Формирование и оптимизация структуры портфеля государственных заказов в условиях ограниченного бюджета методами математического программирования

Беленький А.С., Кузнецова И.В., Чубарова А.В., Шамрин А.Т.

Рассматривается проблема формирования портфеля государственных заказов любого из трех уровней – федерального, регионального и муниципального – в условиях ограниченного бюджета и предлагается подход к решению этой проблемы в ситуациях, в которых выполнение некоторых заказов, включаемых в портфель заказов, позволяет получить (генерировать) средства, которые могут быть использованы для финансирования других заказов, включаемых в портфель. Идея подхода состоит в оценке максимального числа равноважных заказов, которые могут быть включены в портфель заказов (с учетом возможности инвестирования средств, генерируемых частью из этих заказов, в другие заказы в рамках формируемого портфеля), и последующем разбиении всего формируемого портфеля заказов на независимые группы заказов. Указанная оценка и разбиения осуществляются из решения специальных задач булева и линейного программирования соответственно, причем внутри каждой группы включенные в нее заказы финансируются как из части исходного бюджета, так и из средств, генерируемых некоторыми из заказов, включаемых в группу. Если такого рода разбиение на группы технологически и юридически допустимо, то администрация может сформировать портфель государственных заказов как набор таких групп заказов и выставлять на торги каждую из групп как один лот, т.е., по существу, организовывать комбинаторные аукционы при размещении заказов, включенных в портфель.

Ключевые слова: булево программирование; комбинаторные аукционы; линейное программирование; разбиение портфеля государственных заказов.

Беленький А.С. – профессор кафедры высшей математики на факультете экономики и кафедры управления государственными и муниципальными заказами на факультете государственного и муниципального управления, ведущий научный сотрудник Международной лаборатории анализа и выбора решений НИУ ВШЭ. E-mail: belenky_alexander@yahoo.com

Кузнецова И.В. – профессор кафедры управления государственными и муниципальными заказами на факультете государственного и муниципального управления, директор Института управления закупками и продажами им. А.Б. Соловьева НИУ ВШЭ. E-mail: ikuznetsova@hse.ru

Чубарова А.В. – студентка магистратуры факультета бизнес-информатики НИУ ВШЭ. E-mail: chubarova_anna@inbox.ru

Шамрин А.Т. – первый проректор НИУ ВШЭ. E-mail: ashamrin@hse.ru

Статья поступила в Редакцию в декабре 2011 г.

1. Введение и краткое описание рассматриваемых проблем

В соответствии со статьей 525 Гражданского кодекса Российской Федерации и Федеральным законом 94-ФЗ, под государственными нуждами понимаются потребности Российской Федерации в товарах, работах и услугах, необходимых для обеспечения функций Российской Федерации либо потребностей субъектов Российской Федерации, а также необходимых для выполнения функций субъектов Российской Федерации, которые обеспечиваются за счет средств федерального бюджета или бюджетов субъектов Российской Федерации и внебюджетных источников финансирования.

При этом различают федеральные, региональные и муниципальные государственные заказы, относящиеся соответственно к объектам федерального уровня (Российская Федерация), регионального уровня (субъекты Российской Федерации) и муниципального уровня (муниципальные образования).

Как известно, формирование бюджетов всех трех уровней осуществляется параллельно с формированием заказов на обеспечение государственных нужд на основе заявок на государственное финансирование, поступающих как из органов государственного управления (министерств и ведомств), так и от предприятий и организаций Российской Федерации.

Практически во всех научных публикациях, рассматривающих проблемы государственных заказов, внимание уделяется в основном или исключительно вопросам эффективного размещения и контроля над выполнением некоторого набора сформированных заказов, обеспеченных государственным финансированием. В то же время вопрос о том, какие товары, работы и услуги государство или администрация регионального или муниципального уровня может себе позволить включить в государственный заказ на какой-то конкретный период времени, исходя из имеющегося и прогнозируемого бюджета, а также из возможности привлечения внебюджетных средств, не рассматривается вообще, хотя именно этот вопрос является принципиальным, прежде всего, в силу ограниченности бюджетных и доступных внебюджетных средств. Например, в опубликованной газетой «Коммерсант» информации о состоянии государственного бюджета [1] указывалось, что дефицит бюджета в 2011 г. составит от 1,76 до 2 трлн руб., что неизбежно скажется на возможности включения ряда заказов на товары, работы и услуги в государственный заказ. Поэтому в условиях ограниченности бюджета проблема выбора товаров, работ и услуг (в каком либо разумном смысле) из некоторого набора равноважных для администрации соответствующего уровня, заказ на которые следует профинансировать из государственных средств, остающихся после выделения финансирования на приоритетные товары, работы и услуги, представляется относящейся к числу фундаментальных проблем, связанных с обеспечением государственных нужд.

В наборе объектов, рассматриваемых на предмет возможности их финансирования (или подлежащих финансированию) в рамках государственных заказов любого из трех уровней, могут быть объекты, способные генерировать финансовые средства либо сразу по выполнении этих заказов, либо даже в процессе их выполнения, которые, в принципе, можно было бы инвестировать в другие объекты (функционирование этих объектов обеспечивает государственные нужды). В качестве примера можно привести (платные) скоростные автомобильные дороги федерального, регионального или муниципального значения, строительство которых осуществляется в рамках государственных заказов и которые, будучи построены (полностью или даже частично), генерируют средства в бюджет за счет оплаты водителями права проезда по этим дорогам. Если такого рода работы имеются в составе работ, подлежащих государственному финансированию, отыскание не только оптимального набора товаров, работ и услуг, но и последовательности их финансирования из государственных средств (в рамках государственных заказов) представляет значительный интерес с точки зрения экономии бюджетных средств. Разработка методов решения этих задач создает инструментарий для выявления возможности увеличения числа заказов, которые могут быть обеспечены государственным финансированием без увеличения объема начальных бюджетных (и внебюджетных) ассигнований на государственные нужды и может способствовать уменьшению или устранению дефицита государственного бюджета. Очевидно, что здесь, прежде всего, речь должна идти о разработке системы математических моделей, на основе которых соответствующие задачи выбора набора товаров, работ и услуг, подлежащих финансированию из государственных средств, а также задачи обоснования оптимальной последовательности заказов на них могут быть математически сформулированы.

