,10281	279557	3189530	55684	57,28	57,83
25–29	267775	0,04860	25	0,02862	275550	2909973	55511	52,42	52,96
30–34	226859	0,01455	30	0,18648	273366	2634428	54892	47,99	48,10
35–39	226394	–0,01602	35	0,18281	271806	2361057	54517	43,31	43,27
40–44	249171	–0,02501	40	0,08024	269990	2089252	54180	38,56	38,49
45–49	263172	–0,00166	45	0,01358	266771	1819262	53676	33,89	33,80
50–54	260557	0,00122	50	0,00639	262228	1552491	52900	29,35	29,21
55–59	254801	0,00038	55	0,00429	255897	1290263	51813	24,90	24,75
60–64	235205	0,01603	60	0,04533	246111	1034366	50201	20,60	20,43
65–69	201225	0,02037	65	0,13632	230614	788254	47653	16,53	16,35
70–74	160846	0,02225	70	0,24287	205062	557640	43568	12,80	12,58
75–79	114792	0,02562	75	0,36254	164953	352578	37002	9,53	9,32
80–84	66452	0,03368	80	0,51076	187625	187625	27570	6,81	6,69
85–89	37059	–	85	–	–	–	–	–	–

Источник: [49, p. 95].

Особая техника требуется для «обработки» последнего открытого возрастного интервала, что важно иметь в виду при построении кратких таблиц смертности.

Ввиду того, что имеются различные предложения на этот счет, а также в целях экономии места, эту подробность считаем целесообразным опустить[14].

Данный метод показал хорошие результаты при оценке смертности на материалах Индии и Южной Кореи.

С помощью приведенных выше соотношений нельзя получить среднюю продолжительность жизни для нулевого возраста. Чтобы оценить этот показатель, необходимо привлечь дополнительную информацию о числе родившихся и таким образом получить независимую оценку $P(0)$.

Отметим, что возрастная структура населения Швеции в рассматриваемый период отличалась значительной нерегулярностью. Однако, несмотря на то, что функция $r(x)$ оказалась немонотонной, полученные показатели средней продолжительности жизни мало отличались от данных официальной таблицы смертности.

С другой стороны, если требуется специальное рассмотрение и самостоятельное использование функции дожития, то необходимо более точное соответствие идее стационарности, согласно которой $l(x)$ должна быть плавной, монотонно убывающей функцией.

Кроме того, материалы переписей могут иметь более или менее существенные изъяны (не только связанные с проблемами недоучета или двойного счета, но и, к примеру, возрастной аккумуляции на возрастах, оканчивающихся на «0» и «5», и др.), которые также вызывают необходимость некоего «сглаживающего» механизма. Эти вопросы подробно рассматриваются в уже упомянутых работах. Среди предлагаемых решений отметим выравнивание с помощью, например, двухпараметрической модели логитов Брасса, использующей свойство линейности отклонений логитов фактической функции $l(x)$ от аналогичной функции, принятой за стандарт [48, p. 214–217]. За стандарт обычно принимается одна из некоторого семейства функций дожития модельных таблиц смертности, например, широко известных таблиц Коула – Демени[15].

Для более точной аппроксимации фактической функции дожития Э. Коул предлагает также использовать переписные распределения населения по однолетним возрастным интервалам и итерационный метод нелинейной интерполяции для расчета числа лиц, достигающих точного возраста в течение межпереписного периода [32, p. 194–200]. По сути, речь идет об интерполяции когортных функций дожития на интервале времени между переписями населения. Проверка на материалах Швеции показала высокую точность метода, и на его основе были рассчитаны таблицы смертности Китая (по данным переписей 1953, 1964 и 1982 гг.) [32, p. 200–206].

Развитию системы косвенных методов построения таблиц смертности и оценке неполноты учета, основанных на новом синтезе компонент воспроизводства населения, посвящены соответствующие работы Н. Бенетта и Ш. Хориуши. В них, в частности, показано, что при наличии заведомо некачественной информации о распределении чисел умерших по возрасту возможно получение удовлетворительных конечных результатов с помощью использования соответствующей техники расчетов [24]. Все это позволяет надеяться, что данные подходы найдут применение в историко-демографических исследованиях, поскольку появляется возможность более точно оценивать эволюцию смертности в условиях инстабильности, характерной для демографического перехода.

---

[14] Методику расчета для открытого интервала см., например: [32, p. 207–208; 49, p. 93–94].

[15] О существующих модельных таблицах смертности см., например: [6, с. 63–70].

Описанные методы построения таблиц смертности могут оказаться перспективными и при анализе малочисленных нестабильных совокупностей. Как показали сотрудники департамента генетики Юго-Западного фонда биомедицинских исследований США (Техас), ошибки, возникающие при оценке смертности на основе применения системы Престона – Коула для имитированных малочисленных популяций, находятся в рамках случайных статистических ошибок, неизбежных при работе с малыми выборками [38].

Применим рассматриваемый метод построения таблиц смертности к отечественным данным. Хорошо известно, что в определенные исторические периоды население бывшего СССР может рассматриваться как закрытая от внешней миграции популяция (см., например: [3, 7]). Так, внешняя миграция не оказывала практически никакого влияния на динамику численности и изменения возрастной структуры населения СССР в период между переписями населения 1926 и 1937 гг., а затем с конца 1950-х годов и вплоть до конца 1980-х годов, отмеченных всесоюзными переписями населения 1959, 1970, 1979 и 1989 гг.

