

Обеспечение активов макрофинансовой системы и стохастическая динамика рычага¹

Смирнов А.Д.

Данная статья продолжает исследование логистической модели финансового рычага, которое проводится в контексте соотношения стоимости финансовых активов и реальных ресурсов. Обсуждаются экономические предпосылки модели, в частности, аналогия между макрофинансовой системой и займами с возобновляемым залогом. Рассматриваются результаты эмпирической апробации логистической модели на данных МВФ о глобальных финансах, включая кризис 2008 г. Гипотеза стационарного гамма-распределения случайного рычага используется для нахождения размеров мировых финансовых активов, обеспеченных ресурсами (мировым ВВП). Раскрывается экономический смысл экспоненты Ляпунова для стохастической модели, которая служит «мерой доверия», т.е. уверенности инвесторов в платежеспособности финансовой системы. Утрата уверенности инвесторов в погашении долга вызывает редукцию гамма-распределения рычага к экспоненциальному распределению, что является сигналом расстройств рынка кредитов. Несмотря на практическую идентичность экономической интерпретации детерминированной и стохастической моделей, их поведение может существенно различаться. Так, высокая зашумленность динамики рычага может вызвать в долгосрочном периоде отклонение траекторий решений стохастической системы от стационарного состояния. Обратно, лишь малая волатильность рычага гарантирует сходимости стохастических траекторий, причем не к его ожидаемой величине, а к моде. Критическая рассогласованность стоимости ресурсов и финансовых активов возникает не только из-за избыточных заимствований, накопление которых происходит при раздувании финансового пузыря (вдоль ветви Мински). «Токсичные» активы могут формироваться из-за нежелания инвесторов брать займы в достаточных количествах для рефинансирования долга, например, по причине высокой волатильности рынков. Так, снижение обеспеченности активов мировой финансовой системы, измеряемой величиной рычага на единицу ВВП, вызвало формирование токсичных активов, объем которых в 2012 г. достиг примерно 16 трлн долл.

¹ Логистическая модель финансового рычага обсуждалась на ряде научных семинаров и мастер-классов, прошедших в Москве и Лондоне. Их участникам, а также Э.Б. Ершову особенно, автор выражает свою признательность, оставляя себе ответственность за возможные ошибки.

Смирнов Александр Дмитриевич – заслуженный деятель науки РФ, д.э.н., профессор, действительный член Российской академии естественных наук, НИУ ВШЭ. E-mail: adsmir@hse.ru

Статья поступила в Редакцию в марте 2014 г.

Ключевые слова: финансовый рычаг; логистическая модель; гамма-распределение; экспонента Ляпунова; обеспечение активов ресурсами.

В экономических исследованиях, насколько это известно автору, логистическая (непрерывная) модель занимает весьма скромное место, хотя уравнение Верхульста хорошо изучено и имеет огромное число приложений, особенно в биологии. Одним из немногих примеров использования логистической кривой в экономике является гипотеза «затухающих» темпов индустриализации страны, обоснованная российскими учеными (Базаров, Громан, Маслов и др.) в 20-х годах прошлого столетия. Их результаты плохо вписались в политические реалии тех дней, поскольку большевистская партия требовала ускорения экономических и социальных преобразований любой ценой. Эти ученых, как и других представителей школы Кондратьева – Чайанова, постигла трагическая судьба, а математическое моделирование экономики на долгие годы было предано в России забвению². Между тем применение логистической модели явилось научным достижением, намного опередившим экономические представления той эпохи.

Идея о существовании объективных соответствий между активностью системы и ее ресурсным обеспечением – квинтэссенция логистической модели – отражает, на наш взгляд, содержание экономических процессов не в меньшей степени, чем, скажем, эволюции биосистем. Достаточно вспомнить, что нелинейная компонента обратной связи, введенная П-Ф. Верхульстом, корректировала дифференциальное уравнение роста, моделирующее гипотезу экономиста Т. Мальтуса. В таком же контексте можно говорить о существовании объективной меры связи между стоимостью финансовых активов и реальных ресурсов, являющихся их обеспечением. Эта идея является центральной для понимания монетизации долга, и финансовых процессов вообще. Макрофинансовая рассогласованность, либо из-за чрезмерности заимствований, либо нежелания (или невозможности) брать кредиты, аperiodически порождает финансовые кризисы. Так, неоправданно высокие заимствования и неадекватное использование крупными банками финансового рычага – отношения стоимости финансовых активов к собственному капиталу – явились важнейшим фактором кредитного кризиса 2007–2008 гг. Его продолжением стал длительный период накопления банками избыточной ликвидности, которая оседала на их балансах из-за резкого сокращения объемов кредитования, особенно малого и среднего бизнеса. С тех пор не прекращаются попытки регулирования финансового рычага, в частности, в рамках системы «Базель III». Однако ожесточенные дискуссии вокруг этой проблемы, продолжающиеся уже много лет, по-прежнему, далеки от завершения [The Economist, 2014]. Как представляется, логистическая модель, систематизируя зависимости между ставками доходности, стоимостью кредитов и финансовым рычагом, помогает продвижению в понимании этих важнейших процессов.

² О модели «затухающих» темпов автору рассказал В.В. Леонтьев, который в те далекие годы был молодым исследователем, принимавшим участие в указанных разработках. В числе немногих Василию Васильевичу удалось избежать трагической участи своих коллег, а впоследствии удостоиться Нобелевской премии по экономике. Яркое представление о советских экономических исследованиях того периода дает журнал «Плановое хозяйство», опубликовавший, например, статью Громана о динамическом равновесии экономики (1927, № 7). Ссылки на публикации этого журнала можно найти, в частности, у американского теоретика экономического роста Е. Домара [Domar, 1956].

Данная статья продолжает исследование логистической модели [Смирнов, 2013], а ее основные результаты сводятся к следующему. Обсуждаются некоторые итоги дискуссии относительно ее экономических предпосылок, в частности, аналогия между макрофинансовой системой и займами с возобновляемым залогом. Рассматриваются результаты эмпирической апробации модели на данных МВФ о глобальной финансовой системе. Формулируется стохастическая версия логистической модели рычага, для которой находится стационарное гамма-распределение. Его моменты используются для нахождения размера глобальных финансовых активов, обеспеченных ресурсами (мировым ВВП). Расчеты показывают, в частности, что мировая финансовая система в 2012 г. имела токсичные активы примерно на 16 трлн долл.

Особое внимание уделяется изучению экономического смысла экспоненты Ляпунова. Показано, что этот индикатор служит мерой доверия инвесторов к финансовой системе. Если происходит утрата уверенности в погашении долга, то стационарное гамма-распределение рычага редуцируется к экспоненциальному распределению, сигнализируя о расстройстве рынка кредитов. Оказывается, что практическая идентичность экономической интерпретации детерминированной и стохастической моделей рычага не распространяется на их поведение, которое может существенно различаться. Лишь малая волатильность рычага гарантирует сходимость стохастических траекторий, причем не к ожидаемой величине рычага, а к его моде. Однако высокая зашумленность динамики рычага может вызвать в долгосрочном периоде отклонение стохастических траекторий от стационарного состояния рынка. Исследование вероятностной модели показывает, что критическая рассогласованность стоимости ресурсов и финансовых активов возникает не только при раздувании финансового пузыря. «Токсичные» активы могут формироваться из-за нежелания инвесторов брать займы в достаточных количествах, например, по причине высокой волатильности рынков. В заключение указывается, что различия между стохастическим и детерминированным аттракторами позволяют центральному банку воздействовать на волатильность монетарными методами, что, в принципе, может уменьшить негативные последствия экономических циклов.