Необходимо отметить, что, хотя задача отыскания оптимального набора товаров, работ и услуг (из числа равноважных для государства) на любом из трех уровней – федеральном, региональном или муниципальном – и последовательности их выполнения в рамках государственного заказа в условиях ограниченного бюджета сходна с задачей отыскания оптимального набора некоторых заказов и очередности их выполнения, возникающей в частном, например в финансовом секторе, имеется существенное различие между тем, как используются результаты решения этих задач. Именно, в то время как выявление оптимального набора работ и последовательности их выполнения в рамках ограниченного бюджета в частном секторе позволяет наиболее полно использовать имеющиеся ограниченные финансовые средства, при размещении государственного заказа это возможно, вообще говоря, лишь в двух случаях: если а) весь набор работ выполняется одним заказчиком, т.е. на конкурс или аукцион выставляется весь набор работ, товаров и услуг, подлежащих государственному финансированию, например, в муниципальном масштабе, либо б) найденное оптимальное распределение имеющихся бюджетных средств таково, что все работы, товары и услуги в рамках этого оптимального распределения оказываются разбитыми на группы, и каждая такая группа может выставляться на торги в рамках одного лота или быть предметом контракта с единственным исполнителем (в случае, если по каким-либо причинам размещение заказов на выполнение какой-либо из указанных групп работ, на поставки групп товаров и оказания услуг осуществляется не в рамках конкурсной процедуры). При этом средства, генерируемые какими-либо заказами внутри каждой такой группы, могут использоваться для финансирования других заказов из той же группы. Ясно, что подобная «группировка» государственных заказов на отдельные работы, товары и услуги должна быть юридически допустимой как в принципе, так и в конкретных условиях и технологически возможной. Если же такая группировка государственных заказов невозможна хотя бы по одной из этих причин, т.е. юридически и (или) технологически, то все, что можно сделать при отыскании оптимального распределения ограниченного бюджета на выполнение государственных заказов – это найти набор тех заказов, которые могут быть выполнены (если все заказы не могут быть выполнены в силу бюджетных ограничений) и которые в совокупности обеспечивают оптимальное значение некоторых функций цели.

Если же группировка государственных заказов юридически и технологически возможна, но ни случай а) ни случай б) не имеют места, при формировании государственного заказа желательно иметь инструментарий, позволяющий обоснованно определить то минимальное увеличение исходного (ограниченного) бюджета, которое потребуется для того, чтобы выставление интересующего заказчика набора работ, товаров и услуг (например, оптимального набора, полученного в результате решения указанной выше задачи в условиях ограниченного бюджета) в оптимальной последовательности их выполнения на торги в виде, например, какого-либо конкретного набора лотов или в определенном сочетании работ, товаров и услуг из всего их множества (подлежащего государственному финансированию), в рамках какого-либо набора лотов (число которых больше единицы) было обоснованным.

Описание такого инструментария и составляет предмет настоящей статьи.

В статье предлагаются математические модели, с помощью которых, исходя из оптимального реинвестирования средств, генерируемых в результате выполнения или по окончании выполнения некоторых государственных заказов, в другие государственные заказы, можно отыскать минимальное увеличение исходного бюджета при разбиении всего набора работ и услуг на любое заданное число лотов, где в рамках каждого лота на торги выставляются такие государственные заказы, часть которых способна генерировать финансовые средства для выполнения других государственных заказов из этого лота. Соответствующие задачи отыскания указанного разбиения формулируются на основе предложенных моделей как задачи математического программирования с линейными ограничениями.

Кроме того предлагаются математические модели для формирования портфеля государственных заказов в условиях ограниченного бюджета в ситуациях, в которых объединение каких-либо заказов в одну группу не является технологически или юридически допустимым. Несмотря на очевидную практическую важность рассматриваемых задач, насколько известно авторам, настоящая работа является первой публикацией по математическому моделированию проблемы формирования и оптимизации структуры портфеля государственных заказов в условиях ограниченного бюджета. Впервые рассматривается проблема формирования портфеля государственных заказов с учетом возможностей реинвестирования средств, генерируемых некоторыми из проектов, включаемых в государственный заказ, в другие проекты, что принципиально позволяет оценить возможность уменьшения бюджета, требуемого для выполнения государственного заказа. По существу, речь идет о том, чтобы выяснить:

а) насколько эффективно (в смысле бюджетных затрат) можно было бы выполнить весь набор заказов, подлежащих включению в государственный заказ, если бы государство имело возможность перераспределять средства, генерируемые в ходе или в результате выполнения одних заказов, в другие заказы, как это делается в частном секторе;

б) как построить механизм, позволяющий использовать выявленную возможность уменьшения бюджетного финансирования государственного заказа за счет рационального использования средств, генерируемых какими-либо заказами, в рамках государственного регулирования бюджетных средств, выделяемых на выполнение государственного заказа.

В работе показано, что а) отыскать набор заказов, которые могут быть включены в государственный заказ в рамках фиксированного бюджета с учетом возможности реинвестирования средств, генерируемых в ходе или в результате выполнения одних заказов, в другие заказы, можно из решения некоторой задачи булева программирования (математическая формулировка которой предлагается в работе); б) определить бюджет, минимально необходимый для выполнения госзаказа, возможно из решения некоторых задач математического программирования с линейными ограничениями, в частности, линейного программирования; в) в качестве указанного механизма можно использовать механизм комбинаторных аукционов, в которых структура лотов (формируемых из заказов, подлежащих выполнению в рамках государственного заказа), определяется решением другой задачи линейного программирования.

