

## Логистическая модель: детерминированная динамика финансового рычага<sup>1</sup>

Смирнов А.Д.

В статье исследуется модель динамики финансового рычага<sup>2</sup>, которая предназначена для объяснения мотивации и поведения инвесторов, включая условия длительной кредитной экспансии. Детерминированная версия логистической модели оказывается системой, удобной для объяснения локального поведения инвесторов возле стационарного уровня рычага. Индикаторами спроса и предложения кредитов в модели являются спреды ставок доходностей, а использование заемных средств и финансовый рычаг характеризуют состояние рынка. Индикаторы модели оказываются весьма близкими по смыслу «викселлианскому дифференциалу», предложенному Т. Обри. Метастабильные свойства рынка являются следствием его сбалансированности как для положительных, так и отрицательных спредов доходностей. Для положительного спреда «рынок заемщиков» имеет устойчивое стационарное состояние, или «равновесие Викселла», исключающее кредитную экспансию. Возле этого состояния инвесторы, используя различные объемы заемных средств, способны устранить рассогласованность спроса и предложения кредитов. Окрестность неустойчивого состояния «рынка кредиторов» распадается на две ветви. Вдоль «ветви Мински» происходит автокаталитический процесс раздувания финансового пузыря вследствие кредитной экспансии, а неограниченный рост рычага заканчивается неизбежным крахом системы. Однако, в отличие от модели популяций, эта траектория не является «парадоксальным» решением логистического уравнения. Вдоль «ветви Фишера», напротив, дефицит и дороговизна заемных средств вынуждают инвесторов уменьшать рычаг, причем некоторые состояния «рынка кредиторов» имеют симптомы несомненного, хотя и неустойчивого, «оздоровления» финансов. Транскритическая бифуркация, характерная для логистического уравнения, указывает на возможность возвращения рынка к устойчивому развитию, например, в результате осуществления структурных реформ финансовой системы. Модель использована для прогноза значений рычага глобальной финансовой системы.

**Ключевые слова:** логистическое уравнение; викселлианский анализ; метастабильность; собственный капитал; заемные средства; активы; финансовый рычаг.

<sup>1</sup> Автор благодарен Э. Ершову (НИУ ВШЭ) и Т. Обри (Credit Capital Advisory, London) за интересные дискуссии и полезные замечания, оставляя себе ответственность за возможные ошибки.

<sup>2</sup> Данная модель ранее была предложена автором в публикации журнала «Вопросы экономики».

**Смирнов Александр Дмитриевич** – заслуженный деятель науки РФ, д.э.н., профессор, действительный член Российской академии естественных наук, НИУ ВШЭ. E-mail: adsmir@hse.ru

Статья поступила в Редакцию в сентябре 2013 г.

Известно, что эмиссия денег и других финансовых активов, как в далеком прошлом, так и сейчас, подлинное богатство общества не увеличивает. На протяжении столетий функции денег практически сохранились, несмотря на глубочайшие технические и информационные изменения реальных и финансовых рынков. На рубеже веков под влиянием процессов научных инноваций, глобализации, «дерегулирования» и секьюритизации активов во взаимодействии финансов и производства, а также в самой финансовой системе произошли кардинальные изменения.

Масштабы денежно-кредитных операций многократно превысили объемы обращения товаров и услуг, а финансы стали функционировать как двухкомпонентная (традиционная и альтернативная) система. Даже после последнего кризиса в финансах доминируют сделки так называемого «альтернативного» характера (*shadow banking*), объемы которых существенно превышают размеры традиционного банковского посредничества. Сегмент производных и структурированных инструментов приобрел решающее значение, как по масштабам, так и воздействию на поведение практически всех экономических рынков. Деколлатеризация активов<sup>3</sup> и технические инновации в финансах и денежном обращении резко увеличили спектр разнообразных инструментов, обеспечивающих аккумуляцию и диффузию рисков в системе [Janeway, 2006; Pozsar et al., 2010].

Финансовые рынки, где наряду с деньгами торгуются «обещания» (*promises*) разных сроков погашения, объективно являются системами, которым свойственны неопределенности разного рода [Knight, 2002]. Даже самый ответственный и добросовестный заемщик, в силу неопределенности, будущего в частности, может оказаться в ситуации дефолта – неисполнения принятых обязательств. Такие ситуации особенно типичны, когда нехватка ликвидности усиливает, до того малозаметные, взаимозависимости участников рынка, а степень рискованности системы резко возрастает. Увеличение неопределенности, особенно в процессе секьюритизации активов, объективно повышает роль денег как наиболее универсального инструмента хеджирования разного рода рисков, что предвидел еще Дж.М. Кейнс [Keynes, 1936]. Эта функция денег выполняется тем успешнее, чем в большей мере деньги обеспечены материальными ресурсами. И наоборот, рассогласованность стоимости финансовых и материальных ресурсов позволила центральным банкам, совместно с коммерческими (в части безналичного обращения), формировать практически любые объемы предложения денег.

### Рынок кредитов: основные изменения

Неизмеримо возросло влияние денег на современную экономику. Ожидания и реакции участников рыночного процесса на изменения количества денег и их покупательной способности – один из самых мощных факторов ускорения, либо торможения, экономического развития. Хотя деньги функционируют как всеобщее платежное средство тысячами, но, в отличие от массы остальных товаров, они во все большей степени превращаются в специфический, фидуциарный<sup>4</sup>, товар. По мере утраты «физической» основы, на-

<sup>3</sup> Деколлатеризация (*decollaterization*) – ослабление зависимости стоимости финансового актива от его материального обеспечения.

<sup>4</sup> Fiducia (лат.) – вера, уверенность, доверие. Стоимость денежной единицы «сегодня» во многом определяется уверенностью участников рынка в ее ненулевой стоимости «завтра».

пример, из-за отказа от золотого стандарта, фидуциарная составляющая стала основным ограничением предложения денег «ответственными» центральными банками. В современной экономике товарная масса все меньше влияет на формирование как предложения денег, так и спроса на деньги<sup>5</sup>.

Процесс деколлагеризации предложения денег имел своим следствием изменение положения и функций рынка кредитов. Конечно, количество денег в обращении не может стать безграничным, но исчисление масштабов предложения этого товара в отсутствие стандартов стоимости существенно усложняется, особенно когда положение экономики в настоящем и будущем сопряжено со все большей неопределенностью<sup>6</sup>. В отсутствие ограничений на предложение товара его стоимость, как известно, определяется спросом. В условиях неопределенности, однако, спрос на кредиты может измеряться практически лишь на основе априорных и субъективных соображений. Между тем ожидания и доверие, связанное с ними, – эластичные величины, способные на весьма быстрые и значительные изменения под влиянием обстоятельств разного рода. Драматическим тому подтверждением явилась непрекращающаяся череда скандалов 2012–2013 гг., связанных с манипулированием ставкой LIBOR крупнейшими банками, оперирующими в глобальных масштабах [Wikipedia, 2013]. Как известно, эта ставка является ориентиром рыночной стоимости коротких (overnight, прежде всего) кредитов, и на ней покоится ценообразование финансовых контрактов в сотни триллионов долларов. В ходе расследований выяснилось, что в отсутствие реальных операций с кредитами банкиры предоставляли информацию не об истинных, а ожидаемых в течение суток объемах кредитов. При этом их субъективные оценки спроса на кредиты, соответственно величин ставок LIBOR, оказывались, по разным причинам, весьма эластичными.

Рынок коротких кредитов в современной экономике стал основным полигоном формирования денежной массы и цены денег. Операции центральных банков на рынках денег (*money market*) с репо, «федеральными фондами» или их аналогами, векселями и т.д. превратились в основной способ регулирования количества денег в экономике. Рынки кредитов (коротких долговых инструментов), определяя ставки процента, измеряют стоимость современных денег. В этом процессе рыночная ставка процента формируется, по сути, как предел, к которому стремятся минимальная доходность, приемлемая для кредиторов, и максимальная доходность, приемлемая для заемщиков. Рискованность рынка кредитов, измеряемая спредами доходностей, отражает отличия между финансовыми активами с разным ресурсным обеспечением. Однако насколько точно такой сложный механизм отражает истинные соотношения финансовых и реальных рынков, остается неясным.

Эрозия стандартов соответствия (*nominal anchors*) ресурсов и денег в сочетании с гигантской диспропорцией между ликвидностью и непомерно раздутой стоимостью финансовых активов позволили стабилизировать цены коротких кредитов лишь на предельно низком уровне. Эта парадоксальная, на первый взгляд, ситуация оказалась весьма продолжительной – от конца 2008 г. по настоящее время, причем в рамках политики «forward guidance» она закрепляется руководством ряда центральных банков, как минимум, до

<sup>5</sup> В частности, утверждается, что кривая LM – взаимодействия денег и реальных рынков – на современных рынках не может адекватно отражать формирование цены денег [Coleman, 2007].

<sup>6</sup> Данная экономическая ситуация аналогична «денежной ловушке» Дж.М. Кейнса, которая, кстати, долгое время считалась лишь интересным интеллектуальным упражнением.

2015 г. Практически нулевые ставки рефинансирования, однако, не тождественны отсутствию спредов доходностей, исчисляемых для различных инструментов рынка кредитов. С одной стороны, наличие спредов является следствием фрагментарности кредитных рынков, их недостаточной ликвидности, а также высокой рискованности торгуемых на них инструментов. С другой – даже на турбулентном рынке денег центральный банк обычно сохраняет возможность влияния на спреды между короткой и длинной доходностью. В таких условиях, однако, монетарная политика осуществляется «неортодоксальными» методами, например, «количественного смягчения» (*quantitative easing, QE*), практикуемыми центральными банками развитых экономик мира в послекризисный период [Blinder, 2010; Krugman, 2012]. Политика QE, в частности, предполагает, что центральный банк, увеличивая ликвидность, способен влиять на сокращение премии за риск. Если эффекты такого рода существенны, то ожидаемое уменьшение доходности долгосрочных инструментов, *ceteris paribus*, действительно, стимулирует инвестиционный спрос. Вместе с тем, когда формирование цены денег происходит на «расстроеном» рынке кредитов, то одним из последствий является кредитная экспансия, которая, окончательно разрывая связи между реальными и финансовыми рынками, заканчивается неизбежным крахом.

Позитивный или негативный эффекты монетарной политики определяются, в значительной мере, ожиданиями и реакцией инвесторов на действия центрального банка. Исследование их мотивации и поведения, которые формируются рынками кредитов с разными структурами, имеет поэтому ключевое значение для понимания природы современных финансов и проведения адекватной монетарной политики.

### Логистическая модель в контексте теорий кредита

В настоящее время практически общепризнано, что кредитный кризис (*credit crunch*) 2007–2009 гг. явился результатом серьезной дисфункции денежной сферы и финансовых институтов. Вместе с тем сейчас очевидна и неспособность традиционной (*mainstream*) теории убедительно объяснить истинную роль и особенности функционирования рынка кредитов в современной экономике. Эти обстоятельства, несомненно, лежат в основе феномена «неожиданности» кризиса, который, по признанию Б. Бернанке, банкиры, регуляторы и теоретики не смогли предвидеть [Bernanke, 2013].