Логистическая модель: общий подход

Непрерывная логистическая модель эволюции системы, финансовой в том числе, может быть составлена исходя из достаточно общих соображений. Например, если величина финансового рычага $l = l(t)$ характеризует состояние рынка кредитов, то на интервале времени dt дифференциал рычага $dl(t)$ допускает представление в виде

$$(1) \quad dl(t) = f[l(t)]dt,$$

где функция $f[.]$, отражающая взаимодействие уровня $l(t)$ и темпа изменения финансового рычага $g[l(t)]$, является их суперпозицией

$$f[l(t)] = g[l(t)] \cdot l(t).$$

В окрестности стационарной точки $l(t) = l^*$ разложение темпа (с точностью до линейного члена) в ряд Тейлора

$$g(l) \cong g(l^*) + g'(l^*)(l - l^*) = -g'(l^*)l^* + g'(l^*)l = a - bl,$$

при условии $g(l^*) = 0$, приводит к логистической модели финансового рычага:

$$(2) \quad dl(t) = [a - bl(t)]l(t)dt.$$

Логистическое (или Верхульста) уравнение (2) для параметров $a = -g'(l^*)l^*$ и $b = -g'(l^*)$ аппроксимирует уравнение (1) и имеет аналитическое решение.

Параметры уравнения (2) характеризуют темп прироста рычага в зависимости от уровня последнего. Для положительных a, b темпы использования заемных средств «затухают», поскольку заемщики сталкиваются с трудностями в получении кредитов. Для участников рынка, обремененных большими долгами, объемы кредитования сокращаются, либо растут ставки заимствований. Эти процессы соответствуют отрицательным обратным связям на рынке кредитов, который под их воздействием стабилизируется. Напротив, негативные значения параметров уравнения Верхульста говорят об ускорении темпов роста рычага и дестабилизации рынка кредитов. Для известных темпов и начальных значений рычага модель (2) позволяет вычислить траектории его будущих значений. Это важно практически, но недостаточно для объяснения экономической природы обратных связей и свойств метастабильности финансового рынка. Этим, по-видимому, объясняется малый интерес экономистов к непрерывной логистической модели³.

Гипотеза, объясняющая нелинейный характер взаимодействия состояний и параметров структуры финансового рынка, а также различные типы поведения инвесторов, была предложена в предыдущей статье автора [Смирнов, 2013]. Не повторяясь, рассмотрим дополнительные аргументы в части экономического обоснования модели.

О критике логистической модели рычага

В ходе обсуждения логистической гипотезы рычага некоторые участники указывали на отсутствие, по их мнению, «микроэкономических основ» модели (lack of convincing microfoundations). Автор согласен, что модель, претендующая на адекватность реальным процессам, должна следовать эмпирически выявленным и устойчивым образцам поведе-

³ Логистическое конечно-разностное уравнение (отображение), особенно после знаменитой статьи Р. Мэя в журнале «Nature» (1976), активно использовалось в исследованиях экономических процессов, порождающих хаос. Однако динамика отображения совершенно иная в сравнении с непрерывной системой, представленной дифференциальным уравнением. Дискретная логистическая модель в данной работе не рассматривается.

ния участников рынка. Однако критика логистической гипотезы в этом отношении не столь убедительна, как это может показаться. Выделим три момента данной дискуссии⁴.

Во-первых, следует отметить, что одно из основных уравнений модели – уравнение состояния рынка

$$(3) \quad \rho = r + (\mu - r)l,$$

которое было получено простыми преобразованиями макрофинансового баланса, вполне соответствует стандартным соображениям «отсутствия арбитража». В частности, его нетрудно вывести из условий типичной сделки на сегменте «слияний и поглощений» (Mergers and Acquisitions, M&A) конкурентного и полного финансового рынка.

Рассмотрим покупку одной из двух компаний с одинаковым объемом активов, A , и генерирующих доход ΔA . Активы одной из компаний, L , кроме собственного капитала включают долги: $e + x = A$, тогда как активы другой компании, U , состоят целиком из собственного капитала, $e_U = A$. Расходы на приобретение первой компании равны $-e$ и приносят доход, $\rho e = \Delta e$, получаемый по ставке $\rho \equiv ROE$. Стоимость покупки другой компании, $-e_U + x$, финансируется займом, который равен долгам первой компании и обслуживается по ставке $r = \Delta x/x$. Соответственно, часть дохода $\Delta A = \rho_U e_U \equiv \mu A$, приносимого этой компанией, уходит на обслуживание займа Δx . По соображениям отсутствия арбитража, равные затраты на совершение сделки должны приносить одинаковые финансовые результаты. Издержки сделки удовлетворяют условиям финансового баланса: $-e = -e_U + x$, или $e = A - x$, а результативность сделки характеризуется равенством доходов $\rho e = \mu A - rx$. Нормирование последнего баланса на величину собственного капитала приводит к уравнению финансового рычага (3) или его модификации:

$$(3') \quad \rho = \mu + (\mu - r)[l - 1],$$

где $x/e = l - 1$.

Если заем на приобретение второй компании, равен долгам первой компании, то это уравнение соответствует известному утверждению Модильяни – Миллера⁵. Уравнение (3') часто используется в финансовой практике, поскольку моделирует возможности получения доходности на дополнительную единицу собственного капитала, которая превышает рыночную инвестиционную доходность. Вместе с тем оно указывает и на опасность возникновения больших потерь в случае отрицательного спреда $(\mu - r)$, что произошло, в частности, в период кредитного кризиса 2007–2008 гг. Конечно, даже для рассмотренной

⁴ Сохраняются обозначения, принятые в предыдущей статье: $\rho \equiv ROE$ – ставка доходности собственного капитала; $\mu \equiv ROA$ – ставка инвестиционной доходности; r – ставка рефинансирования и $l = A/e$ – финансовый рычаг [Смирнов, 2013].

⁵ Такие факторы, как асимметричная информация, отсутствие эффективных рынков, налоги и несоответствие рисков ожиданий компании и ее покупателя, нарушают условия теоремы Модильяни – Миллера [Ross, 1987].

стандартной ситуации композиция и состав активов на микро- и макроуровнях серьезно различаются. Например, отдельные компании без задолженности существуют, но на макроуровне суммарный объем долгов – обязательно ненулевая величина.

Отметим, кроме того, что широко распространенная в финансовых расчетах модель Дюпона (the DuPont model), в которой

$$\rho = \frac{\text{чистый доход}}{\text{капитал}} = \frac{\text{чистый доход}}{\text{продажи}} \times \frac{\text{продажи}}{\text{активы}} \times \frac{\text{активы}}{\text{капитал}}, \text{ или } \rho = \frac{\Delta A}{A} \times \frac{A}{e} = \mu l,$$

является частным случаем уравнения (3) для $r = 0$ (продажи в нашей модели не анализируются).

Во-вторых, высказанные в дискуссиях требования об уточнении микрооснов модели сводились, зачастую, к необходимости расчета «типичным участником» рынка кредитов дисконтированных потоков доходов и их оптимизации. Между тем огромная литература по данному вопросу не содержит убедительных свидетельств применения (по крайней мере, в массовом порядке) методов оптимизации⁶. Эмпирическая информация о поведении инвесторов говорит об использовании ими разнообразных, и не обязательно формализованных, эвристических приемов, процедур и правил типа rule-of-thumb. По нашему мнению, редукция проблемы соответствия реальности и модели к априорной схеме оптимизации, вполне возможно, является способом получения непротиворечивых результатов. Однако этот прием вряд ли способствует более глубокому пониманию истинных механизмов, управляющих динамикой финансовых рынков [Colander et al., 2008].