Отметим, что близким по сути проблемам формирования оптимального расписания выполнения работ из некоторого набора работ (однако не в рамках формирования и размещения государственного заказа) посвящены публикации [2–5; 8].

В работе [2] рассмотрена задача календарного планирования комплекса взаимосвязанных работ с учетом реинвестирования прибыли. Предполагается, что а) каждая работа имеет единичную длительность, причем с каждой работой связан некоторый вектор, компоненты которого отражают финансовые показатели работы в течение каждого (дискретного) момента, на которые разделен период планирования, причем положительные компоненты вектора соответствуют генерации средств в ходе выполнения этой работы, в то время как отрицательные компоненты соответствуют потребностям в инвестировании в выполнение работы; б) связь между работами (частичный порядок их выполнения) задается в форме графа (V, E): если работа j не может начаться до завершения работы i, то $(i, j) \in E$; в) каждая работа подлежит обязательному выполнению; в) на выполнение всех работ в рассматриваемом периоде требуется больше финансовых средств, чем имеется в наличии; г) некоторые работы могут финансироваться из средств, полученных от уже выполненных работ. При этих предположениях рассматривается задача поиска календарных сроков выполнения работ в соответствии с заданным порядком их выполнения, максимизирующих чистую приведенную прибыль (с учетом дисконтирования). Для решения поставленной задачи календарного планирования, которая при сделанных предположениях формулируется в виде задачи булева программирования, предлагается использовать так называемый «гибридный» эвристический алгоритм, комбинирующий метод ветвей и границ и метод динамического программирования, который оказывается достаточно эффективным для задач с сильно взаимосвязанными работами. Для более общих задач календарного планирования с отношениями частичного порядка выполнения работ в работе [2] приводится однако лишь содержательная формулировка.

Несколько более общая задача календарного планирования работ с возобновляемыми и складируемыми ресурсами, в которой а) взаимосвязь между работами также задается частичным порядком; б) каждая работа считается непрерывной, и длительность работ может отличаться от единичной, рассмотрена в исследовании [5]. Помимо чистой приведенной прибыли, в [5] рассматриваются такие критерии качества календарного плана, как выполнение всех работ в заданные сроки, общая длительность выполнения всех работ, максимальное запаздывание работ, средневзвешенное время завершения всех работ, суммарный штраф за нарушение сроков выполнения работ и взвешенное число невыполненных в срок работ. В этом исследовании одна из рассматриваемых задач календарного планирования моделируется в виде задач целочисленного линейного программмирования с ограничениями а) на выполнение каждой работы, б) на складируемые и возобновляемые ресурсы, в) с учетом условия взаимосвязи между работами (аналогичными рассмотренным в [2]), в которой минимизируется среднее время завершения всех работ. Анализ сложности задач календарного планирования, рассмотренных в работах [2; 5], содержится в [3, 4, 5]. Помимо [2; 5], эвристические алгоритмы решения задач календарного планирования предложены в исследовании [8].

Хотя предлагаемые в [2; 5] математические модели близки по идее к одной из трех моделей, предложенных в настоящей работе, они отличаются от нее как структурой ограничений, так и содержательным смыслом используемых булевых переменных. В частности, условия предшествования в предложенной в настоящей работе модели задаются в виде системы линейных неравенств с булевыми переменными, что позволяет оставаться в рамках целочисленного линейного программирования и использовать стандартные пакеты программного обеспечения для решения оптимизационных задач с любым из четырех критериев, рассматриваемых в работе. Кроме того, как уже упоминалось, в настоящей статье впервые рассматриваются задачи отыскания минимального увеличения исходного бюджета, необходимого для выполнения всех работ, включаемых в государственный заказ, и разбиения сформированного портфеля заказов на группы финансово-независимых заказов (лоты), подлежащих выставлению на торги.

2. Постановки и математические формулировки задач выбора оптимального набора работ и услуг, рассматриваемых на предмет возможности их финансирования или подлежащих финансированию в рамках государственных заказов, и оптимальной очередности их выполнения

С целью упрощения терминологии в дальнейшем рассматриваемые работы и услуги называются заказами, подлежащими финансированию в рамках некоторого имеющегося (начального) бюджета.

Пусть m – число заказов, рассматриваемых на предмет включения их в государственный заказ или подлежащих финансированию в рамках государственного заказа. Ясно, что если имеющийся бюджет не позволяет выполнить все заказы из множества $\overline{1,m}$ в течение какого-либо промежутка времени $[1,T]$, представляется целесообразным определить тот набор работ из множества $\overline{1,m}$, который может быть выполнен в течение промежутка времени $[1,T]$, в случае, если все работы должны выполняться независимо и в любой последовательности, а также в случае, когда некоторые условия очередности выполнения заказов должны соблюдаться.

Рассмотрим вначале задачу выбора заказов из набора заказов $\overline{1,m}$, которые могут быть закончены в промежутке времени $[1,T]$, в предположении о том, что каждый заказ из множества $\overline{1,m}$ может быть выполнен в течение промежутка времени $[1,T]$ и что заказы могут выполняться в любой последовательности.

Пусть

a_i – объем финансовых средств, требуемых для выполнения заказа i, $i \in \overline{1,m}$;

P – имеющийся объем финансирования на все заказы;

x_i – булева переменная, принимающая значение единица, если заказ i выбирается для выполнения, и принимающая значение ноль в противном случае, $i \in \overline{1,m}$;

c_i – значимость (ценность) заказа i в каких-либо единицах измерения.

Тогда задача отыскания наиболее ценного набора заказов из множества $\overline{1,m}$, которые можно выполнить в течение промежутка времени $[1,T]$, формулируется как одномерная задача о рюкзаке [7].

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \le P, \\ &x_i \in \{0,\ 1\}, \qquad (1) \\ &\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \max. \end{aligned}$$

Здесь естественно предполагать, что выполняются неравенства $a_i < P$, $i \in \overline{1,m}$, имеющие понятный смысл. Методы решения задач (1) хорошо разработаны, хотя, вообще говоря, эта задача принадлежит к числу самых трудных (*NP*-трудных) задач дискретной оптимизации [7].