В значительной мере под влиянием финансового кризиса экономисты вновь обратились к «апокрифическим» идеям, особенно теории К. Викселла. Этот выдающийся шведский ученый еще в эпоху безраздельного господства золотого стандарта отчетливо понимал роль ставки процента как одного из основных регуляторов экономической активности. Фундаментальный труд К. Викселла «Процент и цены» [Wicksell, 1898] заложил основы изучения рынков кредита и оказал большое влияние на различные течения экономической мысли. Многие положения его теории были восприняты и развиты в дальнейшем «Австрийской школой» [French, 2009; Hayek, 2008; Mises, 1996]. Викселлианский подход использовался Дж.М. Кейнсом в анализе сбережений и инвестиций, а Д. Робертсоном – в рамках концепции «заемных средств» [Fletcher, 2000; Keynes, 1936]. Научный вклад Викасселла был исследован и высоко оценен М. Вудфордом [Woodford, 2003]. В 2012 г. британский экономист Т. Обри опубликовал работу, в которой предложил использовать «викселлианский дифференциал» для формирования портфеля инвестора, обладающего волатильностью облигаций и доходностью акций [Aubrey, 2013].

Согласно концепции К. Викселла, сбалансированность экономики в конечном счете зависит от обеспеченности сбережений (заемных средств) материальными ресурсами. При выполнении этого условия инвестиции, равные объемам сбережений, соответствуют общественным потребностям и возможностям экономики [Garrison, 1997; Wicksell, 1898]. В такой экономической системе ставка доходности собственного капитала, которую К. Викселл называл «естественной» ставкой процента, является ценой кредита. Ее изменения характеризуют эволюцию кредитных рынков, которые, однако, могут развиваться при разных соотношениях «естественной» ставки и рыночного процента. Так, увеличение объемов обеспеченных сбережений стимулирует инвестиции, соответствующие возможностям производства. В нормальных условиях сбалансированность и устойчивость (*sustainability*) экономического развития характеризуются равенством «естественной» ставки и рыночного процента, которые, как правило, снижаются.

Между тем, в отсутствие стандартов стоимости центральный банк способен стимулировать экономику посредством эмиссии денег, не имеющих материального эквивалента. Первоначально накачка необеспеченных денег в экономику, как и в предыдущем случае, снижает стоимость кредитов на рынке и повышает инвестиционный спрос. Однако, в отличие от нормальных условий, увеличение инвестиций происходит, когда рыночная ставка ниже «естественной» ставки процента. При рассогласованности ставок банковские кредиты поддерживают инвестиции, не обеспеченные материальными ресурсами, поэтому, несмотря на аналогичность первоначальных эффектов, экономический рост не может быть устойчивым. Растущий дисбаланс инвестиций и сбережений в конечном счете восстанавливается посредством грубой коррекции рынка, иначе – кризиса. Одним, но далеко не единственным, примером подобного рода явился так называемый «бум Лоусона»<sup>7</sup>. Кредитный бум, вызванный накачкой необеспеченных денег и существенным снижением ставок процента, поддержал в конце 1980-х годов обменный курс фунта на уровне трех германских марок. Однако через короткий период рост экономики Великобритании, вызванный увеличением экспорта, закончился глубоким спадом [The Times, 2013].

Кризис, разумеется, формируется как экстремальная, иррациональная ситуация, принципиально отличная от «нормального» финансового рынка. Большой вклад в исследование последствий кредитной экспансии и кризисов внесли американские экономисты И. Фишер и Х. Мински. Несмотря на различия в методологии и объектах исследования, их концепции, по сути, взаимно дополняют друг друга, характеризуя соответственно процессы раздувания «финансового пузыря» и его противоположности – дефляции долга. Теория Х. Мински, оформленная как «гипотеза финансовой нестабильности», была разработана в 80-х годах прошлого века. Она содержит описание трех фаз: нормального инвестирования, финансовых спекуляций и «игры Понци», ведущей к раздуванию и лопанию финансового пузыря [Minsky, 2008]. Трансформация избытка денег в острую нехватку ликвидности порождает другой процесс. «Дефляция долга» (*debt deflation*) происходит из-за вынужденных продаж активов, вызванных отсутствием ликвидности и невозможностью занимать. Подобные последствия уменьшения финансового рычага (*deleveraging*) были исследованы И. Фишером еще в 1933 г. [Fisher, 1933], но на долгое время оставались, по существу, забытыми.

---

<sup>7</sup> Н. Лоусон (N. Lawson) – британский министр финансов в 1983–1989 гг.

Интерес к концепциям генезиса и лопания финансовых пузырей был восстановлен «неожиданностью» кредитного кризиса 2007–2009 гг., а послекризисное развитие мировой экономики во многом подтвердило справедливость утверждений этих выдающихся исследователей. Известно, что последний финансовый кризис (credit crunch 2007–2009) явился в значительной мере следствием неоправданно высоких значений финансового рычага, практиковавшихся участниками финансового рынка, особенно крупными инвестиционными банками [The Financial Crisis Inquiry Report, 2011]. Провал рынка денег привел к тому, что крупнейшие банковские холдинговые корпорации (*bank holding company*, ВНС) – преемники бывших инвестиционных банков – стали зарабатывать доход на собственный капитал, который оказался ниже его издержек, а уровень рычага сократился по сравнению с историческим уровнем [Global Financial Stability Reports, 2013].

В данной работе показано, что логистическая модель динамики финансового рычага является формализацией викселлианского анализа поведения инвесторов на рынке кредитов. Эта модель, предложенная автором в публикации журнала «Вопросы экономики» [Смирнов, 2012], представляет простую нелинейную конструкцию, которая унифицирует, разумеется, в упрощенном виде, утверждения К. Виксела, Х. Мински и И. Фишера о состояниях рационального и иррационального рынка кредитов. Разные структуры рынка, представленные отношениями спредов доходностей активов, диктуют изменения объемов использования заемных средств, следовательно, уровни финансового рычага, характеризующие поведение системы (рынка). Апеллируя к свойствам устойчивости системы, модель конкретизирует понятия нормального (рынок заемщика) и экстремального (рынок кредитора) состояний, а также точки бифуркаций и коллапса рынка кредитов. Логистическая система метастабильна, и для некоторых значений рычага она может быть как устойчивой, так и неустойчивой. Поэтому она не имеет «парадоксальных» решений, которые возникают в широко известных моделях популяций. В ситуациях иррационального характера исследование поведения системы вдоль траекторий Фишера и Мински, как представляется, помогает понять механизмы развития и лопания финансового пузыря. В частности, модель позитивно отвечает на вопрос о возможности улучшения состояния рынка кредитов в результате сокращения финансового рычага, акцентируя при этом неустойчивость таких процессов. Различные соотношения спредов, измеряя спрос и предложение кредитов возле точек равновесия, по смыслу оказываются весьма близкими «викселлианскому дифференциалу», предложенному Т. Обри для формирования портфеля инвестора.

### Уравнения макрофинансового рынка

Исходное уравнение модели формализует баланс стоимости портфеля агрегированного инвестора, активы которого на каждый момент времени обеспечены заемными средствами и совокупным капиталом. Баланс, устанавливая статическое равенство стоимости активов  $A(t)$  сумме долговых обязательств  $x(t)$  и собственного капитала  $e(t)$ , выполняется для любого состояния рынка:

$$(1) \quad A(t) = x(t) + e(t).$$

Для непрерывных и дифференцируемых функций времени динамика макрофинансовой системы (см. уравнение (1)) соответствует балансу потоков доходов, изменяющих

стоимость активов, а также заемных и собственных средств. Эти потоки обусловлены трансформацией сбережений в инвестиции, эмиссией денег и кредитов и отображаются различными финансовыми транзакциями, включая изменения рыночных цен активов. Баланс потоков (дифференциалов) соответствующих макрофинансовых переменных,

$$(2) \quad dA(t) = dx(t) + de(t),$$

зависит от структуры инвестиционного портфеля. Так, если объем задолженности постоянен, то уравнение (2) редуцируется к равенству  $dA(t) = de(t)$ . Это типично на микрофинансовом уровне, и такие ситуации, в частности, исследованы (для дискретных процессов) в работах Адриана и Шина [Adrian, Shin, 2008]. В общем случае, однако, объемы заимствований, равно как и потоки доходов, меняются под влиянием инвестиций в основной капитал, причем увеличение или уменьшение обеспеченности (*collateral*) активов влияют на положение заемщиков на долговом рынке. Так, рыночная стоимость совокупного долга и структура долгового агрегата резко изменились в период активного формирования альтернативной финансовой системы (*shadow banking*), причем, в значительной мере, под воздействием секьюритизации активов<sup>8</sup>. Указанные выше процессы реализуются через финансовые транзакции, формальным аналогом которых на макрофинансовом уровне является ненулевая величина изменения объемов задолженности,  $dx(t) \neq 0$ .

Состояние макрофинансового рынка в модели представлено относительным показателем, называемым финансовым рычагом (*leverage or gearing*),  $l = A/e$ . Финансовый рычаг

имеет альтернативное измерение,  $l - 1 = \frac{x}{e}$ , широко используемое на практике<sup>9</sup>. В част-

ности, значение  $l = 1$  говорит об отсутствии использования заемных средств, по сути, о вырождении современной финансовой системы. При значении  $l = 0$  рынок, имея нулевой объем активов, перестает существовать. Из сказанного, в частности, следует, что сокращение использования заемных средств (*deleveraging*) хотя и может улучшить состояние финансового рынка, но в конечном счете влечет его деградацию и прекращение существования. По экономическому смыслу, финансовый рычаг не может быть отрицательной величиной.

Структура макрофинансового рынка в модели представлена ставками доходности финансовых инструментов: денег, облигаций и акций. Стоимость коротких кредитов в процессе рефинансирования измеряется рыночной ставкой процента  $r : dx(t) = rx(t)dt$ , например, ставкой по депозитам (*deposit rate*), номинальная величина которой полагается неотрицательной. Эта ставка служит мерой стоимости денег и их субституттов, даваемых «напрокат», иначе, коротких кредитов. Ставка доходности собственного капитала,

<sup>8</sup> Автором показано, что простая рекомбинация активов, даже с одинаковой доходностью противоположных знаков, способствует повышению стоимости активов [Смирнов, 2010]. Этот вывод вполне понятен, поскольку, например, инструменты с доходностью противоположных знаков используются для хеджирования структурированных инструментов типа ETF (*exchange traded funds*) или ETN (*exchange traded notes*) [Wright et al., 2011].

<sup>9</sup> Литература по исследованию и применению финансового, особенно банковского, рычага весьма обширна. Ее краткий обзор содержится, например, в работе [Bagnoli et al., 2011].

$ROE \equiv \rho; de(t) = \rho e(t)dt$ , является нормативной (желаемой) доходностью собственного капитала, обеспеченного ресурсами, и ассоциируется с доходностью акций. Параметр доходности активов (*return on assets, ROA*),  $ROA \equiv \mu; dA(t) = \mu A(t)dt$ , по экономическому смыслу, есть средняя арифметическая параметров  $ROE$  и рыночной ставки процента:

$$(3) \quad \mu = r(1-w) + \rho w,$$

с весами, равными удельному капиталу,  $w = eA^{-1}$  и доле заемных средств,  $1-w$ , в активах системы. Иными словами, параметр  $ROA$  в данной модели – это аналог показателя WACC (*weighted average cost of capital*), широко применяемого в практике инвестирования. Финансовый рычаг и параметры доходности полагаются положительными величинами, хотя доходность собственного капитала может принимать отрицательные значения. Очевидная связь между параметрами удельного капитала,  $w = l^{-1}$ , и финансового рычага будет исследована в дальнейшем.