Для построения усредненной таблицы смертности за период между переписями 1926 и 1937 гг. была рассчитана функция $r(x)$ на основе полученных нами ранее сглаженных распределений населения по однолетним возрастным группам на моменты указанных переписей [20]. В качестве исходной численности условного поколения (корня таблицы смертности) использовалась средняя хронологическая из ряда чисел родившихся за 1926–1936 годы, полученных Е.М. Андреевым, Л.Е. Дарским и Т.Л. Харьковой (АДХ) [3]. Сравнение нашей оценки ожидаемой продолжительности жизни (ОПЖ) для новорожденных с независимыми оценками того же показателя для каждого года из указанного периода приведено на рис. 1. Нельзя не признать высокую степень соответствия результатов, полученных разными методами.

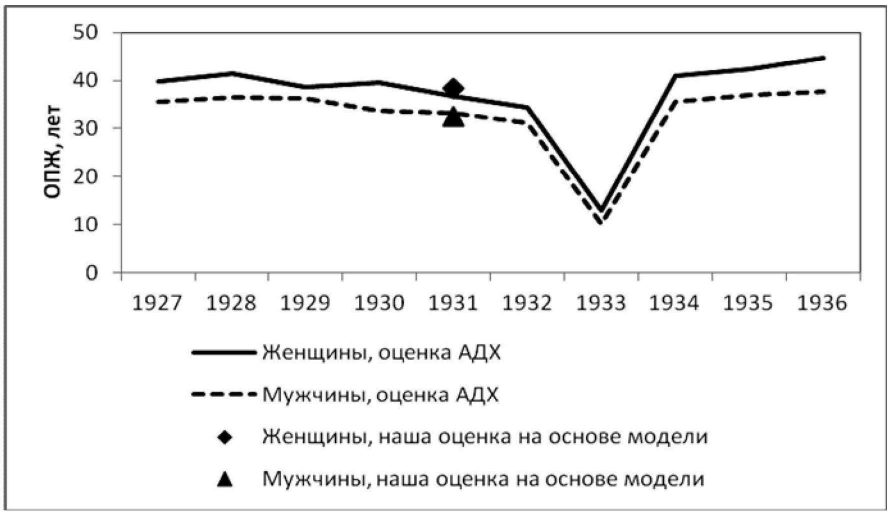

Рис. 1. Ожидаемая продолжительности жизни для мужчин и женщин в СССР, полученная на основе $r(x)$-модели по данным переписей населения 1926 и 1937 гг., в сравнении с независимыми оценками показателя за 1926–1936 гг., полученными Е. Андреевым, Л. Дарским и Т. Харьковой (АДХ)

Источник данных: [3] и расчеты автора.

При построении таблиц смертности методом, в основе которого лежит функция $r(x)$, особую проблему представляет независимое (не основанное на данных переписей) оценивание среднегодового числа родившихся. В первую очередь речь идет о получении надежной оценки ОПЖ для новорожденных, поскольку именно ее величина чувствительна к абсолютному размеру условной когорты, для которой строится таблица дожития. Оценки ожидаемой продолжительности жизни для возрастов старше 1 года (старше 5 лет, если строится краткая таблица смертности) инвариантны по отношению к корню таблицы и получаются непосредственно из данных переписей.

В то же время с проблемой недоучета рождений сталкивались все исследователи, пытавшиеся свести ежегодные балансы изменения численности населения СССР за годы не только между довоенными переписями населения, но и за послевоенный период. Так, В.С. Гельфанд пришел к неизбежности введения поправок на недоучет официально зарегистрированных чисел рождений для всей территории СССР в размере 2–3% за 1960-е годы и 1–2% в 1970-е годы[16]. Поправка, внесенная АДХ для 1950-х годов, составила около 5% [2, с. 69]. Более того, следует иметь в виду, что, вероятнее всего, недоучет родившихся девочек будет выше, чем мальчиков, в особенности в южных регионах страны.

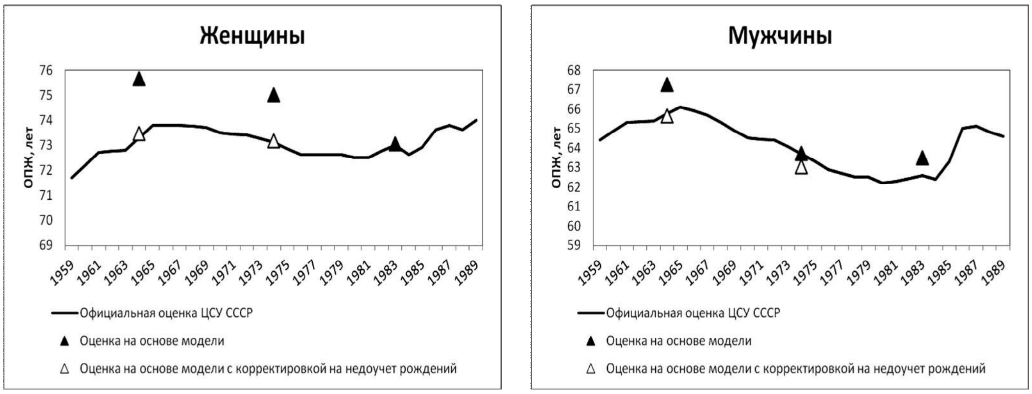

Рис. 2. Оценка ожидаемой продолжительности жизни для женщин (левая панель) и мужчин (правая панель) в СССР, полученная на основе $r(x)$-модели по данным переписей населения 1959, 1970, 1979 и 1989 годов (без поправки и с поправкой на недоучет числа рождений), в сравнении с официальными оценками ЦСУ/Госкомстата СССР за 1959–1989 гг.

Источник данных: Население СССР. 1988: стат. ежегодник. М.: Финансы и статистика, 1989; Народное хозяйство СССР в 1990 году: стат. ежегодник. М.: Финансы и статистика, 1991; расчеты автора.