Рассмотрим теперь задачу (1) с дополнительными условиями на очередность выполнения заказов.

Пусть

Q – множество заказов, каждый из которых связан условиями предшествования хотя бы с одним заказом из $\overline{1,m}$;

t_i – время выполнения заказа i, $i \in \overline{1,m}$;

J_i – множество таких заказов, что заказ i не может выполняться, если не выполняется хотя бы один заказ из этого множества, $J_i \in \overline{1,m}$, $i \in Q$.

Здесь без ограничения общности можно предполагать, что $Q \in \overline{1,k}$, $k \le m$.

В предположении о том, что все заказы выполняются последовательно, задача отыскания наиболее ценного набора заказов из множества $\overline{1,m}$, которые можно выполнить в течение промежутка времени $[1,T]$, формулируется в виде задачи дискретной оптимизации [6]

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \le P, \\ &\sum_{i=1}^{m} t_i x_i \le T, \\ &x_i \le x_\mu, \quad \mu \in J_i, \quad i \in \overline{1,k}, \qquad (2) \\ &x_i \in \{0,\ 1\}, \quad i \in \overline{1,m}, \\ &\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \max. \end{aligned}$$

Задача (2), как и задача (1), принадлежит к числу *NP*-трудных задач дискретной оптимизации, и для ее решения целесообразно строить эвристические алгоритмы, позволяющие решать эту задачу при значениях m и $|J_i|$, представляющих практический интерес [6].

Пусть далее имеется возможность реинвестирования прибыли, получаемой от реализации какого-либо заказа из некоторого набора заказов, в другие заказы из этого набора. Как указывалось выше, решение этой задачи позволяет администрации, формирующей или размещающей государственные заказы на работы и услуги, оценить минимально возможный объем начального финансирования, обеспечивающий выполнение, например, всех заказов, или найти максимальное число равноважных заказов (заказов), которые могут быть обеспечены финансированием в размере имеющегося (начального) объема финансовых средств.

Пусть (см. [6])

$[1,T]$ – период времени, разделенный на $T-1$ (вообще говоря, необязательно равных) промежутков, так что каждый заказ может начинать выполняться в начале каждого из этих сегментов;

ω^i – число сегментов, требуемых для выполнения заказа i, где $|\omega^i| \geq 1$, $i \in \overline{1,m}$;

P – имеющийся объем начального финансирования на все m заказов.

Предполагается, что каждый из m заказов может начаться в любой момент j, $j \in \overline{1,T}$, так что в моменты $\overline{j, \min\left(j+\omega^i, T\right)}$ заказ i требует финансирования, в то время как в моменты $\overline{j+\omega^i+1, T}$ (для $j+\omega^i+1<T$) заказ i генерирует финансовые средства, которые в принципе могут быть использованы для финансирования заказов из множества $\overline{1,m} \setminus \{i\}$ в промежутке $[1,T]$.

Предполагается также, что любой начавшийся заказ не прерывается вплоть до его окончания, а также, что средства, требуемые для выполнения заказа i, не могут быть перераспределены таким образом, чтобы закончить заказ за β^i сегментов, где $\beta^i < \omega^i$, хотя, вообще говоря, объем финансирования заказа i и распределение этого финансирования по ω^i сегментам могут зависеть от того, в какой момент этот заказ начинается.

Пусть далее (см. [6])

x_j^i – булева переменная, принимающая значение единица, если заказ i начинается в момент j, где $i \in \overline{1,m}$, $j \in \overline{1,\ T}$, и принимающая значение ноль в противном случае;

$c_j^i(h)$ – объем финансирования, требуемый на сегменте $[h, h+1]$ для того, чтобы выполнять заказ i, начавшийся в момент j, где $i \in \overline{1,m}$, $j \in \overline{1,T}$, $h \in \overline{j, \min\left(j+\omega^i, T\right)}$;

$d_j^i(h)$ – объем финансовых средств, генерируемых заказом i, начавшимся в момент j, на сегменте $[h, h+1]$, $i \in \overline{1,m}$, где $d_j^i(h) = 0 \ \ \forall h \leq j+\omega^i$.

Здесь для определенности предполагается, что средства в объемах $c_j^i(h)$ и $d_j^i(h)$ требуются и генерируются в момент h соответственно.

Предположим теперь, что в момент $k \in \overline{1,T}$ часть заказов, которые начались до момента $k=1$, продолжаются и требуют финансирования из имеющихся (бюджетных) средств, выделенных на выполнение государственных заказов, образующих набор $\overline{1,m}$, в периоде времени $[1,T]$.

Пусть

q – число заказов, которые начались до момента $k=1$ и продолжаются в течение промежутка времени $[1,T]$;

$\omega^{m+\mu} \le T-1$ – число сегментов внутри промежутка времени $[1,T]$, которые требуются для завершения заказа μ, $\mu \in \overline{1,q}$.

Пусть далее

$c_0^{m+\mu}(h)$ – объем финансирования, требуемый на сегменте $[h,h+1]$ для того, чтобы выполнять заказ $m+\mu$, начавшийся до момента $k=1$, $i \in \overline{1,m}$, $h \in \overline{1,\min(\omega^{m+\mu},T)}$, причем $c_0^{m+\mu}(h)=0$ $\forall h > \min(\omega^{m+\mu},T)$, $\mu \in \overline{1,q}$;

$d_0^{m+\mu}(h)$ – объем финансовых средств, генерируемых заказом i, начавшимся до момента $k=1$ на сегменте $[h,h+1]$, $h \in \overline{\min(\omega^{m+\mu},T-1)+1,T}$, где $d_0^{m+\mu}(h)=0$ $\forall h \le \omega^{m+\mu}$, $\mu \in \overline{1,q}$.

Предположим наконец, что помимо ранее начатых заказов, которые требуют финансирования в течение промежутка времени $[1,T]$, имеются заказы, которые генерируют финансовые средства в промежутке времени $[1,T]$, доступные для использования при формировании заказов множества $\overline{1,m}$.