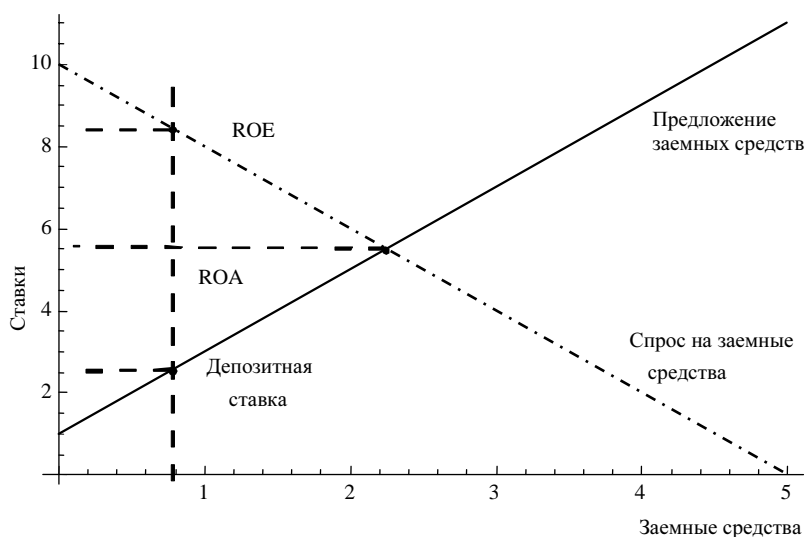


Рис. 1. Ставки доходности и заемные средства

В соответствии с интерпретацией Т. Обри [Aubrey, 2010], (ожидаемая) ставка доходности собственного капитала,  $\rho \equiv ROE$ , ассоциируется в современных условиях с «естественной» ставкой процента, а ставка доходности активов,  $\mu \equiv ROA$ , – с рыночной стоимостью заемных средств (кредитов). Предложенный им показатель «викселлианского дифференциала», в наших обозначениях, – это спред ( $\rho - \mu$ ). Соответственно величина этого спреда, отражая нормативную эффективность капитала, характеризует спрос на заемные средства. На рис. 1 этот спред фиксирует положение кривой спроса на кредиты,  $LF^d$ . Спред доходностей ( $\mu - r$ ), показывая относительную эффективность вложений в



«усредненный» финансовый актив, в модели принимается за индикатор предложения кредитов. Как видно из рис. 1, он фиксирует положение кривой предложения кредитов (*loanable funds, LF<sup>s</sup>*).

Адаптация инвесторов к неравновесиям финансового рынка в модели исследуется на основе двух методологических упрощений. Во-первых, инвестиционный портфель перестраивается посредством изменения объемов заемных средств (кредитов), используемых участниками рынка. Этот процесс отражается через различные уровни финансового рычага. Во-вторых, поведение инвесторов исследуется в окрестности стационарного значения финансового рычага, вычисляемого для постоянных ставок доходности, соответственно фиксированных спредов (рассогласований) между этими ставками. Перестройка инвестиционного портфеля в реальной действительности из-за перманентных изменений конфигурации спроса и предложения на рынке кредитов – несравненно более сложный процесс, но инвесторы обязательно анализируют соотношения спредов, выделенные выше. В любом случае, наши предположения существенно облегчают изучение поведения инвесторов на финансовом рынке.

### Рычаг и сопряженные состояния рынка

Подстановка ставок доходностей в уравнение (2), после элементарных преобразований, приводит к уравнению состояния сбалансированного рынка

$$(4) \quad \rho = r + (\mu - r)l,$$

где спред  $(\mu - r)$  может быть либо положительной, либо отрицательной величиной. Линии 1 и 2, изображенные на рис. 2, показывают состояния сбалансированного рынка соответственно для положительных и отрицательных спредов. Нулевому уровню рычага, формально, соответствует доходность капитала, совпадающая со стоимостью заемных средств,  $ROE = r$ . В этой точке, однако, финансовый рынок не существует, поскольку, по определению рычага, активы системы должны равняться нулю. В точке  $l = 1$ , где стоимость активов равна собственному капиталу, имеет место равенство ставок доходностей:  $ROE = ROA$ . Отметим, что финансовый рычаг на современных финансовых рынках существенно больше единицы<sup>10</sup>.

Разные состояния рынка предопределяют различные типы поведения инвесторов. Когда ставка доходности активов превышает стоимость заемных средств,  $(\mu - r) > 0$ , увеличение финансового рычага приводит к повышению доходности собственного капитала<sup>11</sup>.

<sup>10</sup> По данным МВФ, фактическая пропорция заемных средств и стоимости финансовых активов в глобальной финансовой системе составляла на 2011 г. примерно 4:1 [Global Financial Stability Reports, 2004–2013].

<sup>11</sup> В экономических расчетах широко применяется альтернативная форма уравнения (4):  $\rho = \mu + (\mu - r)[l - 1]$ , в котором сравниваются доходности собственного капитала и активов. В частности, для  $(\mu - r) < 0$  и высокого рычага доходность собственного капитала может принимать отрицательные значения.

На таком рынке инвесторы, расширяя использование заемных средств, следовательно, повышая величину финансового рычага, увеличивают доходность собственного капитала. Подобные ситуации ассоциируются с нормальным кредитованием реальных рынков (по неизменной ставке процента), усилением инвестиционной активности и расширением производства. Это – рынок заемщиков, состояния которого представлены на рис. 2 возрастающей прямой, удовлетворяющей для  $l > 1$  неравенствам  $r < \mu < \rho$ .

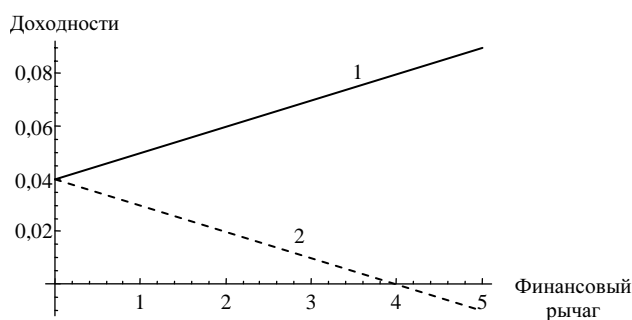


Рис. 2. Финансовый рычаг и состояния рынка

Когда финансовый рынок сбалансирован для отрицательного спреда,  $(\mu - r) < 0$ , соответственно неравенств  $r > \mu > \rho$ , выполняющихся для  $l > 1$ , рост рычага снижает доходность собственного капитала. Инвесторы склонны в таких условиях сокращать использование заемных средств и снижать уровень рычага. На таком рынке господствует кредитор, который склонен ужесточать условия предоставления займов, уподобляя финансы иррациональному процессу ростовщичества<sup>12</sup>.

Естественной мерой изменений, происходящих на макрофинансовом рынке, является рычаг  $l(t) = a(t)/e(t)$ , дифференцирование которого по времени, после простых преобразований, приводит к уравнению динамики

$$(5) \quad dl_t = (\mu - \rho)l_t dt.$$

Уравнение (5), однако, – весьма грубая модель изменений рычага. Оно имеет единственное стационарное состояние,  $l^* = 0$ , где финансовые активы равны нулю, а спред

<sup>12</sup> По нашему мнению, нечто подобное объясняет стагнацию глобальной экономики на протяжении почти пяти лет после финансового кризиса 2008 г. [Draghi Opens New Front... 2013]. Даже практически нулевая стоимость кредитов для отрицательной, а практически и очень низкой положительной, доходности активов препятствует использованию заемных средств, а значит и инвестиций, поскольку они снижают доходность собственного капитала. Такая структура финансового рынка препятствует доведению кредитов, несмотря на их номинальную дешевизну, до реального бизнеса, а также их трансформации в инвестиции, без которых, как известно, производство не развивается. Серьезность такого положения подтверждается, например, усилиями центрального банка Великобритании, который уже несколько лет проводит специальную программу, рассчитанную на поддержку кредитования малого и среднего бизнеса [BOE Expands... 2013].

доходностей ( $ROA - ROE$ ) не учитывает стоимость денег. Поведение инвесторов в окрестности начала, согласно условию устойчивости, также своеобразно. Например, в ситуации  $ROA > ROE$  они расширяют использование заемных средств и увеличивают рычаг, хотя такие действия ухудшают их положение. И наоборот, когда  $ROA < ROE$ , они сокращают объем заимствований и рычаг. Фактическое поведение инвесторов на рынке – иное, поэтому получить более реалистичную модель можно, если уточнить экономическое содержание стационарного состояния и спреда доходностей.

### Логистическая модель финансового рычага

Современные финансы, основанные на принципе частичного резервирования, в больших масштабах используют заемные средства и широкий спектр долговых инструментов. Для реальных финансовых систем, следовательно, стационарное значение рычага – заведомо не ноль, а достаточно большая положительная величина<sup>13</sup>. В модели объем заемных средств и уровень рычага определяются структурой рынка, заданной соотношениями ставок доходности различных активов, причем динамика финансового рычага происходит при обратных связях – воздействии текущего состояния системы на ее будущее положение<sup>14</sup>. Взаимодействие спредов и текущего состояния системы с учетом (4) удовлетворяет условию

$$(6) \quad \mu - \rho = (\mu - r)[1 - l],$$

подстановка которого в уравнение (5) приводит к модели динамики финансового рычага:

$$(7) \quad dl_t = (\mu - r)l_t \left[ 1 - \frac{l_t}{l^*} \right] dt; l(0) = l_0,$$

где  $l^*$  – стационарный уровень, а  $l_0$  – начальное значение рычага. Модель (7), в зависимости от знака параметра  $a = (\mu - r)$ , характеризуется либо положительными, либо отрицательными обратными связями, следовательно, является метастабильной системой<sup>15</sup>. Она имеет два стационарных состояния:

<sup>13</sup> Чрезмерные объемы заимствований и злоупотребление финансовым рычагом, особенно крупнейшими банками, явились, как известно, важнейшими факторами возникновения последнего кредитного кризиса [The Financial Crisis Inquiry Report, 2011].

<sup>14</sup> Механизм обратных связей на финансовом рынке в контексте философского принципа рефлексии детально изучен Дж. Соросом, см. например: [Soros, 2008].

<sup>15</sup> Обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение типа (8) было впервые предложено математиком П.Ф. Верхульстом (P.F. Verhulst) в 1838 г., который его решение назвал логистической кривой. Оно – одно из немногих нелинейных дифференциальных уравнений, имеющих аналитическое решение. Его обобщения и модификации используются для исследования процессов развития биологических популяций, а, кроме того, находят применение в самых различных областях науки и техники. Дискретное логистическое уравнение (отображение) – непрямой атрибут исследования хаотических процессов, в том числе, возникающих в экономике и финансах, см. например: [Смирнов, 2010; Ausloos, Dirickx, 2006].

$$(8) \quad l_1^* = 0; \quad l_2^* = \frac{\rho - r}{\mu - r},$$

причем ненулевой рычаг – величина положительная для любого знака спреда  $(\mu - r)$ .