На рис. 2 представлены оценки ОПЖ за межпереписные периоды (1959–1970, 1970–1979 и 1979–1989 гг.) для новорожденных девочек и мальчиков в СССР, полученные на основе $r(x)$-модели, которые сравниваются с официально опубликованными оценками показателя за 1959–1989 годы. Межпереписные функции $r(x)$, как и в слу-

[16] Рассчитано нами на основе сравнения данных, приведенных В.С. Гельфандом [7, с. 261], с официальными данными, опубликованными в сборнике: Население СССР 1987: стат. сб. М.: Финансы и статистика, 1988. С. 110–111.

чае расчетов за 1926–1937 гг., оценивались на основе сглаженных данных соответствующих переписей населения (см.: [20]), а необходимые числа рождений были взяты из официальных статистических публикаций. Наши первоначальные оценки оказались неправдоподобно высокими для женщин и мужчин между переписями населения 1959 и 1970 гг., а также для женщин за период между переписями 1970 и 1979 гг. Если же применить поправки на недоучет официального числа рождений для 1960-х и 1970-х годов, принятые В.С. Гельфандом, то скорректированные оценки приходят в непротиворечивое соответствие с оценками продолжительности жизни, произведенные ЦСУ/Госкомстатом СССР на основе традиционного метода с использованием ежегодной регистрации числа умерших и оценки числа живущих (рис. 2). Так, увеличение среднегодового числа новорожденных девочек на 3%, а мальчиков – на 2,5% дает снижение рассчитанной по модели величины средней ОПЖ в 1960-х годах для женщин на 2 года, а мужчин на 1,5 года. Приходим к выводу, что значимый недоучет рождений, особенно женского пола, действительно сохранялся в СССР на протяжении не менее четырех послевоенных десятилетий, постепенно сойдя к статистически незначимым величинам лишь к последнему десятилетию существования этого государства.

В результате непосредственного применения метода построения таблиц смертности, основанного на использовании $r(x)$-функции, получаемые значения ожидаемой продолжительности жизни для последовательности возрастов выглядят необычно для специалистов, ожидающих, в соответствии с каноном, иметь монотонно убывающую функцию, по крайней мере, после преодоления когортой первого года своей жизни (эффект, известный в демографии как «парадокс младенческой смертности»[17]). На практике рассчитанная по модели возрастная функция ОПЖ несет на себе следы нерегулярности изменений в численности когорт (см. пример, приведенный на рис. 3 и 4 для периода между переписями 1959 и 1970 гг.), вызванных прошлыми колебаниями рождаемости и смертности, деформирующих реальный возрастной состав населения и нарушающих монотонный характер изменений возрастной функции темпов прироста численности возрастных групп, лежащей в основе рассматриваемого метода. В то же время даже простым сглаживанием полиномом третьего порядка удается получить вполне удовлетворительное начальное приближение к искомой монотонно убывающей табличной функции ОПЖ (рис. 3 и 4). Более надежные способы решения данной проблемы, как уже говорилось выше, хорошо представлены в соответствующей литературе.

---

[17] Число умирающих на первом году жизни существенно превышает число умирающих на втором году жизни, в результате чего величина ожидаемой продолжительность жизни для достигших возраста 1 год значимо превышает показатель для новорожденных.

Рис. 3. Возрастная функция ожидаемой продолжительности жизни для женщин в СССР, полученная на основе $r(x)$-модели по данным переписей населения 1959 и 1970 гг., в сравнении с усредненной функцией из официальных таблиц смертности за 1958–1959 и 1969–1970 гг.

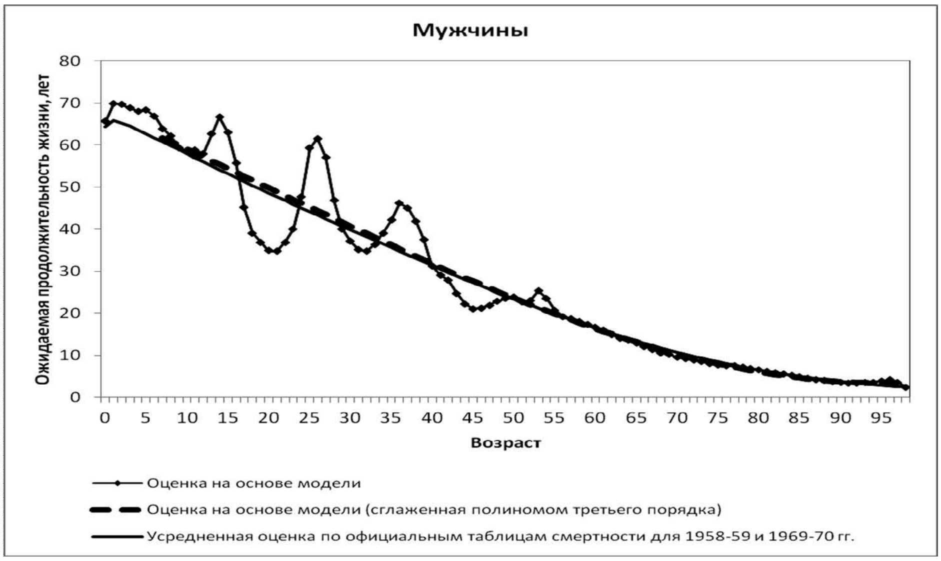

Рис. 4. Возрастная функция ожидаемой продолжительности жизни для мужчин в СССР, полученная на основе $r(x)$-модели по данным переписей населения 1959 и 1970 гг., в сравнении с усредненной функцией из официальных таблиц смертности за 1958–1959 и 1969–1970 гг.

Источник данных рис. 3 и 4: Таблицы смертности и ожидаемой продолжительности жизни населения. М.: Госкомстат СССР, 1989; расчеты автора.