В-третьих, существует настоятельная необходимость уточнения термина «типичный участник рынка», особенно в свете имеющихся фактов о составе участников современной финансовой системы. Так, по данным Международного валютного фонда, пять банков-супергигантов (Bank Holding Corporations, BHCs) концентрируют более 50% активов банков США, около 60% доходов мировой банковской индустрии, а на рынке производных активов им принадлежит около 95% контрактов [GFSR, 2012, p. 43]. Современная финансовая система, наряду с этими супергигантами, включает тысячи малых и средних банков. Если понятие «типичного» или «репрезентативного» участника подразумевает, например, банк со средним размером активов, то оно становится бессодержательным, поскольку величина средней в структурах подобного типа существенно (на порядки) отличается от размеров активов как гигантов, так и малых банков. В частности, по мере увеличения выборки величина среднего размера такого участника растет, а не сходится к своему характеристическому значению, в отличие, например, от выборки с нормальным распределением данных. Теоретически конечность значения выборочной средней объясняется только конечными размерами реально существующих систем, даже не имеющих характеристического размера (*characteristic scale*). Нестабильность индикаторов выборки, включая среднее значение, является отражением свойства фрактальности размера «типичного» элемента системы, самоподобие которого проявляется при любых масштабах системы. Это обстоятельство, впрочем, давно известное экономистам, безусловно, требует более точного определения объекта, который может быть принят за эталон «типичности» участ-

⁶ Одно из лучших обобщений финансовой эмпирики – это работа Б. Малкила, выдержавшая два десятка изданий, которая, в частности, содержит обширную библиографию [Malkiel, 2012].

ника финансового рынка. Вслед за этим логически закономерна постановка вопроса о соответствии модели выявленным характеристикам «типичности», если таковые существуют.

Сказанное, конечно, не умаляет значимости эмпирического обоснования модели, особенно в рамках содержательных аналогий между макрофинансовыми процессами и «типичными» финансовыми инструментами. Еще более важно, по нашему мнению, исследовать свойства модели в контексте совместного, сопряженного развития финансов и реальной экономики. Именно в этом процессе финансовая система формирует обратные связи, которые либо ускоряют, либо замедляют экономическое развитие. Хорошо известно, что нарушение пропорций, причем необязательно детерминированных, между реальными и финансовыми рынками негативно сказывается на стабильности, темпах и эффективности экономического роста. Исторический опыт свидетельствует о том, что если рассогласование стоимости реальных и финансовых активов накапливается в течение длительного времени, то оно неизбежно заканчивается масштабной коррекцией стоимости финансовых активов, иначе, кризисом, который «испаряет» стоимость «токсичных» активов. По нашему мнению, логистическая модель помогает упорядочить поиск причин, форм и путей преодоления подобной рассогласованности.

О соответствии финансов и производства

Известно, что истинное богатство общества состоит из разнообразных материальных ресурсов, товаров и услуг, а также знаний, культурного наследия и социальной организации общества. Чистые финансовые активы формируют приращение общественного богатства лишь в той мере, в какой способствуют увеличению доходов, реализуемых в конечном счете в росте производительного и непроизводительного потребления вещественных благ и услуг. Напротив, на микроуровне финансовые активы, включая деньги, являются важнейшим элементом личного богатства – можно быть очень богатым человеком, не имея в собственности никаких материальных ресурсов. Принципиальные различия между макро- и микроасpekтами развития финансов и экономики очевидны. Но каким образом эти противоречия разрешаются в процессе функционирования экономической системы? Каким образом развитие финансов сопряжено с развитием производства и реальных рынков? Какие объективные соотношения существуют между стоимостью финансовых активов и их обеспечением реальными ресурсами? Поиски ответов на эти вопросы занимали умы таких выдающихся исследователей, как К. Викселл, Дж. К. Гелбрейт, Дж. М. Кейнс, Б. Мандельброт, Л. фон Мизес, Х. Мински, Дж. Тобин, И. Фишер, и многих других.

Среди различных определений финансов наиболее точным представляется их характеристика как механизма распределения ограниченных общественных ресурсов в пространстве и времени, в котором временной аспект играет решающую роль [Bodie, Merton, 1998]. Экономическая история, включая историю финансов, говорит о том, что способность общества занимать под будущие (ожидаемые) доходы имела, и имеет, решающее значение для ускорения, или замедления, экономического развития. Социальные системы, создавшие высокоразвитые финансовые рынки и разнообразные формы банковского посредничества, иначе, способные эффективно использовать механизмы обратных связей – заимствований, обеспеченных будущими доходами, – развивались особенно быстро [Ferguson, 2009]. И наоборот, система централизованного распределения ресурсов, фак-

тически исключавшая денежно-кредитные механизмы, оказалась исторически неконкурентоспособной.

Испокон веков финансы вращались вокруг процесса монетизации долга, в нормальных условиях погашаемого «звонкой монетой». В этом процессе формируются соотношения стоимости финансовых активов и реальных ресурсов, а обратные связи реализуются через пропорции между совокупными сбережениями и инвестициями. Пространственный аспект заимствований, равно как и их временное измерение, органически связаны с неопределенностью. Выражением пространственной неопределенности является, например, асимметричность информации, которой располагают участники рынка, тогда как неизвестность будущего лишь частично имеет вероятностное представление [Knight, 2002]. Неопределенность, особенно «альтернативной» финансовой системы, лежит в основе высокочастотных процессов, происходящих на финансовых рынках. Ожидаемые доходности, ставка процента в особенности, вместе с гигантскими масштабами сделок под будущие доходы формируют законы эволюции финансовой системы, которые существенно отличаются от закономерностей развития реальной экономики.

«Природа не терпит пустоты» и в экономике, поэтому финансовые активы в целом должны быть обеспечены ресурсами, по крайней мере, в долгосрочном периоде. В противном случае богатство увеличивалось бы посредством простой эмиссии денег и финансовых инструментов, а экономика уподоблялась барону Мюнхгаузену, умевшему вытягивать себя самого за волосы из болота. Сопряженность, сбалансированность стоимости реальных и финансовых активов, в полной мере реализуется лишь за длительные промежутки времени, примерно 5–7 лет. В долгосрочном периоде финансовые активы полностью обеспечены ресурсами, а их доходность, по терминологии К. Викселла, носит «естественный» характер [Aubrey, 2013]. «Естественный» объем сбережений – это объем обеспеченных финансовых активов, точнее, обеспеченного прироста стоимости финансовых активов, хотя, конечно, и в долгосрочном периоде такое сопряжение достаточно эластично⁷. По экономическому смыслу, совокупная стоимость активов, состоящих из стоимости долга и собственного капитала, должна быть обеспечена ресурсами, но эти связи, однако, обусловлены неопределенностью и носят вероятностный характер. Неопределенность будущего особенно сказывается на доходах, сбережениях и инвестициях. Вследствие этого, различия между «истинной» (фундаментальной) и фактической стоимостью финансовых активов преодолеваются посредством финансовых кризисов, которые имеют продолжение на реальных рынках, если амплитуда такой рассогласованности оказывается достаточно большой [Kindleberger, Aliber, 2005]. Финансовый кризис неизбежно корректирует ожидания бизнеса, населения и государства относительно спектра экономических возможностей, а его результатом является восстановление нарушенного равновесия между агрегатами заимствований и их материальным обеспечением.

Между тем в краткосрочном периоде (порядка одного года) из-за принципиально разной частоты реальных и финансовых процессов сопряженности между ними нет, а полное обеспечение финансовых активов является, скорее всего, чисто случайным совпадением. Истинная стоимость агрегированных финансовых активов в краткосрочном пе-

⁷ Стоимость реального богатства – материального обеспечения финансовых активов – эластична. Уже древним было известно: *res tantum valet quantum vendi potest* (вещь стоит столько, сколько за нее согласны заплатить).

риоде, как правило, существенно уклоняется от их рыночной стоимости [Smirnov, 2012]. Эти несоответствия могут нарастать, а если и преодолеваются, то далеко не сразу⁸. Напротив, нет ничего невозможного в том, что стоимость приобретаемого актива в отдельно взятой, кратко- или долгосрочной (например, ипотечной), сделке полностью обеспечена залогом достаточно стабильной стоимости. Более того, хорошо известно, как финансовый рынок издавна пытался решить проблему обеспечения залогами и коротких кредитов, и длинных займов. История финансов дает множество свидетельств массового распространения практики залоговых займов, особенно в средневековых итальянских городах-государствах [Ferguson, 2009].