Модель (7) имеет альтернативное представление:

$$(9) \quad dl_t = l_t(a - bl_t)dt; \quad l(0) = l_0,$$

где  $a = \mu - r$  и  $b = \frac{(\mu - r)^2}{\rho - r}$  – параметры системы одинаковых знаков, что гарантирует

положительность стационарного значения финансового рычага,  $K \equiv l^* = a/b$ . Правая часть уравнения (9) может рассматриваться как простая аппроксимация

$$(10) \quad f(l_t) \cong l_t(a - bl_t)$$

функциональной зависимости общего вида между приращением рычага,  $dl(t)$ , его уровнем  $l$  и линейным темпом изменения,  $g(l_t) = a - bl_t$ .

Логистическая модель непрерывной динамики финансового рычага (7) формально является уравнением Верхульста, но не имеет траекторий «парадоксального роста», свойственных модели популяций<sup>16</sup>. Историческая эволюция финансовых рынков показывает, что ускоряющийся рост рычага – не экономический парадокс, а вполне естественный процесс, хотя, конечно, в реальных системах его «бесконечные» значения не наблюдаются. В специфических условиях иррациональной погони инвесторов за растущей стоимостью активов на нерегулируемых финансовых рынках аperiodически происходят процессы раздувания и лопания финансового пузыря, которым соответствуют сингулярные траектории решения логистического уравнения. Спазматические сокращения удельного капитала и коллапсы, разумеется, крайне нежелательны, но на нерегулируемом рынке они не менее «нормальны», чем, скажем, штормы и тайфуны в мировом океане.

Рассмотрим изменения финансового рычага, происходящие при разных знаках спредов доходностей и соответствующие типы поведения инвесторов.

<sup>16</sup> Указанная парадоксальность, иногда называемая парадоксом Левинса (*the Levins paradox*), возникает в развитии популяций для отрицательных параметров уравнения и начальных значениях, превышающих стационарное состояние системы. При этих условиях траектория решения модели соответствует нестабильному и неограниченному росту популяции, что, однако, невозможно в отсутствие ресурсов [Gabriel et al., 2003]. Кроме того, в модели популяций знаки параметра и стационарного состояния системы должны быть одинаковыми.

### Фазовый анализ логистической модели

Коллективное поведение участников рынка кредитов логистическая модель (7) позволяет исследовать методами фазового анализа, т.е. изучения зависимости изменений финансового рычага от его уровней. На рис. 3 изображены две фазовые кривые: W – для положительных и B – для отрицательных значений спреда ( $\mu - r$ ). Стационарная точка  $l_2^* = 1,0$  иллюстрирует частный случай равенства спредов доходностей, который был рассмотрен в работе [Смирнов, 2012].

В отличие от модели (5), уравнение (7) имеет, как указано выше, два стационарных состояния рынка, где инвесторы не склонны менять объемы использования заемных средств, следовательно, уровень финансового рычага. Устойчивость стационарных состояний определяется знаком характеристического корня

$$(11) \quad \lambda(l_t) \equiv f'(l_t) = a - 2bl_t,$$

который в одномерном случае совпадает с производной функции (10).

Свойства стационарного состояния  $l_1^* = 0$  из (8) определяются уравнением

$$(12) \quad f'(l_1^*) = a,$$

согласно которому оно устойчиво для отрицательных и неустойчиво для положительных спредов доходностей. Следовательно, экономическое содержание моделей (7) и (5) становится принципиально различным.

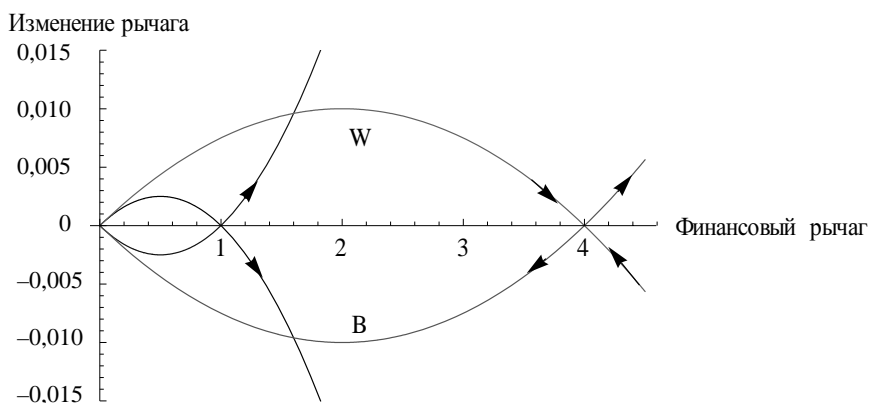


Рис. 3. Фазовый портрет логистического уравнения (7)

Согласно логистической модели, в малой окрестности нуля, на рынке с отрицательным спредом, ( $\mu - r$ ), инвесторы вынуждены сокращать рычаг, а значит, масштабы ис-

пользования заемных средств. Это утверждение вполне согласуется с эмпирическими данными, поскольку превышение ставки рефинансирования рыночной доходности активов заставляет инвесторов отказываться от использования кредитов. Нечто подобное вызывает процесс сокращения финансового рычага (*deleveraging*), который впервые был исследован И. Фишером [Fisher, 1933], и будет рассмотрен ниже. Напротив, положительный спред,  $(\mu - r) > 0$ , побуждает инвесторов использовать дополнительные кредиты, что увеличивает рычаг и удаляет систему от начала. Таким образом, отмеченные ранее несоответствия модели (5) в логистической модели устранены полностью.

Основной интерес в логистической модели рычага, однако, представляет анализ второго стационарного состояния,  $l_2^*$ , эмпирические значения которого для современных рынков существенно больше единицы. Из уравнения

$$(13) \quad f'(l) = -(\mu - r)$$

следует, что стационарное состояние  $l = l_2^*$  устойчиво при положительных значениях спреда,  $(\mu - r) > 0$ , и неустойчиво в противоположном случае.

Анализ фазовой диаграммы позволяет сделать следующие выводы. Качественно динамика финансовой системы определяется тремя факторами: знаком спреда доходностей, значением стационарного состояния и начальными условиями системы. Например, пусть спред имеет положительный знак,  $a = (\mu - r) > 0$ , иначе, рынок – это система с отрицательной обратной связью. Если начальное значение рычага выше его стационарного уровня,  $l_0 > l_2^*$ , то система, текущее положение которой представлено точкой, будет двигаться вдоль оси абсцисс, приближаясь к стационарному состоянию  $l = l_2^*$  справа, поскольку производная рычага отрицательна. Такая динамика системы определяется действиями инвесторов, которые сокращают использование избыточных заемных средств, следовательно, уменьшают уровень финансового рычага. Соответственно, стабилизация системы для  $l_0 < l_2^*$  происходит, когда инвесторы увеличивают размеры рычага. Для отрицательного спреда,  $a = (\mu - r) < 0$ , инвесторы либо приобретают растущую стоимость активов, либо продают активы ради дефицитной ликвидности. Такие действия дестабилизируют рынок, который становится системой с положительной обратной связью. Сказанное проиллюстрировано на рис. 3. Экономическое объяснение поведения инвесторов в окрестности этого стационарного состояния будет дано в следующих разделах работы.

В дальнейших расчетах использована информация о начальных значениях финансового рычага  $l_0 = 5$  и  $l_0 = 3$ , а также о параметрах финансового рынка (в среднегодовом исчислении). Эти данные сведены в табл. 1.

Таблица 1.

## Параметры и состояния макрофинансового рынка

Состояния рынка	Доходность капитала, $\rho \equiv ROE$	Доходность активов, $\mu \equiv ROA$	Ставка рефинансирования, $r$	Спред, $a = \mu - r$	Спред, $\rho - \mu$	$l^* \equiv K$	$b = a / K$
Рынок заемщика, $(\mu - r) > 0$	0,08	0,05	0,04	0,01	0,03	4	0,0025
Рынок заимодавца, $(\mu - r) < 0$	0	0,03	0,04	-0,01	-0,03	4	-0,0025

## Поведение участников «рынка заемщиков»

На стабильном рынке поведение инвесторов возле стационарного значения рычага объясняется в терминах викселлианского анализа формирования кредитов. Макрофинансовый рынок соответствует простому портфелю инвесторов, состоящему из денег, акций (собственного капитала) и облигаций (заемных средств). Структура стоимости такого портфеля отражается соотношением спредов доходности собственного капитала и ставки процента, рассчитанных относительно ставки доходности активов (аналога WACC). Для стационарного состояния рынка,  $l = l^*$ , равенство

$$(14) \quad \frac{\rho - \mu}{l - 1} = \mu - r$$

либо эквивалентное ему условие (8) характеризуют сбалансированность рынка кредитов<sup>17</sup>. Спред  $(\mu - r)$ , являясь индикатором стоимости долга (*cost of capital*), определяет предложение кредитов, а относительная доходность капитала (*yield*) в левой части равенства (14) служит индикатором спроса на кредиты. Для фиксированных значений ставок доходностей, соответственно их спредов, масштабы фактического использования заемных средств характеризуются уровнем финансового рычага. Таким образом, в стационарной точке равенство спроса и предложения кредитов эквивалентно совпадению эффективности вложений заемных средств в акции и облигации, причем эффективность вложений в облигации кратна значению рычага<sup>18</sup>.

<sup>17</sup> Условие (14) удобнее, поскольку показывает масштаб использования заемных средств:  $x/e = l - 1$ , а, кроме того, оно позволяет построить бифуркационную диаграмму системы.

<sup>18</sup> На современных рынках спреды доходностей широко используются в качестве меры рисков. Поэтому спред  $(\rho - \mu)$  может быть истолкован как мера рискованности сегмента акций, а спред  $(\mu - r)$  – облигаций [Smirnov, 2012]. Вложения в долги, как правило, – менее рискованная операция по сравнению с инвестициями в акции, что соответствует смыслу равенства (14).

Для нестационарного рычага,  $l \neq l^*$ , рынок не сбалансирован, а относительная эффективность вложений в облигации, кратная рычагу, отличается от эффективности вложений в акции. Поведение участников рынка кредитов в малой окрестности стационарного рычага диктуется их реакцией на эту рассогласованность. На финансовом рынке с положительным спредом,  $(\mu - r) > 0$ , дисбаланс спроса и предложения кредитов преодолевается, следуя, в общих чертах, викселлианскому анализу. Поведение инвесторов на таком рынке иллюстрировано рис. 4.