Пусть

$d_0^{m+q+1}(k)$ – объем финансовых средств, генерируемых всеми заказами, которые к моменту $k=1$ генерируют финансовые средства, доступные для финансирования заказов из множества $\overline{1,m}$ в течение промежутка времени $[1,T]$.

В работе [6] показано, что множество заказов из набора заказов $\overline{1,m}$, которые могут быть начаты в промежутке времени $[1,T]$, и времена начала этих заказов в течение промежутка времени $[1,T]$ таковы, что выполняется следующая система соотношений:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} c_1^i(1)\,x_j^i + \sum_{\mu=1}^{q} c_0^{m+\mu}(1) \le P + d_0^{m+q+1}(1),\\
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} c_j^i(k)\,x_j^i + \sum_{\mu=1}^{q} c_0^{m+\mu}(k) \le P + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{h=1}^{k-1}\Delta_j^i(h)\,x_j^i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1} d_j^i(k)\,x_j^i \quad +\\
&+\sum_{\mu=1}^{q}\sum_{h=1}^{k-1}\Delta_0^{m+\mu}(h) + \sum_{\mu=1}^{q} d_0^{m+\mu}(k) + d_0^{m+q+1}(k),\, k\in\overline{2,T},\\
&\sum_{j=1}^{T} x_j^i \le 1, \quad i\in\overline{1,m},\\
&x_j^i\in\{0,1\}, \quad i\in\overline{1,m}, \quad j\in\overline{1,T},
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Delta_j^i(h) = d_j^i(h) - c_j^i(h), \quad i\in\overline{1,m}, \quad j\in\overline{2,T}, \quad h\in\overline{1,k-1}, \quad k\in\overline{2,T},\\
&\Delta_j^i(h) = 0, \quad \forall h\le j-1
\end{aligned} \tag{4}$$

и

$$\Delta_0^{m+\mu}(h) = d_0^{m+\mu}(h) - c_0^{m+\mu}(h), \quad \mu\in\overline{1,q},\ h\in\overline{1,k-1},\ k\in\overline{2,T}\,. \tag{5}$$

Пусть M является непустым множеством допустимых решений системы линейных уравнений и неравенств (3)–(5). Представляется целесообразным [5] рассматривать следующие четыре целевые функции, определенные на множестве M, которые могут быть интересны для администраций любого из трех уровней при принятии решений о размещении государственных заказов.

А) Число заказов из набора $\overline{1,m}$, которые могут быть завершены в течение промежутка времени $[1,T]$,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{T-\omega^i} x_j^i \to \max_{\left(x_1^1,\,\dots,\,x_T^m\right)\in M}.$$

Б) Число заказов из набора $\overline{1,m}$, которые могут быть начаты в течение промежутка времени $[1,T]$,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{T} x_j^i \to \max_{\left(x_1^1,\,\dots,\,x_T^m\right)\in M}.$$

В) Объем финансовых средств, который может быть накоплен к моменту T в результате завершения (частично или полностью) всех выбранных (из множества $\overline{1,m}$) заказов,

$$P + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=T-\omega^i-1}^{T-2} d_j^i(T)x_j^i + \sum_{k=2}^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{h=1}^{k-1}\Delta_j^i(h)\quad x_j^i \to \max_{\left(x_1^1,\,\dots,\,x_T^m\right)\in M}.$$

Г) Суммарная значимость всех законченных и начавшихся в промежутке $[1,T]$ заказов

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{T-\omega^i}\gamma^i x_j^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=T-\omega^i+1}^{T-1}\delta_j^i x_j^i \to \max_{\left(x_1^1,\ \dots,\ x_T^m\right)\ \in M},$$

где γ^i – значимость законченного заказа i (в какой-либо шкале измерения) и $\delta_j^i=\sum_{k=j}^{T}\varepsilon_k^i$, где ε_k^i – значимость части заказа i, соответствующая периоду (сегменту) k времени функционирования заказа i, $i\in\overline{1,m}$, начавшегося в момент $j\in\overline{T-\omega^i+1,T}$.

Задачи отыскания максимумов целевых функций А)–Г) при ограничениях, задаваемых системой уравнений и неравенств (3)–(5), определяющих множество M, являются задачами булева программирования.

Замечание 1. Нетрудно заметить [6], что многие коэффициенты в математических моделях (3)–(5) обращаются в ноль. Например, $d_j^i(h)=0\ \ \forall h\le j+\omega^i$, $i\in\overline{1,m}$, в частности, $d_{T-1}^i(T)=0, \forall i\in\overline{1,m}$, и эти модели можно было бы записать в форме, включающей только ненулевые коэффициенты при переменных x_j^i, $i\in\overline{1,m}$, $j\in\overline{1,T}$.

Однако, как указывалось в [7], выбранный способ записи моделей обладает двумя преимуществами перед записью, содержащей только ненулевые коэффициенты при переменных. Во-первых, выбранная форма записи делает модели обозримыми, и во-вторых, за счет введения трех $T\times T$ матриц соответственно для коэффициентов $c_j^i(h)$, $d_j^i(h)$ и $\omega_j^i(h)$ для каждого i, $i\in\overline{1,m}$ (которые являются сильно разреженными) оказывается возможным построить простые программы для формирования коэффициентов этих моделей при решении практических задач.

Пусть $\left(\hat{x}_j^i\right)$, $i\in\overline{1,m}$, $j\in\overline{1,T}$ образуют решение задачи (3)–(5) с целевой функцией А) и пусть $\hat{x}_j^i=1$ для $i\in I\subseteq\overline{1,m}$, $j\in J\subset\overline{1,T}$. Из решения задачи тогда следует, что только заказы из множества I могут быть начаты в промежутке времени $[1,T]$, причем эти заказы должны начинаться в моменты, определяемые множеством J.