7.3. Оценка сальдо миграции и влияния миграции на режим замещения поколений

Достоверность официальной статистики миграции обычно вызывает наибольшее число вопросов и заставляет сомневаться в получаемых прогнозных оценках по отдельным регионам.

Хорошо известной косвенной методикой определения возрастных коэффициентов сальдо (чистой) миграции является расчет на основе «двойной передвижки» возрастных групп между двумя переписями населения. Сначала, используя коэффициенты дожития подходящих таблиц смертности, возрастное распределение населения по более ранней переписи передвигается с момента времени t на момент $t + n$. Затем полученное распределение сравнивается с фактическим на момент $t + n$. Разница между двумя распределениями представляет собой распределенное по возрасту сальдо миграции, учитывающее вероятность дожития мигрантов между двумя переписями. Полученное таким образом распределение передвигается «назад» для определения чистого результата миграционных перемещений, т.е. без учета смертности.

Применение данной процедуры сталкивается с осложнениями, если период между двумя соседними переписями не кратен длине возрастного интервала (например, имеются пятилетние возрастные группы, а переписи разделяют 9 или 13 лет).

На основании системы Престона – Коула, обобщенной на случай открытого населения, возможно использование достаточно простой альтернативной методики определения возрастных коэффициентов сальдо миграции.

Используя выражение (7), имеем

$$\frac{P(a)\cdot \exp\left(\int_0^a r(x)dx\right)}{P(0)\cdot \rho(a)} = \exp\left(-\int_0^a \gamma(x)dx\right)$$

или

$$-\int_0^a \gamma(x)dx = \ln\left(\frac{P(a)}{P(0)\cdot\rho(a)}\right) + \int_0^a r(x)dx. \tag{16}$$

Поскольку $\gamma(x)$ представляет собой функцию нетто-миграции, где результат определяется как разность между выбывшими и прибывшими, то имеет смысл ввести обратную по знаку функцию $h(x) = -\gamma(x)$, в которой результат миграции интерпретируется в более привычной форме (как разность между прибывшими и выбывшими). Тогда, обозначив дискретный аналог интеграла $-\int_0^a \gamma(x)dx$ как $H(a)$ и заметив, что $H(a)$ есть кумулятивная функция, искомую функцию $h(x)$ получим последовательным вычитанием соседних по возрасту значений функции $H(a)$.

В качестве примера рассчитаем возрастные показатели сальдо миграции женского населения РСФСР в среднегодовом исчислении за период между переписями 1970 и 1979 гг., разделенных девятью годами. Следует оговориться, что в силу ряда грубых приближений, допущенных в расчетах, данный пример (табл. 4), может являться скорее иллюстрацией взаимосвязи рассматриваемых компонент динамики населения. В этих и во всех последующих расчетах данного раздела использовались официальные данные о возрастном распределении женщин на моменты соответствующих переписей населения, к которым не применялись никакие техники сглаживания.

Среднее за межпереписной период население и его возрастные коэффициенты прироста исчислялись следующим образом:

$$ {}_5\overline{P}_a = \frac{{}_5P_a^{79} - {}_5P_a^{70}}{{}_5\overline{r}_a \cdot 9}; \qquad {}_5\overline{r}_a = \ln\left(\frac{{}_5P_a^{79}}{{}_5P_a^{70}}\right)/9. $$

Население в точном возрасте:

$$ \overline{P}_j = \frac{{}_5\overline{P}_j + {}_5\overline{P}_{j-5}}{10}. $$

Численность населения в нулевом возрасте $P(0)$ определялась как средняя хронологическая из чисел родившихся, уменьшенная пропорционально доле девочек, принятой за константу. Вероятность дожития до каждого возраста оценивалась как средняя из чисел доживающих в соответствии с официальными таблицами смертности за 1969–1970 и 1978–1979 гг.[18] Интегральные функции аппроксимировались суммированием как обычные кумулятивные функции:

$$ \int_0^a r(x)dx \approx R(a); \qquad -\int_0^a \gamma(x)dx \approx H(a). $$

Тогда вместо выражения (16) имеем

$$ \overline{H}(a) = \ln\left(\frac{\overline{P}(a)}{P(0)\cdot\overline{\rho}(a)}\right) + \overline{R}(a). $$

Используя данные табл. 4, можно рассчитать для России нетто-коэффициент воспроизводства открытого для миграции населения, преобладавший в межпереписной период. Для этого аппроксимируем формулу (9) следующим выражением:

$$ R_0' \approx 5\cdot\sum_{15}^{50}\overline{V}(a)\cdot\exp\left(\overline{R}(a)\right). $$

Необходимое для расчета среднегодовое распределение родившихся по возрасту матери было определено как

$$ {}_5\overline{N}_a = \frac{{}_5N_a^{79} - {}_5N_a^{70}}{{}_5\overline{g}_a \cdot 9}, $$

[18] Официальная таблица смертности за 1978–1979 гг. для РСФСР была опубликована Госкомстатом СССР в кн.: Таблицы смертности и ожидаемой продолжительности жизни населения. М.: Госкомстат СССР, 1989. Таблицы за 1958–1959 и 1969–1970 гг. для России не публиковались и были взяты нами в архивах того же ведомства.

где ${}_5\overline{g}_a$ – среднегодовой темп прироста чисел родившихся в каждом материнском возрастном интервале (рассчитан как ${}_5\overline{g}_a = \ln\left(\frac{{}_5N_a^{79}}{{}_5N_a^{70}}\right)/9$), а доля женщин, родивших ребенка в точном возрасте, определялась следующим образом: $\overline{V}_j = \frac{{}_5\overline{N}_j + {}_5\overline{N}_{j-5}}{10 \cdot \sum_{15}^{50} {}_5\overline{N}_j}$.