Макро- и микроаспекты финансового процесса оказываются связанными, но парадоксальным образом. Отдельная сделка может быть полностью обеспеченной, а размер залога может ограничивать сверху стоимость предоставляемого займа. Однако на финансовом рынке в целом такой обеспеченности нет, а макрофинансовый «залог» в форме совокупных ресурсов лишь в долгосрочном периоде может соответствовать стоимости финансовых активов. Сложные и плохо изученные зависимости между ставками доходности, стоимостью кредитов и финансовым рычагом порождают огромные трудности при попытках введения ограничений любого вида на рост стоимости активов в краткосрочном периоде. Так, разработка системы банковского регулирования «Базель III», особенно предложения по установлению прямых ограничений на размеры финансового рычага, наталкиваются на ожесточенное сопротивление (частично обоснованное, по нашему мнению) мирового банковского сообщества [Economist, 2014]. В свою очередь, размытость критериев обеспеченности активов неизбежно приводит к ухудшению их качества, что стало особенно заметно в процессе массовой секьюритизации активов. Череда катастроф на рынках недвижимости и кредитов в 2007–2009 гг., вызванная огромным количеством «токсичных» активов, привела к потере доверия к возвратности займов, или платежеспособности финансовой системы, что привело к глубочайшему кризису ликвидности. Проблема сопряженности развития финансов и реальных рынков, а также нахождения количественных ориентиров их сбалансированности, как представляется, становится более понятной в свете аналогии с анализом займов, обеспеченных залогом.

Залоговые займы и обеспеченность финансовых активов

По образному выражению Дж.К. Гелбрейта, финансы постоянно «изобретают велосипед» (hails the invention of the wheel), причем во многих случаях новые инструменты менее устойчивы, чем их предшественники [Galbraith, 1990]. Инновациями такого рода, безусловно, являются обеспеченные займы с возобновляемым залогом, ЗВЗ, (*collateralized loans with margin calls*)⁹. К современным ЗВЗ относятся инструменты типа репо, ипотечных займов, фьючерсных контрактов и т.д. Они получили широкое распространение на

⁸ Среди финансистов весьма популярно высказывание, приписываемое Дж. М. Кейнсу, о том, что иррациональность рынка может сохраняться дольше, чем платежеспособность его участников.

⁹ Правда, и в данном случае, «новое – это хорошо забытое старое». Американский исследователь Дж. Геанакоплос убедительно показывает, что финансовая сделка, в литературной форме воспроизведенная В. Шекспиром в трагедии «Венецианский купец», содержала основные элементы современных займов, обеспеченных залогом [Geanakoplos, 2010].

рубеже XX–XXI вв. и стали предметом активных исследований и моделирования [Turner et al., 2012].

Обеспеченные займы с возобновляемым залогом предписывают специфическое, в сравнении с обычными долгами, поведение кредитора и заемщика, которое способствует уменьшению ставок обслуживания долга. Такой долг привлекателен для заемщиков, но и мультиплицирует негативные последствия нарушений контракта. На рынке, например, ипотечных займов условие ЗВЗ имеет следующий вид:

$$(4) \quad H = L + M,$$

где H – стоимость дома (обеспечение ипотечного займа, *collateral*); L – стоимость ипотечного займа; M – вложение собственных средств (маржа, *margin or haircut*). В типичной сделке ипотечного рынка стоимость дома (залога) – величина, определяющая размеры займа. Колебания, под влиянием текущего состояния рынка и ожиданий инвесторов, размеров займа имеют своим верхним пределом стоимость залога. Нормируя обе части равенства (4) на величину залога, получаем широко используемые характеристики относительной стоимости займа (*loan-to-value, LtV*), а также h – маржи на единицу обеспечения ипотечного займа:

$$1 = LtV + h.$$

Преимущество ипотечной сделки заключается, прежде всего, в том, что она возможна лишь при условии предоставления займа, поскольку собственных средств у покупателя недостаточно. Иначе, покупатель мультиплицирует свои возможности, используя финансовый рычаг, $\lambda = h^{-1}$. Кроме того, ЗВЗ, смещая ставки обслуживания долга на «короткий» конец кривой доходностей, позволяет заемщику финансировать «длинные» займы, осуществляя периодические платежи по более низким ставкам доходности. Рост стоимости залога, увеличивая показатель LtV , сокращает текущие затраты покупателей и способствует росту спроса на сделки подобного рода. Однако каждый процент падения стоимости залога, снижая маржу, вызывает требование кредитора к пополнению залога (*margin call*):

$$dL/dH = (dL/dM)/(dH/dM) = (\lambda - 1)/\lambda.$$

Дальнейшее рефинансирование долга происходит для сокращенного, в сравнении с первоначальным, займа, а при невозможности пополнения залога заемщик вынужден продавать активы. Понятно, что массовые действия подобного рода приводят к падению стоимости активов, вызывая цепную реакцию дефолтов среди участников рынка, как заемщиков, так и кредиторов [Geanakoplos, 2010].

Экономическая каузальность компонент залоговой сделки принципиально отлична от причинно-следственных связей между стоимостью совокупных активов, долгами и собственным капиталом. На конкурентном рынке отдельный покупатель не может влиять на рыночную стоимость залога, изменения которой, как правило, происходят под воздействием «внешних» факторов, прямо к сделке не относящихся. Поэтому «производная» dL/dM – не более чем формальный мультипликатор, определяющий величину требова-

ния кредитора. В отдельной залоговой сделке цена залога ограничивает размеры займа и собственных платежей. Вследствие этого сделка может быть полностью обеспеченной ресурсами, тогда как все финансовые сделки в совокупности таким свойством не обладают. На уровне макрофинансов совокупный капитал и заимствования, будучи инвестированными в активы, порождают доходы и сбережения, причем изменения стоимости агрегированных активов и их компонент достаточно тесно взаимосвязаны. Эти особенности следует иметь в виду при рассмотрении логистической модели макрофинансовой системы и ее верификации на эмпирических данных.

Уравнения балансов мировой финансовой системы

Напомним, что модель рычага строилась на основе естественных соображений о существовании совместных уравнений состояний и потоков финансовой системы [Смирнов, 2013]. Баланс состояний связывает номинальные значения стоимости активов, $A = A(t)$, долговых обязательств, $x = x(t)$, и собственного капитала, $e = e(t)$:

$$(5) \quad A(t) = x(t) + e(t).$$

В дополнение к (5) баланс финансовых потоков соотносит совокупные сбережения с издержками инвесторов:

$$(6) \quad dA(t) = dx(t) + de(t),$$

где $dx(t)$ – стоимость формирования, размещения и обслуживания совокупного долга; $de(t)$ – инвестиции, а $dA(t)$ – агрегированные сбережения¹⁰. Последовательность балансов (5) для мировой финансовой системы представлена, в частности, статистикой МВФ, которая анализировалась в предыдущих статьях автора. Дискретная последовательность балансов глобальных финансовых потоков (6) за последние годы представлена в табл. 1, рассчитанной по данным МВФ [GFSR, 2004–2013].

Таблица 1.

Изменения мировых активов, долга и капитала, трлн долл.

	2004 г.	2005 г.	2006 г.	2007 г.	2008 г.	2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.
ΔA_t	16,4	7,1	38,6	39,3	-15,3	17,8	17,9	5,8	12,7
Δe_t	6,0	0	13,6	14,3	-31,6	13,6	7,9	-8,0	5,4
Δx_t	10,4	7,1	25,0	25,0	16,3	4,2	10,0	13,8	7,3

Данные табл. 1 говорят об изменениях всех компонент макрофинансового баланса (6), причем стоимость совокупных активов обусловлена (и является причиной) изменений

¹⁰ «Для экономики в целом, если не учитывать ее связи с остальным миром, сбережения представляют чистое накопление капитала» [Chick, 1987, p. 336].

стоимости, а также композиции совокупного долга и собственного капитала¹¹. В частности, коэффициент корреляции между изменениями стоимости мировых активов и долга за период 2003–2012 гг. составил $corr(\Delta A_t, \Delta e_t) = 0,89$, а между активами и долгами $corr(\Delta A_t, \Delta x_t) = 0,48$. На уровне финансовой системы в целом невозможно исключить структурные сдвиги в составе агрегированного портфеля активов, что, в частности, ухудшает качество глобальных финансовых индикаторов, которые не полностью отражают рыночные изменения цен активов и ставок их доходности.