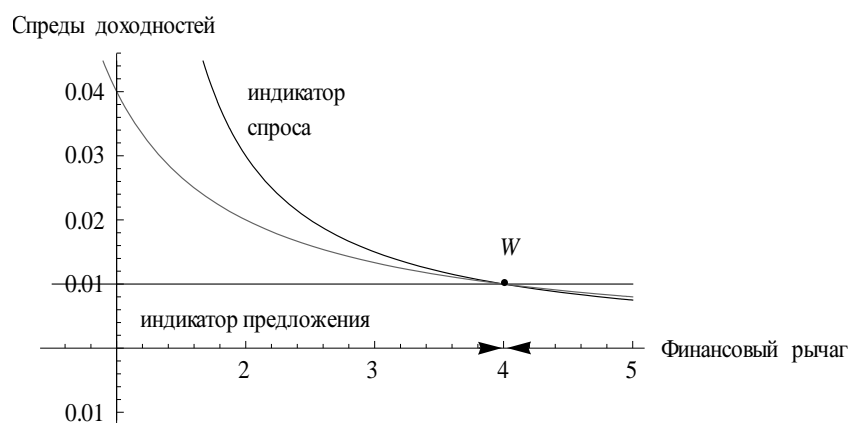


Рис. 4. Викселлианская стационарная точка

Так, для уровней рычага, меньших стационарного значения, поскольку новые заимствования эффективно инвестируются в высокодоходные активы (акции), спрос на кредиты выше его предложения. Неравенство «недоинвестированного» портфеля,  $\frac{\rho - \mu}{l - 1} > \mu - r$ , побуждает инвесторов увеличивать масштабы использования заемных средств, вкладывая их преимущественно в акции, а затем и в облигации, как активы с меньшей доходностью. Подобная перестройка портфеля служит сигналом к расширению объемов кредитования, поскольку центральные банки, в отсутствие стандартов на эмиссию денег, обеспечивают рынок ликвидностью в необходимых объемах. Дисбаланс спроса и предложения кредитов, по мере увеличения рычага, сокращается, а когда система оказывается в стационарной точке, исчезает. Соответственно, справа от стационарной точки  $l(t) = l_2^*$  доходность кредитов ниже их цены,  $\frac{\rho - \mu}{l - 1} < \mu - r$ , поскольку портфель «сверхинвестирован» в акции и облигации. Относительный избыток предложения кредитов устраняется «ликвидацией активов». Их продажа перестраивает инвестиционный портфель в пользу ликвидности и сокращает использование заемных средств. Уровень рычага снижается, а система приближается к стационарному состоянию, где баланс спроса и предложения кредитов восстанавливается.



Таким образом, на рынке «заемщиков» действия инвесторов способны преодолеть рассогласование спроса и предложения кредитов, не вызывая кредитную экспансию. На таком рынке банки увеличивают, либо уменьшают, объемы ликвидности, следуя перестройке портфеля, в котором доходности и издержки кредитования быстро уравновешиваются. Для номинальных значений спредов логическая импликация

$$\left[ \frac{\rho - \mu}{l - 1} - (\mu - r) \right] \begin{cases} > \\ < \end{cases} 0 \Rightarrow l \uparrow, \downarrow,$$

диктующая направления изменений рычага, формализует гипотезу К. Викселла о рыночном кредитовании в зависимости от соотношения «естественной» и текущей ставок процента. Поэтому стационарную точку  $W$  на рис. 4 можно вполне обоснованно назвать викселлианским равновесием финансового рынка. Соответственно множество устойчивых точек равновесия образует *ветвь Викселла*.

### Перестройка портфеля инвесторов на викселлианском рынке

На «нормальном» рынке перестройка инвестиционного портфеля может быть стилизована посредством приобретения инвестором преимущественно акций, облигаций либо продажи (ликвидации) активов. Изменения знака характеристического корня,

$$\lambda(l) \equiv f'(l) = a - 2bl,$$

служат сигналами предпочтительности приобретения различных ценных бумаг или начала продажи активов. Перестройка портфеля происходит в различных интервалах значений финансового рычага, представленных на рис. 5.

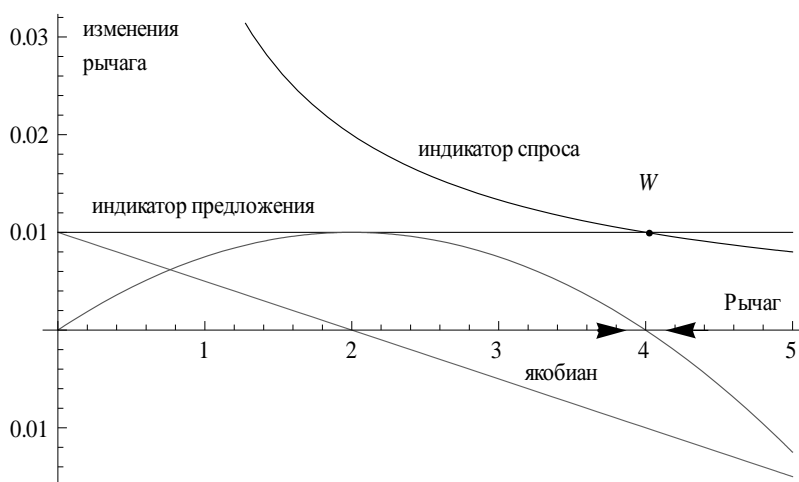


Рис. 5. Стадии перестройки инвестиционного портфеля

Максимальное изменение рычага достигается в точке  $\hat{l} = \frac{a}{2b}$ , причем характеристический корень положителен для значений финансового рычага  $l < \hat{l}$ . Соответственно, когда индикатор спроса на кредиты превышает удвоенный спред их стоимости (индикатор предложения), т.е.

$$\frac{\rho - r}{l} > 2(\mu - r),$$

для небольших объемов использования заемных средств относительная доходность собственного капитала весьма высока. Это предполагает формирование портфеля посредством новых заимствований, которые инвестируются в высокодоходные инструменты, преимущественно в акции.

По мере увеличения рычага доходность портфеля снижается, а после точки  $\hat{l} = \frac{a}{2b}$  характеристический корень (11) становится отрицательным. Это означает, что пока индикатор спроса на кредиты остается выше индикатора их предложения, т.е.

$$f'(l) < 0; f(l) > 0,$$

инвесторам, наряду с акциями, следует покупать и облигации. Наконец, после прохождения стационарного значения рычага индикатор спроса на активы становится меньше их предложения:  $\frac{\rho - r}{l} < \mu - r$ . Это является сигналом к ликвидации портфеля, а продажа активов восстанавливает равенство спроса и предложения кредитов.

Конечно, сказанное выше является упрощением процесса адаптации инвесторов к неравновесиям финансового рынка. Фактическая перестройка инвестиционного портфеля основана на использовании самой различной информации, а факторы, влияющие на этот сложный процесс, носят преимущественно стохастический характер. Тем не менее простая схема, изложенная выше, весьма полезна для дальнейшей конкретизации поведения инвесторов в окрестности стационарного состояния финансового рычага.

### Поведение участников «рынка кредиторов»

Для отрицательных значений спреда,  $(\mu - r) < 0$ , действия инвесторов дестабилизируют рынок кредитов. Для стационарного рычага  $l(t) = l_2^*$  точка  $B$  на рис. 6 является точкой неустойчивого равновесия, возле которой рынок кредитов, под воздействием положительной обратной связи, ведет себя по-разному.

Пусть фактическое значение рычага выше его стационарного значения, спреда  $(\rho - \mu)$  и  $(\mu - r)$  отрицательны и  $-\left(\frac{\rho - \mu}{l - 1}\right) > -(\mu - r)$ . Отрицательный доход обычно ассоциируется с потерями, а отрицательные затраты – с экономией, причем и потери, и

экономия понимаются как положительные величины. По смыслу переход от номинальных значений спредов к их абсолютным величинам,  $Abs[.]$ , означает, что каждая дополнительная единица капитала приносит инвесторам потери (*loss*), которые, однако, меньше, чем экономия на ее приобретении:  $Abs\left[\frac{\rho - \mu}{l - 1}\right] < Abs[\mu - r]$ . Спрос на кредиты в

таких условиях, вполне оправданно, превышает их предложение. Его удовлетворение достигается аналогичными средствами: инвесторы, используя стратегии *leveraged purchases*, увеличивают использование заемных средств, повышая, соответственно, уровень рычага.

В отличие от «викселлианского» рынка, однако, избыточный спрос существует для рычага, превышающего стационарное значение. Поэтому расширение использования заемных средств вызывает рост стоимости активов, приобретение которых требует дальнейших заимствований, кажущихся эффективными. Это порождает самовоспроизводящийся (автокаталитический) процесс. Инвесторы, полагая, что растущие ожидания реализуются по мере увеличения стоимости активов, расширяют их приобретение, увеличивая, соответственно, масштабы безрассудных заимствований, а рынок возрастание рычага не ограничивает. Такой феномен давно известен в теории и практике финансов под термином «раздувание пузыря». В рамках гипотезы «финансовой нестабильности» Х. Мински неограниченное увеличение стоимости активов, возможное, конечно, лишь гипотетически, соответствует фазе «игры Понци» [Minsky, 2008]. Соответственно ветвь траектории системы справа от точки неустойчивого равновесия  $B$  на рис. 6 с полным основанием можно назвать *ветвью Мински*.

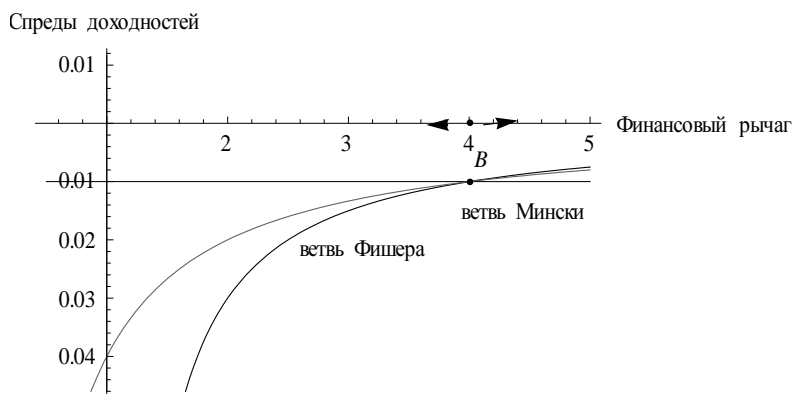


Рис. 6. Динамика «финансового пузыря» и падения рычага

Напротив, если финансовая система находится слева от точки  $B$ , то отрицательная доходность капитала ниже его отрицательных издержек финансирования. Соответственно абсолютные значения потерь инвесторов на каждой дополнительной единице капитала выше экономии, получаемой на ее приобретении:  $Abs\left[\frac{\rho - \mu}{l - 1}\right] > Abs[\mu - r]$ . Поскольку

ставка рефинансирования выше относительной доходности заемных средств, то дороговизна денег заставляет инвесторов продавать активы. Однако, когда собственный капитал приносит доходность ниже инвестиционной, то положение инвесторов не улучшается, а массовая продажа активов вызывает дальнейшее снижение их рыночной стоимости, требуя все новых продаж. Автокаталитическое снижение стоимости активов из-за падения их стоимости (*debt deflation*), как нетрудно видеть, соответствует процессу сокращения рычага (*deleveraging*), детально исследованному И. Фишером [Fisher, 1933]. Поэтому ветвь траектории системы слева от точки неустойчивого равновесия *B* характеризует «дефляционное сокращение долга» и может быть названа *ветвью Фишера*.