Таблица 4.

Расчет коэффициентов чистой миграции (сальдо миграции) женского населения РСФСР в 1970–1979 гг.

Возраст, лет	$\overline{R}(a)$	$\exp(\overline{R}(a))$	$\overline{P}(a)$	$\overline{P}(a)/\overline{P}(0)$	$\rho(a)$	$\overline{H}(a)$	Возраст, лет	${}_5h_a$
0	–	–	1006362	1,00000	1,00000	–		
5	0,06845	1,07085	1018037	1,01160	0,97305	0,10525	0–4	0,02105
10	–0,04600	0,95504	1084678	1,07782	0,97269	0,05663	5–9	–0,00972
15	–0,22695	0,79696	1154638	1,14734	0,97079	–0,05986	10–14	–0,02330
20	–0,22470	0,79876	1151742	1,14446	0,96757	–0,05680	15–19	0,00061
25	–0,05835	0,94332	1012413	1,00601	0,96441	–0,01581	20–24	0,00820
30	0,22120	1,24757	950161	0,94415	0,95915	0,20544	25–29	0,04425
35	0,00150	1,00150	941043	0,93509	0,95267	–0,01713	30–34	–0,04431
40	–0,05255	0,94881	1018191	1,01175	0,94349	0,01730	35–39	0,00689
45	–0,10050	0,90439	1020636	1,01418	0,93081	–0,01472	40–44	–0,00640
50	–0,00935	0,99069	889124	0,88350	0,91196	–0,04105	45–49	–0,00527
55	0,28105	1,32452	841379	0,83606	0,88448	0,22475	30–54	0,03316
60	0,17025	1,18560	760514	0,75571	0,84705	0,05615	55–59	–0,03372
65	0,12185	1,12958	691737	0,68736	0,79165	–0,01941	60–64	–0,01311
70	0,25055	1,28473	575036	0,57140	0,71001	0,03336	65–69	0,01033
75	0,47415	1,60665	388059	0,38361	0,38602	0,05562	70–74	0,00443

Источник данных: рассчитано автором на основе: Население СССР. 1987: стат. сб. М., 1988. С. 50–51, 112, а также с использованием архивных данных Росстата.

Полученный таким образом для 1970-х годов нетто-коэффициент воспроизводства женского населения России с учетом миграции (R_0') оказался равным 0,921.

Если использовать оценки возрастной функции нетто-миграции, представленные в табл. 4, то можно рассчитать величину нетто-коэффициента воспроизводства женского населения при условии отсутствия миграции (коэффициент замещения поколений в стабильном населении, закрытом для миграции, или иначе общепринятый, публикуемый в справочниках чистый коэффициент воспроизводства населения, R_0):

$$R_0 \approx 5 \cdot \sum_{15}^{50} \overline{V}(a) \cdot \exp(\overline{R}(a) - \overline{H}(a)).$$

Полученное значение (0,895) говорит о том, что изменившиеся в 1970-е годы миграционные потоки в пользу России (см. рис. 5) играли положительную роль для воспроизводства поколений. Поскольку Россия во второй половине 1970-х годов стала принимать больше мигрантов, чем отдавать в другие республики бывшего СССР, то режим замещения численности поколений, хотя и был суженным (на смену одной женщине условного поколения приходило менее одной девочки даже с учетом положительной влияния миграции), но не в такой мере, как об этом свидетельствует общепринятый нетто-коэффициент воспроизводства, опирающийся только на текущие оценки рождаемости и смертности. Каждое поколение женщин, вступая в репродуктивный возраст, в условиях наблюдаемой рождаемости, смертности и миграции замещалось бы дочерними поколениями на 92,1% против 89,5% при нулевом сальдо миграции. Оценки показателей R_0, R_0', рассчитанные тем же способом для периода 1959–1970 гг., демонстрируют обратное соотношение (соответственно 0,992 и 0,974), что можно интерпретировать как допущение отрицательной роли внешней миграции в замещении женского населения РСФСР в 60-е годы прошлого века, что хорошо согласуется с существующими оценками миграционного прироста (миграционной убыли для тех лет, см. рис. 5).

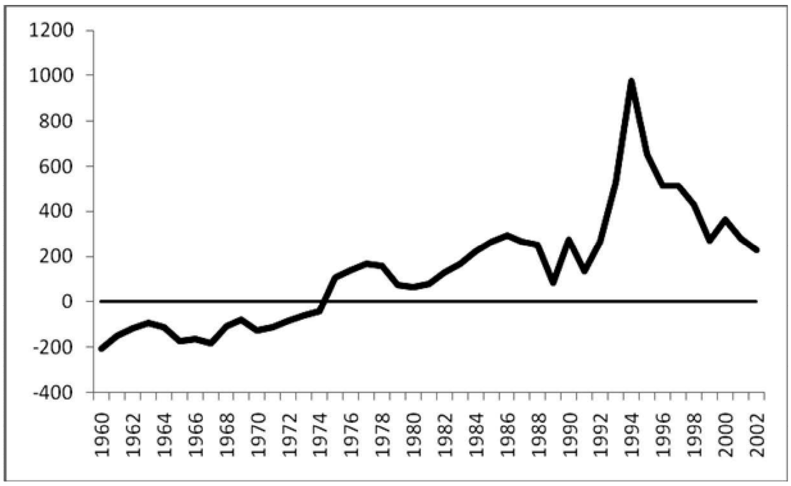

Рис. 5. Официальная оценка сальдо внешней миграции России, 1960–2002 гг., тыс. человек

Источник данных: Демографический ежегодник России 1999. М: Госкомстат России, 1999; Демографический ежегодник России 2006. М.: Росстат, 2006.