Сравнение совокупных сбережений и инвестиций (совместно с издержками обслуживания долга) можно конкретизировать, используя номинальные ставки доходности: активов $\mu = dA/A$ и собственного капитала, $\rho = de/e$, а также ставки процента, $r = dx/x$. С учетом этих соотношений уравнение (6) переписывается в эквивалентном виде:

$$(7) \quad \mu A(t) = rx(t) + \rho e(t).$$

Систему уравнений (5) и (7) можно решить совместно. Например, для заданных уровней и изменений стоимости глобального капитала 2007 г. из решения

$$\begin{pmatrix} A \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0666 & -0,0990 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -31,6 \\ 65,1 \end{pmatrix}$$

находятся сбалансированные объемы активов и совокупного долга. Их величины – 229,7 и 164,6 трлн долл. соответственно – практически совпали с эмпирическими значениями.

Логистическая модель финансового рычага

Компактное представление макрофинансовых связей можно получить, используя финансовый рычаг $l(t) = A(t)/e(t)$. Так, подстановка условия $x(t)/e(t) = l(t) - 1$ в уравнение (7) приводит к уравнению сопряженных (для положительных и отрицательных спредов) состояний финансового рынка (3), которое воспроизведем еще раз: $\rho = r + (\mu - r)l(t)$. Для $l(t) > 1$ его справедливость также подтверждается статистикой мировых финансовых потоков. Динамика рычага моделируется простым уравнением

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{A(t)}{e(t)} \right] \equiv \frac{d}{dt} l(t) = (\mu - \rho)l(t),$$

в основе которого лежат положения финансовой теории о формировании доходов капиталом и заимствованиями, инвестированными в активы. В уравнении (8) спред ставок инве-

¹¹ Отметим, что согласно представленным данным, приращение стоимости мировых финансовых активов за 2012 г., или глобальные сбережения, составили около 18% мирового ВВП. По расчетам Всемирного банка, валовые сбережения в 2012 г. составили примерно 20% мирового внутреннего продукта [World Bank, 2013].

стиционной доходности и доходности собственного капитала может иметь следующее представление:

$$\mu - \rho = \mu - r - (\mu - r)l = (\mu - r)[1 - l],$$

с учетом которого модель динамики рычага оказывается нелинейным логистическим уравнением:

$$(9) \quad dl(t) = (\mu - r) \left[1 - \frac{l(t)}{l^*} \right] l(t) dt; \quad l(0) = l_0.$$

Эта модель конкретизирует уравнение Верхульста (2). Стационарным состоянием рычага является корень уравнения (3): $l^* = \frac{\rho - r}{\mu - r}$. Очевидно, что для $a = \mu - r$, $b = \frac{(\mu - r)^2}{\rho - r}$

и $l^* \equiv K = \frac{a}{b}$ уравнение (9) моделирует динамику рычага при обратных связях между структурой и состояниями рынка. Решение логистического уравнения (9), как известно, представляет гармоническую среднюю стационарного состояния $l^* \equiv K$ и начального значения рычага l_0 , взвешенную по функции $\exp[-at]$:

$$(10) \quad l(t) = K l_0 \{ K \exp[-at] + l_0 (1 - \exp[-at]) \}^{-1}.$$

Поскольку рычаг, по экономическому смыслу, является положительной величиной, то параметры a и b модели имеют одинаковые знаки, а система обладает свойством метастабильности. Параметры модели, рассчитанные по данным МВФ о развитии глобальной финансовой системы за 2003–2012 гг., представлены в табл. 2.

Таблица 2.

Структурные параметры мировых финансов за 2004–2012 гг.

	2004 г.	2005 г.	2006 г.	2007 г.	2008 г.	2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.
a_t	0,0207	-0,0146	0,0361	0,0273	-0,1656	0,0598	0,0242	-0,0481	0,0146
b_t	0,0050	-0,0043	0,0088	0,0072	-0,0469	0,0092	0,00512	-0,0107	0,0027

Еще раз обратим внимание на то, что содержательный смысл производной финансового рычага $d/dt[l(t)] = d[A(t)/e(t)]dt$ определяется экономической каузальностью капитала и активов. Для заданных начальных условий динамика рычага формируется на основе четырех характеристик: ставок доходности μ, ρ, r и рычага $l(t)$. В отдельной залоговой сделке, напомним, цена актива ограничивает размеры займа и собственных платежей покупателя, а структура сделки представлена рычагом $\lambda = dH/dM$, который формально соотносит стоимость залога с платежом заемщика.

Эмпирическая апробация модели

Рассмотрим, например, состояния системы мировых финансов в «нормальном», 2007, и последующем, кризисном, годах. Параметры модели приведены в табл. 3, а поведение инвесторов на глобальном рынке представлено на рис. 1.

Таблица 3.

Параметры глобального кризиса 2007–2008 гг.

	ρ	μ	r	$a = \mu - r$	$c = \rho - r$	$b = \frac{(\mu - r)^2}{\rho - r}$	K
2007 г.	0,2805	0,2064	0,1791	0,0273	0,1024	0,00728	3,75
2008 г.	-0,4854	-0,0666	0,0990	-0,1656	-0,5844	-0,04691	3,53

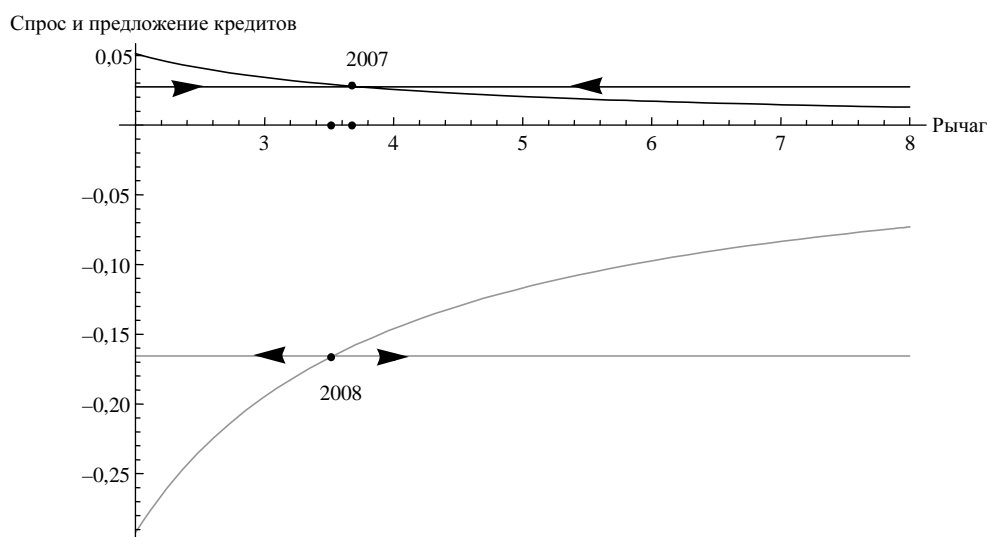


Рис. 1. Аттрактор и репеллер кредитов на глобальном рынке

На «нормальном», или викселлианском, рынке, на котором спред доходностей $a = \mu - r$ положителен, стационарное состояние рычага устойчиво, тогда как на иррациональном (кризисном) рынке оно неустойчиво, а спред доходностей отрицателен. Индикативные функции спроса и предложения кредитов на глобальном рынке 2007 г. связаны уравнением: $0,1024 l^{-1} = 0,0273$. Его решение дает значение стационарного рычага 3,75, практически совпадающее с его эмпирическим значением на этот год. Как видно на рис. 1, слева от стационарной точки $l^* \equiv K = 3,75$ спрос на кредиты превышал их предложение. Инвесторы, поэтому, расширяли размеры заимствований и увеличивали рычаг. Справа от стационарной точки, адаптируясь к падению спроса, например, августа 2007 г.,

инвесторы преимущественно продавали активы¹². Негативные симптомы этого года явились, как известно, лишь провозвестниками грядущего кризиса, поэтому модель характеризовала глобальный финансовый рынок 2007 г. как стабильный.