Следует отметить, что сокращение рычага может улучшить положение инвесторов, оперирующих на рынке отрицательных спредов доходностей<sup>19</sup>. Действительно, этот процесс приводит к повышению удельного капитала, а в точке  $l = 2$  заемные средства обеспечены собственным капиталом в пропорции 1:1. Вместе с тем относительное улучшение состояния рынка неустойчиво, и дальнейшее сокращение рычага влечет общее падение стоимости активов. Несмотря на то, что активы состоят только из собственного капитала, сокращение их объемов приводит к разрушению финансовой системы, по крайней мере, в ее нынешнем виде.

Методологически, выявленная асимметрия принятия решений, по сути дела, повторяет экспериментально подтвержденный вывод «поведенческих финансов» относительно «зеркально отраженной» трактовки участниками рынка своих результатов и потерь [Malkiel, 2012]. Численные характеристики мотивации и поведения инвесторов в различных структурах рынка представлены в табл. 2. Отметим, что в двух последних столбцах этой таблицы неравенства возле точек *W* и *B* одинаковы, но их экономическая интерпретация различна. Если в точке *W* сравниваются результаты и затраты, то в точке *B* – потери и экономия. Отсюда следуют и принципиальные различия в поведении инвесторов.

Таблица 2.

## Характеристики поведения инвесторов

	$a = \mu - r$	$\rho - \mu$	$b = a / K$	$l^* \equiv K$	$l = 3$	$l = 5$
Точка <i>W</i>	0,01	0,04	0,0025	4	$0,013 > 0,01$	$0,008 < 0,01$
Точка <i>B</i>	-0,01	-0,04	-0,0025	4	$-0,0013 < -0,01$ $0,013 > 0,01$	$-0,008 > -0,01$ $0,008 < 0,01$

Зависимость стационарных состояний рычага от параметра логистического уравнения  $a = (\mu - r)$  дается бифуркационной диаграммой, показанной на рис. 7. Поведение логистической системы в зависимости от параметра, как известно, может иметь так на-

<sup>19</sup> В выступлении на банковской конференции в Чикаго Б. Бернанке, характеризуя поведение инвесторов на послекризисном рынке, практически дословно воспроизвел описание И. Фишером динамики сокращения финансового рычага: «Заемщики, неспособные поддерживать уставной капитал (to meet margin calls) и финансировать активы, вынуждены их продавать, но циклическое падение финансового рычага снижает цены и вызывает дальнейшую ликвидацию активов» [Bernanke, 2013].

зываемую «транскритическую» бифуркацию, меняющую свойства устойчивости системы при сохранении числа точек равновесия [Strogatz, 1994]. Для отрицательных значений параметра,  $a < 0$ , начало устойчиво (сплошная линия), а стационарные состояния  $l_2^* = K$  неустойчивы (прерывистая линия), тогда как для положительных значений параметра свойства устойчивости стационарных состояний меняются на противоположные.

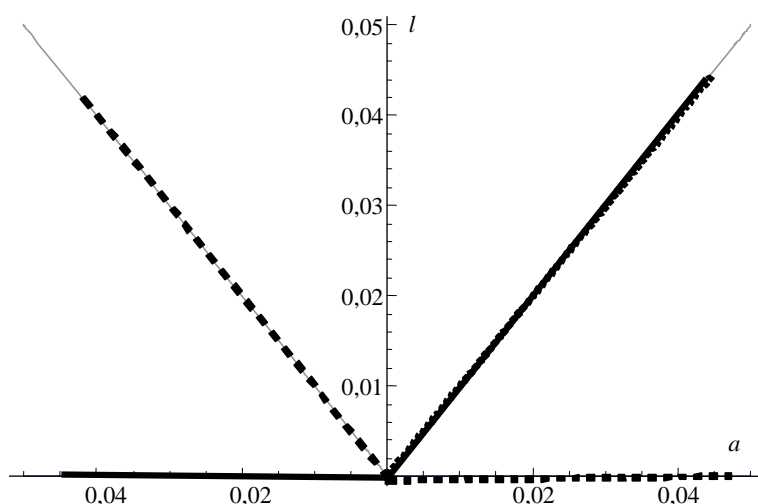


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма рынка кредитов

Экономически бифуркационная диаграмма раскрывает изменение свойств рынка кредитов, происходящее при смене знака спреда доходностей  $a = (\mu - r)$ . Например, для положительных спредов «ветвь Викасселла» состоит из устойчивых стационарных состояний. Однако после прохождения параметром нулевого значения они становятся неустойчивыми, распадаясь на ветви Фишера и Мински для отрицательных спредов. Бифуркация соответствует скачкообразной смене режимов рынка кредитов и соответствующих стереотипов поведения инвесторов. Можно полагать, что структурные реформы финансовой системы, согласно закону Фрэнка – Додда (Frank – Dodd Act, 2010) либо банковского регулирования «Базель III», преследуют цель возврата к положительным значениям спредов доходностей. Причины изменения доходностей инвесторов и кредиторов модель не идентифицирует, но указание на такую возможность важно для понимания механизмов формирования критического состояния рынка.

### Траектории решения уравнения финансового рычага

Логистическое уравнение, как отмечалось выше, является одним из немногих нелинейных дифференциальных уравнений, имеющих решение в виде конечных интегралов. Это решение находится достаточно просто. Уравнение (8) сначала преобразуется к виду

$$\frac{dl_t}{l_t(1-l_t/l^*)} = (\mu - r)dt,$$

затем интегрируется с учетом того, что левая часть является дифференциалом логарифма. Для логарифмической произвольной константы интегрирования получаем:

$$\int_0^t d \log \left[ \frac{l_u}{1-l_u/l^*} \right] = \int_0^t (\mu - r) du + \log \left[ \frac{l_0}{1-l_0/l^*} \right].$$

Результат интегрирования, после несложных алгебраических преобразований, представляет финансовый рычаг как функцию времени:

$$(15) \quad l(t) = l^* \left\{ 1 + \left( \frac{l^*}{l_0} - 1 \right) \exp[-(\mu - r)t] \right\}^{-1}.$$

Траектории решения (15) для различных начальных условий и параметров финансовой системы представлены на рис. 8. Эта информация дополняет и конкретизирует выводы, полученные на основе фазовой диаграммы финансовой системы. Экономическая интерпретация решений логистической модели для разных значений стационарного положения и начальных условий представлена в табл. 3.

Таблица 3.

Траектории финансового рычага

Состояния рынка	$l^* > l_0$	$l^* < l_0$
$\mu - r > 0$	Стабилизация кредитов, $l_0 \rightarrow l^*$	Стабилизация кредитов, $l_0 \rightarrow l^*$
$\mu - r < 0$	Уменьшение рычага, $l_0 \rightarrow 0$	Кредитная экспансия, $l_0 \rightarrow \infty$

Коротко, информация табл. 3 и рис. 8 сводится к следующему. Положительные значения спреда,  $(\mu - r) > 0$ , формируют траектории, сходящиеся к стационарному состоянию системы, равному  $l(t) = 4$ , причем это происходит для любых начальных условий, например,  $l_0^1 = 5$ ;  $l_0^2 = 3$ . Этот пучок траекторий соответствует результатам анализа Виксела для «нормального» рынка кредитов.

Для отрицательных спредов траектории принципиально различны. Если начальный уровень рычага больше его стационарного значения, то теоретически рычаг увеличивается неограниченно. «Траектория Мински» для модели финансового рычага – это вполне возможное, хотя и крайне нежелательное, развитие рынка. В отличие от модели роста популяций, сочетание неравенств  $l^* < l_0$  и  $\mu - r < 0$  характеризует не парадоксальную ситуацию, а раздувание финансового пузыря, исследованное целым рядом экономистов, включая

Х. Мински [Minsky, 2008]. «Траектория Мински», однако, приводит к полной разбалансированности рынка, поскольку для  $l(t) \rightarrow \infty$  балансовые равенства (1) и (4) теряют смысл. Напротив, если финансовый рынок сбалансирован, то следует ожидать окончания процесса раздувания финансового пузыря по исчезновению собственного капитала, т.е.  $e(t) \rightarrow 0$ . Эта ситуация будет рассмотрена в следующем разделе работы.

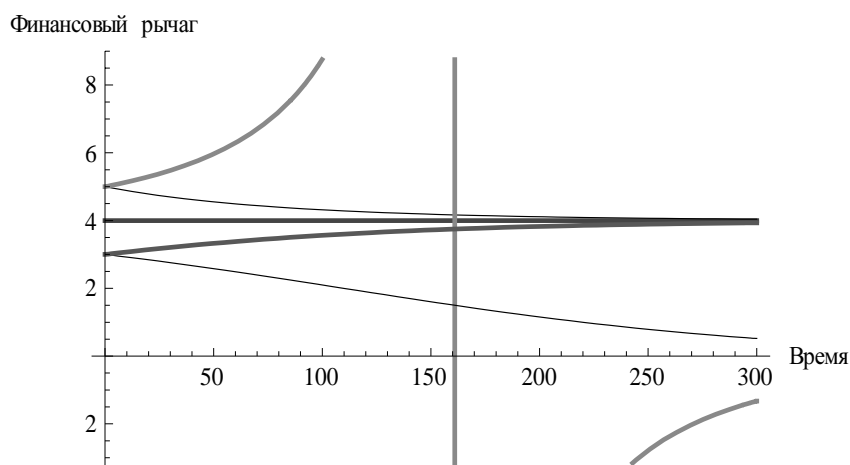


Рис. 8. Траектории решений логистической модели финансового рычага

Наконец, если начальный уровень рычага ниже стационарного значения, то вдоль ветви Фишера рычаг уменьшается теоретически до нулевого значения, где система перестает существовать. Для ветви Фишера специфическое значение приобретает прохождение системы через отрезок значений рычага: от  $l(t_2) = 2$  до точки  $l(t_1) = 1$ . На этом отрезке отношение объема заемных средств к собственному капиталу уменьшаются от 1:1, до пропорции 0:1. С экономической точки зрения ситуация  $l(t_2) = 2$  означает наилучшую обеспеченность заемных средств собственным капиталом. Таким образом, адаптация участников рынка к условиям послекризисного периода и перестройка (вдоль «ветви Фишера») рыночной структуры может улучшить состояние рынка кредитов.

Отказ от принципа частичного банковского резервирования (*fractional banking*) приводит к экономически положительным результатам лишь для весьма специфического состояния системы, однако такое улучшение неустойчиво. «Обратная» бифуркация системы – ее возврат на ветвь устойчивых состояний – требует проведения структурных реформ финансового рынка. Успешность таких реформ определяется восстановлением способности рынка устанавливать правила поведения инвесторов, исключающие возникновение кризисных ситуаций.

### Анализ динамики удельного капитала

Решение (15) логистического уравнения является гармонической взвешенной средней<sup>20</sup> стационарного значения финансового рычага  $l^*$  и его начальных условий  $l_0$ . Для нашей модели гармоническая средняя рычага оказывается арифметической средней взвешенной начального значения  $w_0$  и стационарного значения  $w^*$  удельного капитала, поскольку  $w(t) = l^{-1}(t)$ , а изменения удельного капитала соответствуют изменениям финансового рычага. Траектории удельного капитала находятся элементарными преобразованиями решения (16) и записываются в следующем виде:

$$(16) \quad w(t) = w^* (1 - \exp[-at]) + w_0 \exp[-at],$$

где  $a = \mu - r$ ,  $w^* = \frac{\mu - r}{\rho - r}$  – стационарное значение и  $w_0$  – начальное значение удельного капитала. Веса средней (16) дополняют друг друга до единицы и находятся по экспонентам, соответствующим спредам доходностей. Анализ, например, «ветви Мински», может быть дополнен анализом «асимметричной» динамики удельного капитала, хотя функция  $w(t) = l^{-1}(t)$  решением модели (7) не является.