Произведя аналогичные расчеты для межпереписных периодов 1979–1989 и 1989–2002 гг.[19], приходим к выводу, что роль миграции в воспроизводстве населения России в последней трети XX в. усиливалась, что и следовало ожидать в связи с ростом миграционного притока. Соответствующие оценки R_0, R_0' для периода 1979–1989 гг. составили 1,005 и 1,031, а для периода 1989–2002 гг. – 0,624 и 0,743.

Заметим, что разница между двумя показателями отражает общее, кумулятивное влияние фактора миграции на режим замещения поколений: через изменение численности женского населения, через изменение его возрастной структуры и через различия в уровне рождаемости мигранток и немигранток. В то же время не нужно забывать, что оба показателя – нетто-коэффициенты для открытого и закрытого для миграции населения – представляют собой оценку режима замещения не реальных, а условных поколений. Фактически речь идет о потенциально возможной степени замещения поколений, вступающих в детородный возраст, ожидаемой при условии неизменности интенсивности рождаемости, смертности и внешней миграции, зафиксированных в расчетный период. Так, социально-демографическая политика, активизировавшаяся в 1980-х годах, как известно, вызвала кратковременный «бэби-бум», что и зафиксировано было на уровне показателей для условных поколений – нетто-коэффициент воспроизводства, казалось бы, существенно приподнялся и даже без миграционной подпитки достиг уровня простого воспроизводства (превысил единицу). В то же время, как показывает подробный анализ, замещение реальных поколений в этот период оставалось суженным. Нетто-коэффициенты воспроизводства превысили единицу, главным образом, за счет сильного ускорения темпов формирования семей (календарных сдвигов в сторону более ранних браков и рождений) под влиянием новых мер политики, а не по причине того, что поколения, находящиеся в этот период в детородном возрасте, желали иметь и фактически родили больше детей, чем их предшественники (подробнее см.: [12]). Расплатой за спровоцированное политикой ускорение темпов формирования семей в 1980-е годы стало более резкое вхождение России в полосу отрицательной демографической динамики в первой половине 1990-х годов, чем можно было бы ожидать в условиях плавных эволюционных изменений. Исчерпав потенциал для роста, возрастные коэффициенты рождаемости резко обвалились, что и отразилось на величине обоих обсуждаемых показателей воспроизводства. В то же время нельзя не заметить, что после распада СССР значительный миграционный прирост в пользу России существенным образом смягчил отрицательные последствия резких изменений в темпах формирования семей для режима воспроизводства ее населения (рис. 6). На смену женским когортам в этот период фактически приходили не столь малочисленные когорты детей, как это можно было бы ожидать в отсутствие миграционного притока.

В целом наши расчеты подтвердили, что нельзя недооценивать роль миграционного фактора в послевоенной истории эволюции воспроизводства населения Рос-

---

[19] В расчетах для межпереписных периодов 1979–1989 и 1989–2002 гг., в отличие от расчетов за предшествующие периоды, мы использовали официальные возрастные распределения женского населения и рождений для однолетних, а не пятилетних возрастных групп. Однако, как хорошо известно из учебников, переход к более точному оцениванию демографических параметров при переходе от пятилетних к однолетним возрастным группам населения лишь в незначительной степени сказывается на величине интегральных индикаторов. Поэтому возможность динамических сравнений результатов наших расчетов едва ли может быть поставлена под сомнение.

сии, которая все время усиливалась еще во время существования СССР, но обрела особую значимость в постсоветский период.

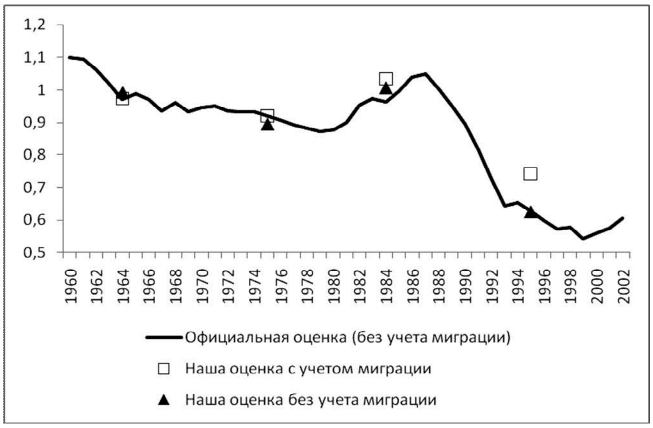

Рис. 6. Оценки нетто-коэффициента воспроизводства населения России с учетом и без учета миграции, полученные автором на основе применения обобщенной модели воспроизводства населения для межпереписных периодов 1959–1970, 1970–1979, 1979–1989 и 1989–2002 гг. в сравнении с официальными ежегодными оценками нетто-коэффициента воспроизводства населения, полученными традиционным способом

Источник данных: Демографический ежегодник России 1999. М: Госкомстат России, 1999; Демографический ежегодник России 2006. М.: Росстат, 2006; расчеты автора на основе опубликованных и неопубликованных данных Росстата.

Заключение

В 1980-е годы в разработке центральной проблемы математической демографии – создании обобщенной модели воспроизводства населения, открытой для миграции, и с любым режимом воспроизводства происходит качественный скачок. В одной из своих последних работ крупнейший отечественный методолог и редактор основных учебников по демографии советского периода А.Я. Боярский писал: «До полного развития системы показателей воспроизводства совокупности с учетом ее динамики еще далеко» [5, с. 11]. Это высказывание к началу 1990-х годов теряет свою безоговорочную справедливость. Значительный успех, достигнутый в деле построения наиболее универсальной математической модели воспроизводства численности и возрастной структуры населения, о чем говорилось в нашей статье, оказал заметное влияние на развитие мировой демографической мысли и решение многих прикладных задач в рамках исторической, региональной и других отраслей демографии. К сожалению, для отечественных специалистов этот методологический прорыв оказался слабо замеченным, а если и замеченным, то недостаточно осознанным с теоретической и практической точек зрения. До сегодняшнего дня разделы по математическому моделированию в отечественных учебниках по демографии обходятся без ссылок на существующие обобщения теории стабильного населения на случай с переменным режимом воспроизводства населения, открытого для миграции.