Пусть

s – число выбранных заказов (по результатам решения задачи (3)–(5)), и пусть $\overline{1,s}$ – номера этих заказов так, что $I=\overline{1,s}\subseteq\overline{1,m}$;

k – число заказов из множества I, которые завершаются в промежутке времени $[1,T]$, причем пусть $\overline{1,k}\subseteq\overline{1,s}\subseteq\overline{1,m}$.

Анализ решения $\left(\hat{x}_j^i\right)$, $i\in\overline{1,m}$, $j\in\overline{1,T}$ может показать, что все заказы из множества $\overline{1,s}$ могут быть разбиты на группы, $M_1,\dots,M_\theta$, такие, что $M_\alpha\cap M_\beta=\emptyset,\ \forall\alpha\ne\beta,\ \alpha,\beta\in\overline{1,\theta}$, $\bigcup_{\varepsilon=1}^{\theta}M_\varepsilon=\overline{1,s}$, причем финансовые средства, генерируемые заказами, входящими в одну группу, достаточны для финансирования всех заказов из этой группы с учетом части начальных бюджетных средств, которые могут оказаться не использованы к моменту начала первого из заказов, входящих в группу. Указанное разбиение (если оно возможно) представляет очевидный интерес для администрации, формирующей набор государственных или муниципальных заказов в рамках имеющегося бюджета, поскольку в этом случае администрация получает возможность выставить на торги не отдельные заказы, а указанные группы заказов, каждую в рамках одного лота, и (в случае успешного проведения торгов) сэкономить бюджетные средства по сравнению с теми, которые потребовались бы, если бы все заказы из множества I выставлялись на торги отдельно, т.е. по принципу один заказ – один лот (в предположении о том, что либо множества заказов, определяемых решениями задач (3)–(5) являются подмножествами множества I, либо что суммарный объем средств, требуемых для выполнения заказов, определяемых этими решениями, превосходит объем средств, требуемых для выполнения заказов, образующих множество I).

В рассматриваемой ситуации представляет интерес отыскание распределения (разбиения) объемов финансовых средств, генерируемых ранее закончившимися заказами, между остающимися (требующими финансирования) заказами.

Для отыскания такого распределения (в соответствии с решением задачи $\left(\hat{x}_j^i\right)$, $i \in \overline{1,m}$, $j \in \overline{1,T}$) можно решить специальную задачу математического программирования.

Пусть $u_\mu^i(t) \geq 0$, $i \in \overline{1,k}$, $\mu \in \overline{i+1,s}$, $t \in \overline{\max\left(j^i + \omega^i + 1, j^\mu\right), j^\mu + \omega^\mu}$ $\forall \mu \in \overline{i+1,k}$, $t \in \overline{\max\left(j^i + \omega^i + 1, j^\mu\right), T}$ $\forall \mu \in \overline{k+1,s}$ – действительные числа и $j^1 \leq j^2 \leq \ldots \leq j^s$ – моменты начала заказов из множества $\overline{1,s} = I$, определяемые решением задачи $\left(\hat{x}_j^i\right)$ $i \in \overline{1,m}$, $j \in \overline{1,T}$.

Заметим прежде всего, что из решения задачи (3)–(5) следует, что числа $c_j^i(t)$ при $t \in \overline{j^i, j^i + \omega^i}$, $i \in \overline{1,k}$ определяют объемы финансовых средств, требуемых для выполнения заказа i в промежутке $\overline{j^i, j^i + \omega^i}$, в то время как числа $d_j^i(t)$ при $t \in \overline{j^i + \omega^i + 1, T}$ определяют объемы финансовых средств, генерируемых заказом i в промежутке времени $\overline{j^i + \omega^i + 1, T}$, $i \in \overline{1,k}$. Аналогично, числа $c_j^i(t)$, $t \in \overline{j^i, \min\left(j^i + \omega^i, T\right)}$, $i \in \overline{k+1,s}$ определяют объемы финансовых средств, требуемых для выполнения заказов из множества $\overline{k+1,s}$.

Рассмотрим следующую систему соотношений:

$$u_\mu^i(t) \le \sum_{h=j^i+\omega^i+1}^{t} d^i{}_{j^i}(h) - \sum_{\mu=i+1}^{s} \sum_{h=j^i+\omega^i+1}^{t-1} u_\mu^i(h),\ i \in \overline{1,k},$$

$$\sum_{i=1}^{k} u_\mu^i(t) + V_\mu(t) \ge c_\mu(t),$$

(6) $$V_\mu(t) \ge 0,$$

$$t \in \overline{\max\left(j^i+\omega^i+1, j^\mu\right), j^\mu+\omega^\mu},\ \forall \mu \in \overline{i+1,k},$$

$$t \in \overline{\max\left(j^i+\omega^i+1, j^\mu\right), T},\ \forall \mu \in \overline{k+1,s},$$

$$\sum_{\mu=2}^{s} \sum_{t=j^1+\omega^1+1}^{T} V_\mu(t) \le P - \sum_{\mu=1}^{s} \sum_{h=1}^{j^1+\omega^1} c_\mu(h) = P\left(j^1+\omega^1\right),$$

(7) $$\sum_{\mu=2}^{s} V_\mu(t) \le P\left(j^1+\omega^1\right) - \sum_{\mu=2}^{s} V_\mu(t-1),\ t = \overline{j^1+\omega^1+1, T},$$

$$V_\mu(j^1+\omega^1) = 0, \mu \in \overline{2,s},$$

$$u_\mu^i(t) = V_\mu(t) = 0,\ t = \overline{j^\mu+\omega^\mu+1, T},\ \mu \in \overline{i+1,k}.$$

Системы (6)–(7) определяют набор допустимых распределений финансовых средств, генерируемых уже законченными заказами, между еще не завершенными заказами из числа заказов из множества $\overline{1,s}$. Очевидно, что эти системы соотношений образуют совместную систему линейных уравнений и неравенств, поскольку выбор заказов $\overline{1,s} \subseteq \overline{1,m}$ из общего числа заказов осуществляется при выполнении условий материального (финансового) баланса, определяемых ограничениями задачи (3)–(5).