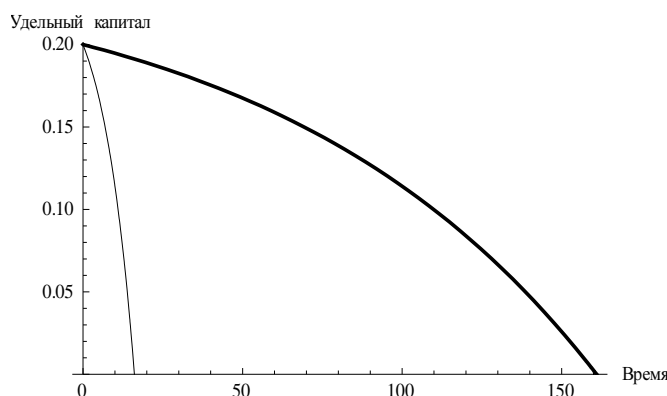


Рис. 9. Динамика удельного капитала

Нулевой уровень собственного капитала – экономически более понятная характеристика в сравнении с «бесконечным» финансовым рычагом, хотя обе демонстрируют

<sup>20</sup> Напомним, что гармоническая взвешенная средняя  $H_w$  величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с весами  $w_1, w_2, \dots, w_n$  определяется как 
$$H_w = \left( \sum_{i=1}^n w_i \right) \left[ \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i} \right]^{-1}.$$



один и тот же процесс. Так, «бесконечный» рост финансового рычага, происходящий вдоль «ветви Мински», на сбалансированном рынке возможен лишь при уменьшении до нуля удельного капитала, причем, на самом деле, задолго до этого финансовый рынок перестает существовать. На рис. 9 показано, как траектория удельного капитала, аналогичная «траектории Мински», пересекает ось абсцисс.

Формула (16) удобна для ориентировочного расчета времени перехода системы в критическое состояние, поскольку корень  $t = t_c$  уравнения

$$w^* (1 - \exp[-at]) + w_0 \exp[-at] = 0$$

соответствует длительности конечного интервала времени, по окончании которого финансовый рынок коллапсирует.

### Рычаг глобальной финансовой системы

Несомненным преимуществом модели (7) является ее компактность и простота, которыми воспользуемся для прогноза динамики финансового рычага. В последующих расчетах использованы данные докладов МВФ о глобальной финансовой стабильности за 2003–2013 гг., систематизированные и дополненные в работе [Смирнов, 2013]. Параметры и состояния логистической модели, представленные в табл. 4, рассчитаны на основе данных о финансовых активах, долге и капитале глобальной финансовой системы в определении МВФ [Global Financial Stability Reports, 2004–2013].

Таблица 4.

Характеристики глобальной финансовой системы

	2003 г.	2004 г.	2005 г.	2006 г.	2007 г.	2008 г.	2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.
$\mu_t$		0,1278	0,0491	0,2543	0,2064	-0,0666	0,0830	0,0771	0,0232	0,0496
$\rho_t$		0,1923	0	0,3656	0,2815	-0,4854	0,4090	0,1674	-0,1452	0,1148
$r_t$		0,1071	0,0660	0,2182	0,1791	0,0990	0,0232	0,0529	0,0713	0,0350
$(\mu - r)_t$		0,0207	-0,0169	0,0361	0,0273	-0,1656	0,0598	0,0242	-0,0481	0,0146
$(\rho - r)_t$		0,0852	-0,0660	0,1474	0,1024	-0,5844	0,3858	0,1145	-0,2165	0,0747
$K_t$	4,12	3,9	4,08	3,75	3,53	6,45	4,73	4,50	5,46	
$l_t$	4,11	3,89	4,08	3,75	3,53	6,4	4,92	4,53	5,43	5,12

Ставки доходности в табл. 4 отражают как изменения цен активов, так и структурные сдвиги в составе агрегированного инвестиционного портфеля. Для каждого года «теоретические»,  $l_{t-1} = \left( \frac{\rho - r}{\mu - r} \right)_t$ , и эмпирические,  $l_{t-1} = A_{t-1} / e_{t-1}$  (последняя строка таблицы),

значения рычага практически совпали, что служит аргументом в поддержку логистической гипотезы. Хотя величина рычага, если судить по данной (очень небольшой) выборке, сигналом финансовой катастрофы не является, но его высокие значения ассоциируются с изменениями знака спредов, которые провоцируют бифуркации системы.

Таблица 4 указывает на некоторые особенности развития глобальной финансовой системы за указанный период. Так, финансовой катастрофе (резкий скачок рычага) 2008 г. предшествовала смена знаков спредов, которая произошла в 2005 г. Она осталась незамеченной, хотя, скорее всего, была симптомом грядущей катастрофы. В этой связи особое внимание следует обратить на рост доходности кредиторов, который привел к негативным спредам уже в послекризисном 2011 г. Отставание доходности инвесторов от доходности кредиторов требует защиты их интересов, которая реализуется в рамках политики «*forward guidance*». Ее обоснованность тем самым подтверждается, хотя вопрос о степени эффективности остается без ответа. Согласно данным табл. 4, среднее значение рычага (5,0) за послекризисный период 2009–2012 гг., несмотря на все преобразования глобальных финансов, оказалось выше средней (4,58) за 2003–2012 гг.

Траектории рычага на период 2012–2026 гг. в диапазоне спредов  $[-0,1656; 0,0598]$  рассчитаны по формуле

$$(17) \quad l(t) = 4,58 \left\{ 1 + \left( \frac{4,58}{5,12} - 1 \right) \exp[-a t] \right\}^{-1},$$

где начальным значением является уровень рычага в 2012 г., а стационарному состоянию соответствует средняя за 2003–2012 гг. Семейство траекторий рычага на предстоящие годы представлено поверхностью на рис. 10. Ее конфигурация показывает, что коллапс рынка, который может произойти за разные промежутки времени, является следствием негативных спредов. На рисунке видно также, что деградация неустойчивого рынка, если знак спреда ( $\mu - r$ ) сменяется на положительный, останавливается, а динамика рычага превращается в устойчивую, тяготеющую к стационарному состоянию.

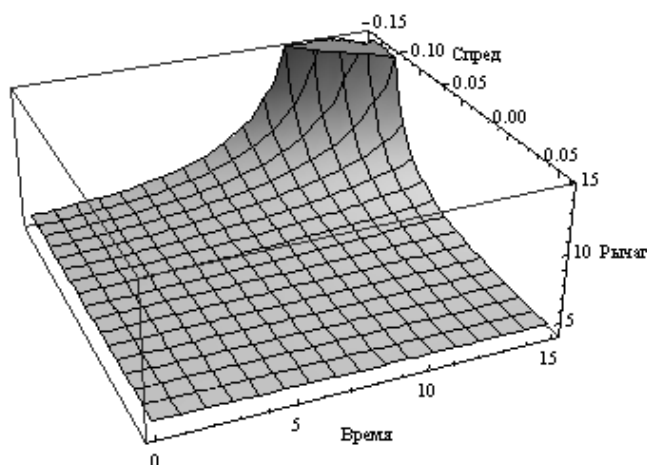


Рис. 10. Прогноз финансового рычага

Финансовые потрясения в логистической модели ассоциируются с бифуркациями, происходившими, как следует из данных табл. 4, в 2005, 2008 и 2011 гг. Структура доходностей на рынке кредитов, при этом, претерпевает кардинальные изменения: стоимость рефинансирования операций становится выше инвестиционной доходности, а доходность собственного капитала падает ниже инвестиционной доходности активов. Отрицательные спреды, сохраняя эмпирическое значение рычага, делают стационарное состояние неустойчивым, причем система эволюционирует вдоль «ветви Фишера», если фактический рычаг ниже стационарного, либо вдоль «ветви Мински» в противном случае.

Согласно представленным данным, сохранение негативного спреда 2011 г. предполагает рост рычага, соответствующий «ветви Мински», что ведет к коллапсу глобальных финансов. Это – вполне возможное следствие недостаточно глубоких преобразований глобальных финансов, происходящих в послекризисный период. Интересно, что данный вывод совпадает с результатами прогноза, которые были получены автором на основе иной методологии и модели [Смирнов, 2013]. Вместе с тем практическая трудность, возникающая при использовании решения (17), состоит в том, что параметры модели изменяются случайным образом, причем влияя и на константы данной формулы.

### Вместо заключения

Синтез научных концепций К. Викселла, Х. Мински и И. Фишера, по нашему мнению, является одной из актуальных задач, стоящих перед современной экономической теорией. В этом контексте представленные результаты являются решением частной и, в некотором смысле, обратной задачи. Удобство логистической модели как инструмента непротиворечивого изложения этих концепций, на наш взгляд, – весомый аргумент в защиту ее использования для изучения различных режимов развития финансового рынка. Убедительность экономической интерпретации логистической модели, разумеется, не означает, что она – единственно возможная. Предложенная модель, не исчерпывая содержания теорий Викселла, Мински и Фишера, требует дальнейшей разработки, включая проверку соответствия данным о фактической эволюции финансовых рынков.

Логистическая модель, в применении к анализу эмпирической информации, требует адекватного учета неопределенности, органически присущей финансовым процессам. Укажем на два методологически важных момента. Так, для детерминированной модели был детально проведен анализ спредов, которые, как известно, являются весьма распространенной мерой рискованности рынков. Но для полного отражения влияния неопределенности на финансовые процессы этого недостаточно, а учет волатильности спредов приводит к серьезной модификации модели. Кроме того, устойчивость детерминированной динамики рычага далеко не всегда сохраняется для процессов, существенной компонентой которых являются «шумы» разного рода. Следствием этого могут быть прогнозы, фатально ошибочные, отклоняющиеся от действительности не в деталях, а в принципе. Исследование стохастической версии логистической модели рычага будет предложено в следующей статье.