Рассмотренные в статье примеры использования обобщенной модели воспроизводства населения на отечественном материале хотя и носят скорее учебно-методический характер демонстрации возможностей модели, тем не менее, по нашему мнению, расширяют знания о демографической истории страны и дают почву для дальнейших размышлений и исследований. Представляется также перспективным применение рассмотренных подходов не только в историко-демографических и регионально-демографических исследованиях, но и более активное использование обобщенных моделей воспроизводства в анализе недемографических, аналогично воспроизводящихся совокупностей, и, в частности, занятого населения как в целом, так и в профессионально-отраслевом разрезе, на что неоднократно указывал А.Я. Боярский, в том числе и в вышеупомянутой статье.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев Е.М.* Стабильное население // Демографический энциклопедический словарь / отв. ред. Д.И. Валентей. М.: БСЭ, 1985. С. 439–443.

2. *Андреев Е.М., Дарский Л.Е.* Демографические модели воспроизводства // Статистика воспроизводящихся процессов в экономике / ред. колл.: Е.Г. Ясин (науч. ред. тома) и др. (Ученые записки по статистике. Т. 52.) М.: Наука, 1988. С. 138–158.

3. *Андреев Е.М., Дарский Л.Е., Харькова Т.Л.* Население Советского Союза: 1922–1991. М.: Наука, 1993.

4. *Баркалов Н.Б.* Моделирование демографического перехода. М.: Из-во МГУ, 1984.

5. *Боярский А.Я.* Воспроизводящиеся совокупности в статистике // Статистика воспроизводящихся процессов в экономике / ред. колл.: Е.Г. Ясин (науч. ред. тома) и др. (Ученые записки по статистике. Т. 52.) М.: Наука, 1988. С. 5–17.

6. *Васин С.А.* Региональные модельные таблицы смертности // Социологические исследования. 1988. № 4. С. 63–70.

7. *Гельфанд В.С.* Население СССР за 50 лет (1941–1990): стат. справочник. Пермь: Издательство Пермского университета, 1992.

8. Демографические модели: сб. пер. статей / под ред. и с предисловием Е.М. Андреева, А.Г. Волкова. (Новое в зарубежной демографии.) М.: Статистика, 1977.

9. Демографические процессы и их закономерности / под ред. А.Г. Волкова. М.: Мысль, 1986. С. 33–59; 158–184.

10. *Ермаков С.П.* Демографические модели процессов воспроизводства здоровья населения // Методы исследования / под ред. А.Г. Вишневского. М.: Мысль, 1986. С. 133–150.

11. *Захаров С.В.* Демографический анализ // Демография: современное состояние и перспективы развития / под ред. Д.И. Валентея. М.: Высшая школа, 1997. С. 153–167.

12. *Захаров С.В.* Демографический анализ эффекта мер семейной политики в России в 1980-х гг. // SPERO. Социальная политика: Экспертиза, Рекомендации, Обзоры. 2006. № 5. С. 33–69.

13. *Захарова Н.Н.* Экономико-статистический анализ эффективности воспроизводства рабочей силы в отраслевом аспекте (на материалах железнодорожного транспорта): автореф. дисс. к.э.н. М.: ВЗФЭИ, 1990.

14. Народонаселение. Энциклопедический словарь / ред. колл.: Г.Г. Меликьян (гл. ред.) и др. М.: БРЭ, 1994. С. 475–481.

15. *Пирожков С.И.* Демографическая эволюция и модели воспроизводства населения // Демографические тетради. Вып. 6–7 / отв. ред. В.С. Жученко, В.С. Стешенко. Киев: Институт экономики АН УССР, 1972. С. 170–179.

16. *Пирожков С.И.* Демографические процессы и возрастная структура населения. М.: Статистика, 1978. С. 17–18.

17. Система знаний о народонаселении / под ред. Д.И. Валентея. М.: Статистика, 1976. С. 303.

18. *Сороко Е.Л.* О математическом моделировании в демографии //Методы исследования / под ред. А.Г. Вишневского. М.: Мысль, 1986. С. 119–132.

19. *Хольцер Е.З.* Модель стабильного населения // Демографические прогнозы / под ред. А.Г. Волкова. М.: Статистика, 1973. С. 74–112.

20. *Adametz S., Blum A., Zakharov S.* Disparités et variabilités des catastrophes démographiques en URSS. Dossiers et Recherches, № 42. Paris: INED, 1994.

21. *Arthur B.W.* The Ergodic Theorems of Demography: A Simple Proof // Demography. 1982. Vol. 19 (4). P. 439–445.

22. *Artur W.B., Vaupel J.W.* Some General Relationships in Population Dynamics // Population Index. 1984. Vol. 50(2). P. 214–226.

23. *Bennett N.G., Horiuchi Sh.* Estimating the Completeness of Death Registration in a Closed Population // Population Index. 1981. Vol. 47(2). P. 207–221.

24. *Bennett N.G., Horiuchi Sh.* Mortality Estimating from Registered Deaths in Less Developed Countries // Demography. 1984. Vol. 21. P. 217–233.