Для отыскания набора переменных $u_\mu^i(t)$, $V_\mu(t)$, удовлетворяющих соотношениям (6)–(7), достаточно решить какую-либо задачу линейного программирования с ограничениями (6), (7). В качестве критерия в такой задаче можно выбрать, например, линейную функцию

(8) $$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\mu=i+1}^{k} \sum_{t=\max\left(j^i+\omega^i+1,\, j^\mu\right)}^{j^\mu+\omega^\mu} u_\mu^i(t) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\mu=k+1}^{s} \sum_{t=\max\left(j^i+\omega^i+1,\, j^\mu\right)}^{T} u_\mu^i(t),$$

которую можно минимизировать на множестве решений, определяемом системой ограничений (6), (7).

Если множество заказов $\overline{1,s}$ не разбивается на попарно непересекающиеся подмножества заказов в условиях, когда начальный объем финансовых средств составляет P, в рамках организации комбинаторных аукционов, администрация, размещающая государственные заказы, может сформировать группы «близких по профилю» заказов из числа заказов, образующих множество $\overline{1,s}$, и выяснить, каково минимальное увеличение объема заказов финансовых средств, позволяющее «разбить» множество заказов $\overline{1,s}$ на попарно непересекающиеся подмножества заказов. Примером «близких по профилю» заказов (в коммерческих системах) могут служить, например, автомобильные перевозки грузов по смежным маршрутам [10], которые обычно размещаются в рамках проведения комбинаторных аукционов [9].

Пусть администрация, размещающая государственные заказы на выполнение заказов, образующих множество $\overline{1,s} \subseteq \overline{1,m}$ и выбранных в результате решения задачи (3)–(5), считает целесообразной группировку этих заказов в ω групп $M_1, \ldots, M_\omega$, таких, что $M_\alpha \cap M_\beta = \emptyset$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in \overline{1,\omega}$, $\bigcup_{\Delta=1}^{\omega} M_\Delta = \overline{1,s}$. Не ограничивая общности, можно считать, что эти группы образованы заказами $\overline{1,\pi_1}, \overline{1,\gamma_1}$; $\overline{\pi_1+1,\pi_2}, \overline{\gamma_1+1,\gamma_2}$; … ; $\overline{\pi_{\omega-1}+1,\pi_\omega}, \overline{\gamma_{\omega-1}+1,\gamma_\omega}$, так что $\pi_\omega = k$ и $\gamma_\omega = s$.

Для отыскания минимально необходимого увеличения начального объема финансовых средств для того, чтобы все заказы внутри каждой группы могли бы быть выполнены без дополнительного финансирования за счет средств, генерируемых заказами, входящими в другие группы, можно решить задачу линейного программирования

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}_\mu^i(t) \le \sum_{h=j^i+\omega^i+1}^{t} d^i{}_{j^i}(h) - \sum_{\mu=\gamma_{\rho-1}}^{\gamma_\rho} \sum_{h=j^i+\omega^i+1}^{t-1} \tilde{u}_\mu^i(h),\ i \in \overline{\pi_{\rho-1},\pi_\rho}, \rho = \overline{1,\omega}, \pi_0 = 1,\\
&\sum_{i=1}^{k} \tilde{u}_\mu^i(t) + \tilde{V}_\mu(t) \ge c_\mu(t), \mu \in \overline{\gamma_{\rho-1},\gamma_\rho}, \rho = \overline{1,\omega}, \gamma_0 = 1,\\
&\tilde{V}_\mu(t) \ge 0,\\
&t \in \overline{\max\left(j^i+\omega^i+1, j^\mu\right), j^\mu+\omega^\mu},\ \forall \mu \in \overline{i+1,k},\ i \in \overline{1,k},\\
&t \in \overline{\max\left(j^i+\omega^i+1, j^\mu\right), T},\ \forall \mu \in \overline{k+1,s},\ i \in \overline{1,k},\\
&\sum_{\rho=2}^{\omega} \sum_{\mu=\gamma_{\rho-1}}^{\gamma_\rho} \sum_{t=j^1+\omega^1+1}^{T} \tilde{V}_\mu(t) + \sum_{\mu=\pi_0+1}^{\pi_1} \sum_{t=j^1+\omega^1+1}^{T} \tilde{V}_\mu(t) \le P + y - \sum_{\mu=1}^{s} \sum_{h=1}^{j^1+\omega^1} c_\mu(h) = P\left(j^1+\omega^1\right) + y,\\
&\sum_{\rho=2}^{\omega} \sum_{\mu=\gamma_{\rho-1}}^{\gamma_\rho} \tilde{V}_\mu(t) + \sum_{\mu=\pi_0+1}^{\pi_1} \tilde{V}_\mu(t) \le P\left(j^1+\omega^1\right) + y - \sum_{\rho=2}^{\omega} \sum_{\mu=\gamma_{\rho-1}}^{\gamma_\rho} \tilde{V}_\mu(t-1) + \sum_{\mu=\pi_0+1}^{\pi_1} \tilde{V}_\mu(t-1),\\
&\tilde{V}_\mu\left(j^1+\omega^1\right) = 0,\ \mu \in \overline{\pi_0+1,\pi_1} \bigcup_{\rho=2}^{\omega} \left\{\pi_{\rho-1}, \pi_\rho\right\},\\
&\tilde{u}_\mu^i(t) = \tilde{V}_\mu(t) = 0,\ t \in \overline{j^\mu+\omega^\mu+1, T},\ \mu \in \overline{i+1,k},\\
&y \to \min.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Пусть $\left(\widehat{u}_2^1(t),\ldots,\widehat{u}_s^k(t),\widetilde{V}_1^*(t),\ldots,\widetilde{V}_s^*(t),\ y^*\right)$, $t\in\overline{j^i+\omega^i+1,T}$ – решение задачи (9). Тогда y^* составляет минимальное увеличение начального объема финансовых средств, которое обеспечивает разбиение выбранных заказов, образующих множество $\overline{1,s}$, на группы заказов $M_1,\ \ldots,M_\omega$ таким образом, что финансовые средства, генерируемые заказами, входящими в какую-либо группу M_α, $\alpha\in\overline{1,\omega}$, используются для финансирования заказов, входящих только в эту группу.