Финансовый кризис 2008 г., резко сократив стоимость глобальных активов, изменил режим развития финансовой системы. Согласно данным табл. 3, спреды доходностей стали отрицательными. Поскольку в том году глобальные сбережения были отрицательными (dissaving), то индикатор предложения кредитов, как видно на рис. 1, стал асимметричным относительно оси абсцисс. Решение уравнения для индикаторов спроса и предложения кредитов: $-0,5844 l^{-1} = -0,1656$, определило значение стационарного рычага $l^* \equiv K = 3,75$, совпавшее с его эмпирическим значением для данного года.

Коррекция пропорции между агрегатами заимствований и их материальным обеспечением произошла в грубой форме кризиса ликвидности, исчезнувшей вместе с покупателями активов. Нехватка ликвидности заставляла инвесторов продавать активы и сокращать использование заемных средств (*deleveraging*). Изменились знаки и величины параметров логистической модели. Как видно из фазовой диаграммы (рис. 2), изменения ставок доходности «сжали» кривую $al(t) - bl^2(t)$, которая затем, для отрицательных спредов, как бы «щелчком» переместилась в положение, асимметричное относительно оси абсцисс. Вследствие этого стационарное состояние системы, $K = 3,75$, (несколько изменив свое значение на $K = 3,53$), из устойчивого для положительных спредов стало неустойчивым. Иными словами, кризис 2008 г. соответствовал бифуркации глобальной финансовой системы: стационарное состояние рычага из аттрактора превратилось в репеллер.

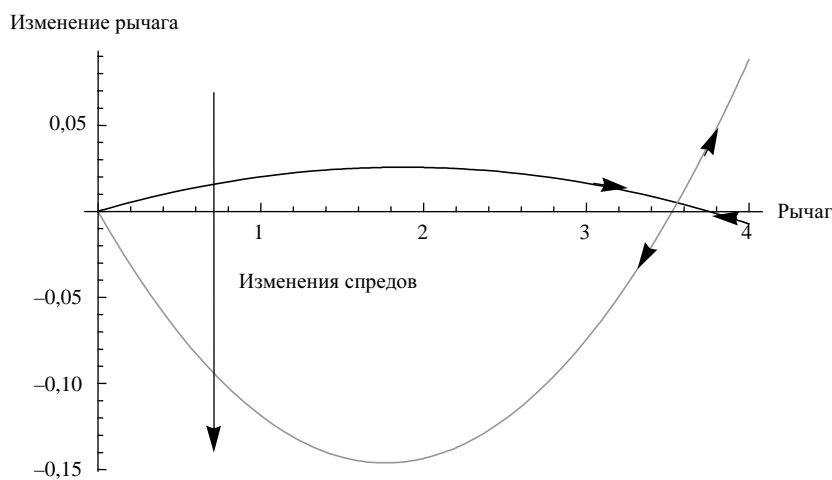


Рис. 2. Кризис 2008 г. в логистической модели рычага

¹² 9 августа 2007 г. BNP Paribas – один из крупнейших французских банков – объявил о приостановке платежей по своим трем инвестиционным фондам, державшим большие пакеты американских ипотечных активов. Это спровоцировало первый глобальный симптом будущего кредитного кризиса [Cassidy, 2009].

Если объем заемных средств уподобить нагрузке на финансовую систему, то такая бифуркация аналогична «прощелкиванию» нагруженного гибкого стержня, которое происходит, когда вес превышает некоторое, критическое, значение. «Щелчок» соответствует транскритической бифуркации, характерной для непрерывных логистических систем [Strogatz, 1994]. Поскольку в нуле финансовая система не существует, то «прощелкивание» обязательно происходит внезапно, что может объяснить спонтанный, неожиданный характер финансовых кризисов.

Стохастическая логистическая модель

Строго говоря, детерминированных финансовых процессов не существует. Поведение инвесторов на различных финансовых рынках формируется под влиянием неопределенности, что особенно наглядно проявляется в операциях с рискованными инструментами, множество которых постоянно пополняется новыми продуктами. Различные «шумы», всегда присутствующие в эмпирических финансах, являются следствием недостаточности знаний и фрагментарности информации о процессе, а также неточности его измерений.

В исследовании финансового рынка можно полагать, что апелляция к неопределенности вряд ли кардинально меняет представления о сингулярном поведении системы возле неустойчивых состояний. Для «ветви Мински», вдоль которой происходит раздувание финансового пузыря, эти соображения достаточно очевидны. В иных ситуациях, однако, детерминированный подход обоснован лишь при незначительности случайных флуктуациях. Напомним, что положительный спред доходностей, $a = (\mu - r) > 0$, и начальные условия, меньшие стационарного состояния рычага, $l_0 < K$, характеризуют детерминированный аттрактор системы, или устойчивое стационарное состояние рычага, $l^* \equiv K$. Стохастическая модель, однако, имеет иной, отличный от нуля, аттрактор, либо ее аттрактором становится нулевой рычаг, к которому сходятся случайные траектории системы.

Стохастическая модель рычага, на первый взгляд, отличается от детерминированного варианта чисто «техническим» уточнением. Оно состоит в том, что случайные отклонения ожиданий инвесторов от будущих темпов заимствований более реалистично, в сравнении с детерминированной моделью, характеризуют совокупность обратных связей на финансовом рынке. «Уточнение», таким образом, состоит в том, что темп изменения рычага,

$$dl_t / l_t = (a - bl_t) dt + \sigma dz_t,$$

содержит неустранимый «шум», σdz_t , который, на основе стандартных соображений, можно представить как броуновское движение с параметром волатильности σ . Процесс броуновского движения:

$z_t = \int_0^t dz_u$, удовлетворяет условию $dz_t = \varepsilon_t(dt)^{0.5}$, где $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$,

и, следовательно, не имеет производных по времени¹³.

¹³ Отсутствие производной по времени придает символический характер записи стохастического дифференциала в уравнении (9), хотя и удобный операционально. В силу нестационарности

Взаимодействие ожиданий и будущих состояний системы является одним из важнейших факторов поведения финансовых рынков. Механизм таких взаимодействий убедительно раскрыт Дж. Соросом на основе принципа рефлексии. В частности, он показал, что «...участники рынка не только оперируют со смещенными ожиданиями, но и сами смещения способны влиять на происходящие события. Может создаться впечатление о точном предвидении рынком будущих событий, но, на самом деле, ожидания корреспондируют не будущим событиям, а представлениям о будущих событиях, сформированным текущими ожиданиями»¹⁴. Нетрудно заметить, что стохастическое уравнение:

$$(11) \quad dl_t = l_t \left[a \left(1 - \frac{1}{K} l_t \right) dt + \sigma dz_t \right],$$

где на нелинейное смещение (*drift*) рычага, $l_t(a - bl_t)dt$, «наложены» случайные колебания амплитуды, $\sigma l_t dz_t$ (*diffusion*), вызванные воздействием различных факторов, воспроизводит, хотя и не исчерпывает полностью, аргументацию Дж. Сороса. Известно [Kloeden, Platten, 1999], что уравнение (11) имеет точное решение (*strong solution*) следующего вида:

$$l(t) = \frac{l_0 K \exp \left[(a - 0,5\sigma^2)t + \sigma z_t \right]}{K + a l_0 \int_0^t \exp \left[(a - 0,5\sigma^2)u + \sigma z_u \right] du}.$$

Таким образом, для нулевой волатильности, $\sigma = 0$, решения детерминированной и стохастической моделей рычага совпадают [Sciadas, 2010]. Очевидно также, что ожидаемый темп изменения рычага аналогичен детерминированному темпу:

$$\frac{1}{dt} \left\langle \frac{dL_t}{L_t} \right\rangle = a \left(1 - \frac{1}{K} L_t \right),$$

где скобки $\langle \cdot \rangle$ соответствуют осреднению по ансамблю реализаций случайного процесса.