\* \*  
\*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Смирнов А.Д.* Макрофинансы: модель пузырей и кризисов // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2010. Т. 14. № 3, 4.
- Смирнов А.Д.* Финансовый рычаг и нестабильность // Вопросы экономики. 2012. № 9. С. 1–27.
- Смирнов А.Д.* Простая модель предсказания финансовых кризисов // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2013. Т. 17. № 2.
- Adrian T., Shin H.S.* Liquidity and Financial Contagion // Financial Stability Review. № 11. Paris: Banque de France, 2008.
- Aubrey T.* A Wicksellian Approach to Asset Allocation: Equity-like Returns with Bond-like Volatility // Infostream. 2<sup>nd</sup> quarter. Thomson Reuters, 2012.
- Aubrey T.* Profiting from Monetary Policy: Investing through the Business Cycle. London: Palgrave Macmillan, 2013.
- Ausloos M., Dirickx M.* (eds.) The Logistic Map and the Route to Chaos. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- Bagnoli A., Becalli E., Boitani A., Montecini A.* Is the Leverage of European Banks Procyclical? / 25<sup>th</sup> Annual Meeting of the European Economic Association. Glasgow, 2011.
- Bernanke B.* Monitoring the Financial System / 49<sup>th</sup> Annual Conference on Bank Structure and Competition, 2013. ([www.federalreservesystem.org](http://www.federalreservesystem.org))
- Blinder A.* Quantitative Easing: Entrance and Exit Strategies: CEPS Working Paper № 204. Princeton University, 2010.
- BOE Expands Credit-Boosting Program as Small Firms Targeted. Bloomberg, April 24, 2013.
- Coleman W.* Inflation without a Quantity of Money: A Simple Wicksellian Model Outlined: Discussion Paper № 557. Center for Economic Policy Research. The Australian National University, 2007.
- Draghi Opens New Front as Negative Deposit Rate is Eyed. Bloomberg, May 2, 2013.
- Fisher I.* The Debt-Deflation Theory of Great Depressions // *Econometrica*. 1933. 1. P. 337–357.
- Fletcher G.* Understanding Dennis Robertson: The Man and his Work. Chetelham: Edward Elgar Publishing, 2000.
- French D.* Early Speculative Bubbles and Increase in Money Supply. 2<sup>nd</sup> ed. Auburn: Ludwig von Mises Institute, 2009.
- Gabriel J-P., Sausy F., Bersier L-F.* Paradoxes in the Logistic Equation? Comment, 2003. ([doc.rero.ch/record/4133/files/1\\_gabriel\\_plc.pdf](http://doc.rero.ch/record/4133/files/1_gabriel_plc.pdf))
- Garrison R.* The Austrian Theory of the Business Cycle // Glasner D. Business Cycles and Depressions. Garland Publishing Co., 1997. P. 23–27.
- Global Financial Stability Reports, 2004–2013. Washington, D.C.: IMF, 2004–2013.
- Hayek F.* Prices and Production, and Other Works / ed. by J. Salerno. Auburn: Ludwig von Mises Institute, 2008.
- Janeway W.H.* Risk versus Uncertainty: Frank Knight's «Brute» Facts of Economic Life. 2006. (<http://privatizationofrisk.ssrc.org/Janeway/printable.html>)
- Keynes J.M.* The General Theory of Employment, Interest and Money. N.Y.: Harcourt-Brace, 1936.
- Knight F.* Risk, Uncertainty and Profit. Washington: Beard Books, 2002.
- Krugman P.* End This Depression Now! N.Y., London: W.W. Norton & Company, 2012.
- Malkiel B.* A Random Walk Down Wall Street. N.Y.: W.W. Norton, 2012.
- Minsky H.* Stabilizing an Unstable Economy. 2<sup>nd</sup> ed. N.Y.: McGraw Hill, 2008.

*Mises L. von.* Human Action. A Treatise on Economics. 4<sup>th</sup> revised ed. San Francisco: Fox & Wilks, 1996.

*Pozsar Z., Adrian T., Ashcraft A., Boeski H.* Shadow Banking. Federal Reserve Bank of New York. Staff Report. № 458. July 2010.

*Smirnov A.D.* To Buy or Not to Buy, That's Not the Question: A Simple Model of Credit Expansion: Working Paper WP7/2012/05. Series WP7. Moscow: NRU HSE, 2012.

*Soros G.* The New Paradigm for Financial Markets: The Credit Crash 2008 and What it Means. N.Y.: Public Affairs, 2008.

*Strogatz S.* Nonlinear Dynamics and Chaos. Addison-Wesley Publishing, Reading, 1994.

The Financial Crisis Inquiry Report. National Commission on the Causes of the Financial and Economic Crisis in the United States. Official Government Edition. Washington, D.C., January 2011.

The Times. 2013. August 9<sup>th</sup>.

*Wright C., Diavatopoulos D., Felton J.* Exchange Traded Notes: An Introduction // Journal of Investing. 2009. 19. P. 27–37.

*Wicksell K.* Interest and Prices. 1898. (<http://mises.org/books/interestprices.pdf>), Ludvig von Mises Institute, 2007.

Wikipedia, The free Encyclopedia. Libor Scandal. The Times, July 25, 2013.

*Woodford M.* Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy. Princeton: Princeton University Press, 2003.

## Logistic Model of Financial Leverage

**Smirnov Alexander**

National Research University «Higher School of Economics»,  
20, Myasnitskaya ul., Moscow, 101990, Russian Federation  
E-mail: adsmir@hse.ru

The model of financial leverage dynamics that had been proposed by the author (the journal of «Voprosy Ekonomiki», 2012) was investigated and developed further. Aggregate structure of a financial system was introduced via spreads between different asset returns while its behavior was represented by the leverage. Logistic model proved to be convenient in formalization of the Wicksellian analysis of a credit market. Being applied to the study of collective investors' behavior near a stationary leverage, the model showed that the normal credit market had a stable stationary point, called a «Wicksellian equilibrium». In its local neighborhood different investment strategies did not give rise to the credit expansion. Contrary to that, a conjugate stationary point, corresponding to the irrational market, appeared to be an unstable one. In its neighborhood the market behavior could be decomposed into two branches that should be analyzed separately. Along so called «Minsky branch» a financial bubble being fuelled by the credit expansion has been formed, evolved and ultimately burst, suggesting the system's singularity. Another, the «Fisher branch», near the unstable point has demonstrated the process of deleveraging that drove the system toward its collapse but under different economic conditions. Interestingly, that trajectory might have included some unstable states having the symptoms of the improved market conditions. Thus, the metastable qualities of a financial system, though harmful and highly undesirable, are by no means «paradoxical», contrary to the well known Verhulst model of a biological population. Using the IMF information the model predicted family of the leverage trajectories for the global financial system.

**Key words:** logistic equation; Wicksellian analysis; metastability; assets; credit; capital; leverage.

**JEL Classification:** C2, E4, E5, G1, N2.

\* \*  
\*

### References

- Smirnov A.D. (2010) Makrofinansy: model' puzyre i krizisov [MacroFinance: A Model of Bubbles and Crises]. *Ekonomicheskii zhurnal Vysshei shkoly ekonomiki*, vol. 14, no 3, 4.
- Smirnov A.D. (2012) Finansovyi ryuchag i nestabil'nost' [Financial Leverage and Instability]. *Vo-prosy ekonomiki*, no 9, pp. 1–27.
- Smirnov A.D. (2013) Prostaya model' predskazaniya finansovykh krizisov [A Simple Model of Crises Prediction]. *Ekonomicheskii zhurnal Vysshei shkoly ekonomiki*, vol. 17, no 2.
- Adrian T., Shin H.S. (2008) Liquidity and Financial Contagion. *Financial Stability Review*, no 11, Paris: Banque de France.
- Aubrey T. (2012) A Wicksellian Approach to Asset Allocation: Equity-like Returns with Bond-like Volatility. *Infostream*, 2<sup>nd</sup> quarter, Thomson Reuters.
- Aubrey T. (2013) *Profiting from Monetary Policy: Investing through the Business Cycle*, London: Palgrave Macmillan.
- Ausloos M., Dirickx M. (eds.) (2006) *The Logistic Map and the Route to Chaos*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- Bagnoli A., Becalli E., Boitani A., Montecini A. (2011) *Is the Leverage of European Banks Procyclical?* 25<sup>th</sup> Annual Meeting of the European Economic Association, Glasgow.
- Bernanke B. (2013) *Monitoring the Financial System*, 49<sup>th</sup> Annual Conference on Bank Structure and Competition, [www.federalreservesystem.org](http://www.federalreservesystem.org)
- Blinder A. (2010) *Quantitative Easing: Entrance and Exit Strategies*, CEPS Working Paper no 204, Princeton University.
- BOE (2013) *Expands Credit-Boosting Program as Small Firms Targeted*, Bloomberg, April 24.
- Coleman W. (2007) *Inflation without a Quantity of Money: A Simple Wicksellian Model Outlined*, Discussion Paper no 557, Center for Economic Policy Research, The Australian National University.
- Draghi (2013) *Opens New Front as Negative Deposit Rate is Eyed*, Bloomberg, May 2.
- Fisher I. (1933) The Debt-Deflation Theory of Great Depressions. *Econometrica*, no 1, pp. 337–357.
- Fletcher G. (2000) *Understanding Dennis Robertson: The Man and his Work*, Chetelham: Edward Elgar Publishing.
- French D. (2009) *Early Speculative Bubbles and Increase in Money Supply*, 2<sup>nd</sup> ed., Auburn: Ludwig von Mises Institute.
- Gabriel J-P., Sausy F., Bersier L-F. (2003) *Paradoxes in the Logistic Equation? Comment*, [doc.rero.ch/record/4133/files/1\\_gabriel\\_plc.pdf](http://doc.rero.ch/record/4133/files/1_gabriel_plc.pdf)
- Garrison R. (1997) The Austrian Theory of the Business Cycle, Glasner D. *Business Cycles and Depressions*. Garland Publishing Co., pp. 23–27.
- IMF (2004–2013) *Global Financial Stability Reports, 2004–2013*, Washington, D.C.: IMF.
- Hayek F. (2008) *Prices and Production, and Other Works* (ed. J. Salerno), Auburn: Ludvig von Mises Institute.
- Janeway W.H. (2006) *Risk versus Uncertainty: Frank Knight's «Brute» Facts of Economic Life*, <http://privatizationofrisk.ssrc.org/janeway/printable.html>
- Keynes J.M. (1936) *The General Theory of Employment, Interest and Money*, New York: Harcourt-Brace.
- Knight F. (2002) *Risk, Uncertainty and Profit*, Washington: Beard Books.
- Krugman P. (2012) *End This Depression Now!* New York, London: W.W. Norton & Company.
- Malkiel B. (2012) *A Random Walk Down Wall Street*, New York: W.W. Norton.

- Minsky H. (2008) *Stabilizing an Unstable Economy*, 2<sup>nd</sup> ed., New York: McGraw Hill.
- Mises L. von (1996) *Human Action. A Treatise on Economics*, 4<sup>th</sup> revised ed., San Francisco: Fox & Wilks.
- National Commission on the Causes of the Financial and Economic Crisis in the United States (2011) *The Financial Crisis Inquiry Report*, Official Government Edition, Washington, D.C., January.
- Pozsar Z., Adrian T., Ashcraft A., Boeski H. (2010) *Shadow Banking*, Federal Reserve Bank of New York, Staff Report, no 458, July.
- Smirnov A.D. (2012) *To Buy or Not to Buy, That's Not the Question: A Simple Model of Credit Expansion*. Working Paper WP7/2012/05, Series WP7, Moscow: NRU HSE.
- Soros G. (2008) *The New Paradigm for Financial Markets: The Credit Crash 2008 and What it Means*, New York: Public Affairs.
- Strogatz S. (1994) *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley Publishing, Reading.
- The Times*. 2013. August 9<sup>th</sup>.
- Wright C., Diavatopoulos D., Felton J. (2009) Exchange Traded Notes: An Introduction. *Journal of Investing*, no 19, pp. 27–37.
- Wicksell K. (1898) *Interest and Prices*, Ludvig von Mises Institute, 2007, <http://mises.org/books/interestprices.pdf>
- Wikipedia, The free Encyclopedia (2013) Libor Scandal. *The Times*, July 25.
- Woodford M. (2003) *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton Princeton: University Press.