Следует отметить, что найденное из решения задачи (9) минимальное увеличение объема финансовых средств является таковым только для выбранной группы заказов $\overline{1,s}\subseteq\overline{1,m}$. Может оказаться, однако, что финансовые средства в объеме $\widetilde{P}=P+y^*$ могут позволить выполнить другой набор заказов из множества $\overline{1,m}$, число которых превосходит s; вопрос о том, имеет ли это место, выясняется путем решения задачи (7)–(8), где в качестве начального объема финансовых средств P берется число $\widetilde{P}$.

Если в результате решения задачи (7)–(8) с $P=\widetilde{P}$ из множества заказов $\overline{1,m}$ выбрано то же самое подмножество заказов $\overline{1,s}$, то можно считать разбиение множества заказов $\overline{1,s}$ на группы $M_1,\ldots,M_\omega$ оптимальным. В противном случае можно организовать итеративную процедуру последовательного разбиения множества заказов $\overline{1,m}$ на группы и отыскания минимально возможного увеличения объема начальных финансовых средств, обеспечивающих оптимальность такого разбиения, путем последовательного решения задач (7)–(8) и (9) с последовательной заменой числа P на числа $P^1,P^2,\ldots,P^\Psi$, вычисляемые по результатам решения задачи (9) на каждом шаге этого процесса, который является конечным.

Заключение

1. Полученные в работе результаты включают элементы методологии, математические модели и методы решения задачи формирования (планирования) заказов для обеспечения государственных нужд и набора заявок на государственное финансирование закупок работ и услуг с учетом возможности рефинансирования прибыли, получаемой в результате выполнения части государственных заказов, в течение периода планирования, что открывает возможность размещения государственных заказов посредством комбинаторных аукционов.

2. В работе показано, что отыскание максимального числа равноважных заказов, которые могут быть включены в портфель заказов, осуществляется из решения некоторой задачи булева программирования, в то время как разбиение всего портфеля заказов на финансово-независимые группы заказов осуществляется из решения некоторой задачи линейного программирования. Предложены математические модели, на основе которых формулируются обе указанные задачи. В частности, предложена математическая мо-

дель, на основе которой оказывается возможным сформулировать задачу отыскания минимального увеличения исходного бюджета, требуемого для формирования конкретного набора лотов – включающих набор интересующих заказчика работ, товаров и услуг, подлежащих выставлению на торги – в виде задачи математического программирования с линейными ограничениями, в частности, в виде упомянутой выше задачи линейного программирования.

3. На основе разработанных математических моделей для решения задачи выбора оптимального набора работ и услуг, рассматриваемых на предмет возможности их финансирования или подлежащих финансированию в рамках государственных заказов и оптимального расписания их выполнения могут быть разработаны:

• структура программного комплекса на основе пакетов программ для решения оптимизационных задач, в рамках которого пользователи смогут решать указанную задачу, а также структура интерфейса, позволяющего пользователю взаимодействовать с этим программным комплексом в интерактивном режиме и визуально наблюдать, оценивать и сравнивать различные наборы заказов и последовательности их выполнения, в том числе наборы и последовательности, оптимальные по разным критериям;

• структура элементов базы данных, связанных с формированием коэффициентов математической модели.

Также могут быть:

• проведены модельные расчеты и опробована работа программного комплекса в среде пользователей-специалистов по формированию государственных заказов;

• исследована эффективность решения задачи выбора оптимального набора работ и услуг из числа равноважных для государства и оптимальной последовательности их финансирования из государственных средств в рамках государственных заказов (с учетом возможности реинвестирования средств, генерируемых в результате выполнения одних заказов, в другие государственные заказы из указанного набора в пределах одного лота) большого размера на базе стандартного пакета программ для решения задач дискретной оптимизации в рамках программного комплекса.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нетреба П., Бутрин Д.* Бюджет 2011 попал под раздачу // Коммерсант. 2010. 15 июня.

2. *Сервах В.В., Сухих С.Л.* Гибридный алгоритм для задачи календарного планирования с учетом реинвестирования прибыли. Омский филиал СО РАН, 2004.

3. *Сухих С.Л.* О сложности задачи календарного планирования проекта с единичными длительностями работ: препринт. Омск: Омский государственный университет, 2002.

4. *Сухих С.Л.* О сложности задачи календарного планирования проекта с учетом реинвестирования прибыли / Материалы Всероссийской конференции «Дискретный анализ и исследование операций», Новосибирск, 2002. С. 222.

5. *Щербинина Т.А.* Исследование сложности задач календарного планирования с ограниченными ресурсами и разработка алгоритмов их решения: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. Омск: Гос. ун-т им. Ф.М. Достоевского, 2009.

6. *Belenky A.S.* A Boolean Programming Problem of Choosing an Optimal Portfolio of Projects and Optimal Schedules for them by Reinvesting within the Portfolio the Profit from Project Implementation // Applied Mathematics Letters (In Press).

7. *Belenky A.S.* Operations Research in Transportation Systems: Ideas and Schemes of Optimization Methods for Strategic Planning and Operations Management. Springer, 2010.

8. *Brucker P., Knust S., Schoo A., Thiele O.* A Branch and Bound Algorithm for the Resourse-constrained Project Scheduling Problem // European Journal of Operational Research. 1998. № 107. P. 271–288.

9. *Crampton P., Shoham Y., Steinberg R.* (ed.) Combinatorial Auctions. MIT Press, 2006.

10. *Sheffi Y.* Combinatorial Auctions in the Procurement of Transportation Services // Interfaces. 2004. 34. № 4. P. 245–252.