Стационарные распределения логистического рычага

Эмпирические сведения о динамике финансового рычага известны лишь по одной реализации этого случайного процесса. Между тем вероятностные распределения реализации процесса и ансамбля его стационарных значений, если они существуют, в общем случае различны. Они совпадают только для эргодических процессов, имеющих долгосрочное (стационарное) распределение, независимое от времени и начальных условий.

стандартного броуновского движения, $(dz_t)^2 = dt$, случайная динамика финансового рычага – также нестационарный процесс.

¹⁴ Цитируется по работе [Ferguson, 2009, p. 317].

В общем случае утверждение о том, что нестационарный во времени процесс, удовлетворяющий уравнению (9), является эргодическим, является нетривиальным, а его проверка требует специальных исследований [Peters, 2011]. Для стохастической модели финансового рычага, однако, можно использовать подход, известный как вывод так называемой формулы Райта [Cobb, 1998], позволяющий вычислить функцию плотности стационарного, т.е. не зависящего от времени и начальных условий, распределения вероятностей случайного процесса $L(t)$.

Для процесса, следующего уравнению (11), функция плотности $p(l) = \Pr[L \in l + dl]$ находится как решение стационарного прямого уравнения Колмогорова:

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial l} [l(a - bl)p(l)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial l^2} [\sigma^2 l^2 p(l)] = 0$$

[Dennis, Patil, 1988]. Это уравнение, известное также как уравнение Фоккера – Планка, имеет тривиальное и нетривиальное решения [Pasquali, 2001]. В частности, тривиальным решением уравнения (12) является функция плотности вероятностей распределения Дирака, $\delta(l)$, которая ассоциируется со стационарной точкой $l_1^* = 0$. Это распределение характерно для «почти наверняка» постоянной случайной функции $L = L(t)$ с пренебрежимо малой дисперсией и «массой», сосредоточенной в точке.

Нетривиальное решение уравнения (12) находится как функция плотности вероятностей стационарного гамма-распределения:

$$(13) \quad p(l; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} l^{\alpha-1} e^{-\beta l}.$$

Это распределение существует только для положительных значений рычага и положительных параметров $\alpha = \frac{2a}{\sigma^2} - 1$; $\beta = \frac{2b}{\sigma^2}$, иначе – при условии $0 < \sigma^2 < 2a$ [Dennis et al., 2003]. Двухпараметрическое гамма-распределение смещено вправо, иначе, имеет «толстый хвост»¹⁵, поэтому его ожидание не совпадает с модой. Мода гамма-распределения определена только для значений параметра $\alpha > 1$ и равна

$$(14) \quad \text{Mode}[L] = \frac{\alpha - 1}{\beta} = K - \frac{\sigma^2}{b},$$

тогда как его ожидание есть величина

$$(15) \quad \langle L \rangle = \int_0^\infty l p(l) dl = \frac{\alpha}{\beta} = K - \frac{\sigma^2}{2b}.$$

¹⁵ Скошенность гамма-распределения вправо означает, что появление экстремальных событий связано с большими (в сравнении с нормальным) вероятностями. Это обстоятельство свидетельствует в пользу применения гамма-распределения в исследованиях финансовых процессов.

Мода стохастического финансового рычага, если существует, является аналогом стационарного состояния, которое не больше его ожидаемого значения, в свою очередь, не превосходящего величины детерминированного аттрактора:

$$(16) \quad \text{Mode}[L] \leq \langle L \rangle \leq K,$$

причем эти величины совпадают только для нулевой дисперсии. Экономически неравенства (16) отражают внесение агрегированным инвестором своеобразной «платы за риск», причем увеличение неопределенности на финансовых рынках влечет уменьшение доходов их участников, и наоборот. Этот факт немаловажен практически, поскольку для распределений с «толстым хвостом», к которым относится гамма-распределение, использование ожидаемого значения финансового рычага, как правило, преуменьшает истинные риски заимствований. Однако усиление волатильности, уменьшая уровень рычага, может иметь и положительное значение, если при этом повышается обеспеченность финансовых активов ресурсами.

Доверие инвесторов и устойчивость стохастического рычага

Мерой рассогласованности стохастических реализаций является экспонента Ляпунова. Этот показатель обобщает условия устойчивости детерминированной модели с учетом разного рода «шумов», а ее отрицательный знак говорит об устойчивости непрерывной системы. Для случайного процесса, следующего логистическому уравнению (11), и стационарного гамма-распределения (13) экспонента Ляпунова рассчитывается как ожидаемая величина следующего вида:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (a - 2bl) l^{\alpha-1} \exp[-\beta l] dl.$$

Поскольку ожидание гамма-распределенного случайного рычага известно из (15), то его экспонента Ляпунова выглядит весьма просто:

$$(17) \quad \langle \lambda \rangle = \langle a - 2bL \rangle = a - 2b \langle L \rangle = \sigma^2 - a.$$

На наш взгляд, выражение (17) может рассматриваться как экономический критерий уверенности инвесторов в платежеспособности финансовой системы. Аргументируем это утверждение. Как известно, доверие – это важнейшая характеристика, которая цементирует всю систему финансовых отношений, причем утрата доверия эквивалентна коллапсу рынка. В предложенной модели доверие инвесторов формируется на основе объективного сопоставления объемов заимствований и их рискованности. Траектории финансового рычага в устойчивой стохастической системе сходятся к аттрактору, что, по смыслу, характеризует платежеспособность системы, которой, соответственно, инвесторы доверяют. Так, если индикатор предложения кредитов (спред доходностей) оказывается выше эмпирической дисперсии, то это свидетельствует о достаточной ликвидности рынка, к которому, как правило, совокупный инвестор испытывает доверие. На-

оборот, когда эмпирический спред доходностей ниже дисперсии, то такая система неустойчива, уверенности в погашении заимствований нет, и доверие инвесторов к рынку пропадает. Таким образом, величина экспоненты Ляпунова, характеризующая устойчивость непрерывной стохастической системы,

$$\langle \lambda \rangle = (\sigma^2 - a) \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 0,$$

естественным образом обобщает представления инвесторов о платежеспособности финансового рынка, а потому является мерой их «доверия» к системе.

Дальнейший анализ экспоненты Ляпунова выявляет неполноту аналогии между моделями (9) и (11). Подобная рассогласованность поведения детерминированной и стохастической систем биологической природы исследована в работе [Dennis et al., 2003]. Для логистической модели финансового рычага, как легко видеть из (17), устойчивость детерминированной динамики, $\lambda = -a < 0$, не противоречит неустойчивости стохастических траекторий. Аттракторы стохастического и детерминированного рычага эквивалентны лишь для пренебрежимо малых значений волатильности процесса, $\sigma^2 \rightarrow 0$. Для ненулевой волатильности, удовлетворяющей неравенствам

$$(18) \quad 0 < \sigma^2 < a,$$

стохастический аттрактор существует, но траектории случайного финансового рычага сходятся (за достаточно большие промежутки времени) к моде гамма-распределения, которая меньше величины детерминированного аттрактора.

Сигналом начала дезинтеграции рынка является равенство между дисперсией рычага и значением спреда доходностей: $\sigma^2 = a$, откуда следует, что $\alpha = 1$. При этом условии гамма-распределение редуцируется к экспоненциальному распределению рычага с ожидаемым значением и модой:

$$(19) \quad \langle L \rangle = \frac{1}{\beta} = \frac{\sigma^2}{2b}; \quad Mode[L] = K - \frac{\sigma^2}{b} = 0.$$

Напомним, что уравнения логистической модели имеют содержательный смысл для современной финансовой системы с ненулевыми заимствованиями и рычагом $l > 1$. Следовательно, когда $a = \sigma^2$, то хотя формально мода и ожидание рычага определены, но финансовый рынок, по крайней мере в его современном виде, перестает существовать.