25. *Bourgeois-Pichat J.* The Concept of a Stable Population: Application to the Study of Populations of Countries with Incomplete Demographic Statistics. Population Studies. № 39. N.Y.: United Nations, 1968. (ST/SOA/Series A/39).

26. *Brass W.* Methods for Estimating Fertility and Mortality from Limited and Defective Data. Chapel Hill, N.C.: University of North Carolina Press, 1975.

27. *Caselli G., Vallin J.* Mortality and Population Aging // European Journal of Population. 1990. Vol. 6(1). P. 1–25.

28. *Caselli G., Vallin J., Wunsh G.* Chapter 20. Les modèles de la population // Démographie: analyse et synthèse / ed. par G. Caselli, J. Vallin, G. Wunsh. Vol. I. La Dynamique des populations. Paris: INED, 2001. P. 421–457.

29. *Caselli G., Vallin J., Wunsh G.* Chapter 20. Population Models // Demography: Analysis and Synthesis / ed. par G. Caselli, J. Vallin, G. Wunsh. Vol. 1. N.Y. and L.: Academic Press, 2006. P. 248–267.

30. *Coale A.J.* The Effects of Changes in Mortality and Fertlity on Age Composition // Milbank Memorial Fund Quarterly. 1956. Vol. 34 (1). P. 79–114.

31. *Coale A.J.* The Growth and Sructure of Human Populations: A Mathematical Investigation. Princeton: Princeton University Press, 1972.

32. *Coale A.J.* Life Table Construction on the Basis of Two Enumerations of a Closed Population // Population Index. 1984. Vol. 50. P. 193–213.

33. *Coale A.J., John M., Richards T.* Calculation of Age-Specific Fertility Schedules from Tabulations of Parity in Two Censuses // Demography. 1985. Vol. 22(4). P. 611–624.

34. Demography: Analysis and Synthesis; A Treatise in Population Studies / ed. by G. Caselli, J. Vallin, G. Wunsh. Vol. 1. N.Y. and L.: Academic Press, 2006.

35. Démographie: analyse et synthèse / ed. par G. Caselli, J. Vallin, G. Wunsh. Vol. 1. La dynamique des populations. Paris: INED, 2006.

36. *Dublin L.I., Lotka A.J.* On the True Rate of Natural Increase as Exemplified by the Population of the United States, 1920 // Journal of the American Statistical Association. 1925. Vol. XX. P. 305–339.

37. *Foerster H. von* Some Remarks on Changing Populations // The Kinetics of Cellular Proliferation / ed. by P. Stohlman. N.Y. and L.: Grune and Stratton, 1959. P. 382–407.

38. *Gage T.B., Dyke B., MacCluer J.W.* Estimating Mortality Level for Small Populations: an Evaluation of Pair of Two-Census Methods // Population Studies. 1986. Vol. 40(2). P. 263–273.

39. *Horiuchi S., Preston S.H.* Age-Specific Growth Rates: The Legacy of Past Population Dynamics // Demography. 1988. Vol. 25(3). P. 429–441.

40. Indirect Techniques for Demographic Estimation. Manual 10. N.Y.: United Nations, 1983. (ST /ESA /Series A/81).

41. *Keyfitz N.* On the Momentum of Population Growth // Demography. 1971. Vol. 8. P. 711–780.

42. *Kim Y.J.* Examination of the Generalized Age Distribution; Methods for Estimating Fertility and Mortality from Limited and Defective Data. Chapel Hill: Univ. of North Carolina, 1975.

43. *Kim Y.J.* Examination of the Generalized Age Distribution // Demography. 1986. Vol. 23(3). P. 452–455.

44. *Kuczynski R.R.* Fertility and Reproduction. Methods of Measuring the Balance of Births and Deaths. Berlin: Akademie-Verlag, 1982.

45. *Langhaar H.L.* General Population Theory in the Age-Time Continuum // Journal of the Franolin Institute. 1972. Vol. 293(2). P. 202.

46. *Lotka A.J.* The Stability of the Normal Age Distribution // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. 1922. Vol. VIII. P. 339–345.

47. Methods of Estimating Basic Demographic Measures from Incomplete Data. Manual 4. N.Y.: United Nations, 1967 (ST/ SOA /Series A/ 42).

48. *Preston S.H.* An Integrating System for Demographic Estimation from Two Age Distributions // Demography. 1983. Vol. 20(2). P. 213–226.

49. *Preston S.H., Bennett N.G.* A Census-based Method for Estimating Adult Mortality // Population Studies. 1983. Vol. 37(1). P. 93–94.

50. *Preston S.H., Coale A.J.* Age Structure, Growth, Attrition and Accession: A New Synthesis // Population Index. 1982. Vol. 48(2). P. 217–259.

51. *Preston S.H., Coale A.J.* Age Intervals and Time Intervals: Reply to Kim // Demography. 1986. Vol. 23(3). P. 463–465.

52. *Preston S.H., Heuveline P., Guillot M.* Demography: Measuring and Modeling Population Processes. Oxford and Malden (Massachusetts): Blackwell Publishers, 2001.

53. *Preston S.H., Hill K.* Estimating the Completeness of Death Registration // Population Studies. 1980. Vol. 34(2). P. 349–366.

54. *Preston S.H., Hims C., Eggers M.* Demographic Conditions Responsible for Population Aging // Demography. 1989. Vol. 26(4). P. 691–704.

55. Readings in Population Research Methodology. Project editors: Bogue D.J., Arriaga E.E., Anderton D.L. Vol. 5. Population Models, Projections and Estimates. Chicago (Illinois): United Nations Fund for Population Activities, 1993.

56. *Truco E.* Mathematical Models for Cellular Systems. The Foerster Equation // Bulletin of Mathematical Biophisics. 1965. Vol. 27(3–4). P. 286–471.