Поведение стохастической и детерминированной моделей становится полностью рассогласованным, когда спред доходностей и дисперсия удовлетворяют неравенствам

$$(20) \quad a < \sigma^2 < 2a.$$

Высокая волатильность рынка в таких условиях модифицирует гамма-распределение к его J-образному виду, для которого случайные траектории рычага сходятся к нулю.

Интуитивно понятно, что высокая волатильность способна дезориентировать инвесторов, а если они перестают покупать активы, то ликвидность исчезает. Деловая активность участников рынка, основанная на использовании значительных объемов заемных средств, замирает, рынки кредитов «схлопываются», и финансовая система коллапсирует.

Наконец, для неравенства $\sigma^2 > 2a$ гамма-распределение не существует. Анализ этой ситуации выходит за рамки настоящей работы, поэтому ограничимся лишь ссылкой на исследования, например, [Dennis et al., 2003], где обсуждается проблема «хаоса, порожденного шумом» (*noise induced chaos*)¹⁶.

Стационарное гамма-распределение рычага

Иллюстрируем сказанное на примере финансового рынка со ставками доходности: $\rho = 0,17$; $\mu = 0,05$; $r = 0,01$. На этом рынке стационарное значение рычага равно $l^* = K = 4$, а спреды доходностей составляют, соответственно, $\rho - r = 0,16$; $\mu - r = 0,04$. В табл. 4 приведены параметры стационарного гамма-распределения вероятностей случайного рычага для различных значений его волатильности, а соответствующие функции плотности представлены на рис. 3. Уравнение логистической стохастической модели рычага, например, для дисперсии $\sigma^2 = 0,02$, имеет следующий вид:

$$dL_t = 0,04L_t \left(1 - \frac{L_t}{4} \right) dt + 0,14L_t dz_t.$$

Таблица 4.

Параметры гамма-распределения случайного рычага
для $a = 0,04$

Волатильность, σ	0,14	0,2	0,22
Дисперсия, σ^2	0,02	0,04	0,05
Параметр формы, α	3	1	0,6
Параметр роста, β	1	0,5	0,4
Параметр масштаба, $1/\beta$	1	2	2,5
Экспонента Ляпунова, $\langle \lambda \rangle$	-0,02	0	0,01
Ожидание, $\langle L \rangle$	3	2	1,5
Mode[L]	2	0	-

¹⁶ Известно, что в одномерном детерминированном и непрерывном процессе логистического типа хаос не возникает, поскольку для бифуркаций предельных циклов, даже простейших, например, удвоения циклов в системе Рёслера, необходимо, как минимум, третье измерение [Strogatz, 1994].

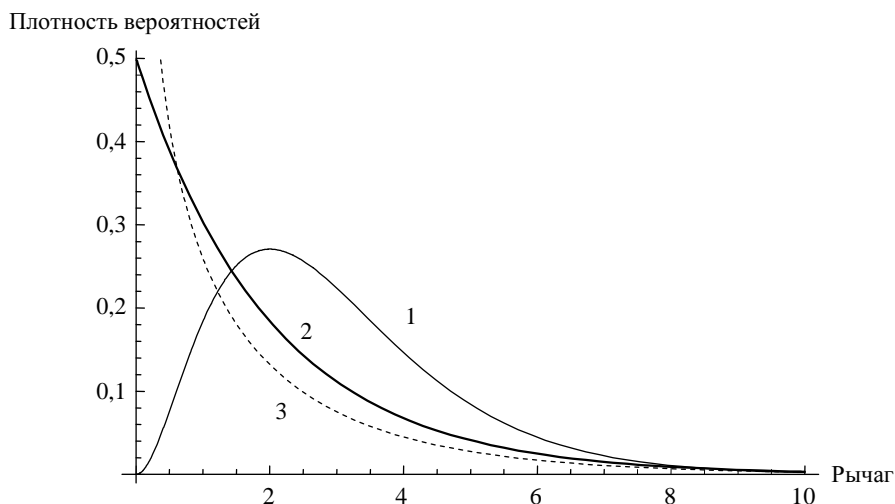


Рис. 3. Плотности гамма-распределения рычага для различных параметров

Пренебрежимо малая дисперсия рычага, $0 < \sigma^2 \ll a$, позволяет «стохастическим» траекториям стягиваться к аттрактору детерминированной модели, $l^* \equiv K = 4$. Это – единственная ситуация, тривиальная с вероятностной точки зрения, когда поведение детерминированной и стохастической моделей рычага практически идентично. Во всех остальных случаях динамика их траекторий существенно различается в зависимости от значений волатильности рычага.

Для волатильности $\sigma = 0,14$ (кривая 1 на рис. 3) плотность гамма-распределения скошена вправо. Случайные траектории рычага сходятся к моде стационарного гамма-распределения рычага, равной 2, тогда как его ожидаемая величина равна 3. Рост волатильности до $\sigma = 0,2$ (кривая 2) превращает гамма-распределение в экспоненциальное, $\alpha = 1$, с ожиданием 2 и нулевой модой. Дальнейшее увеличение волатильности, до $\sigma = 0,22$ (кривая 3), трансформирует гамма-распределение в J-образное, с ожиданием 1,5 и сингулярной модой. Траектории стохастического рычага группируются в правой окрестности нуля, где экспонента Ляпунова положительна, а начало является аттрактором системы. Для значений $\sigma^2 > 2a = 0,08$ гамма-распределение перестает существовать.

Кумулятивная функция гамма-распределения вероятностей

$$(21) \quad P(l) = \Pr[L \leq l] = \int_0^l p(u; \alpha, \beta) du = \frac{\gamma(\alpha, \beta l)}{\Gamma(\alpha)}$$

аналитического вида не имеет, а выражается через неполную гамма-функцию $\gamma(\alpha, \beta l)$.

Стационарный рычаг мировой финансовой системы

Интерес к стохастической модели рычага (11) объясняется тем, что она позволяет указать количественные ориентиры макрофинансового «залога», т.е. обеспеченности стоимости совокупных финансовых активов материальными ресурсами. Конечно, имеющаяся в распоряжении автора выборка слишком мала для надежных статистических выводов, но даже иллюстративный расчет представляется достаточно интересным для обсуждения и дальнейших исследований.

Расчет обеспеченности активов проведен в два этапа. На первом вычислены ожидание и мода стационарного гамма-распределения, причем мода (для определенной дисперсии) является аттрактором долгосрочной динамики стохастического рычага. На втором этапе моменты стационарного распределения использованы для оценки обеспеченности активов мировой финансовой системы реальными ресурсами. Расчеты проведены по информации МВФ [GFSR, 2004–2013], а эмпирические значения параметров модели представлены в табл. 5.

Таблица 5.

Динамика рычага мировых финансов за 2003–2012 гг.

	2003 г.	2004 г.	2005 г.	2006 г.	2007 г.	2008 г.	2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.
l_t	3,97	3,89	4,08	3,74	3,53	6,4	4,92	4,54	5,43	5,12
l	1,0	0,98	1,049	0,917	0,944	1,813	0,769	0,923	1,196	0,943
l_Y	3,42	3,54	3,42	3,95	4,21	3,52	4,02	3,98	3,66	3,72
l_Y	1,0	1,035	0,966	1,155	1,065	0,836	1,142	0,990	0,920	1,016

Третья строка таблицы содержит значения рычага l_Y , рассчитанного на единицу мирового ВВП, а вторая и четвертая строки – значения соответствующих индексов. Стохастические траектории модели (11) рассчитаны для гармонических средних, a_H и b_H , соответствующих параметров за послекризисный период 2009–2012 гг.¹⁷ Средние арифметическая и гармоническая взвешенная рычага за этот период составили соответственно 5,0 и 4,98. Дисперсия рычага вычислена по индексам изменений стоимости активов к мировому ВВП, l_Y , и капиталу, l_t , составив соответственно 0,0092 и 0,0313. Результаты расчетов представлены в табл. 6.

¹⁷ В силу малости выборки оценки параметра K существенно различаются. Как отношение арифметических средних соответствующих параметров за 2003–2012 гг., величина $K_A = \langle a \rangle / \langle b \rangle = 2,04$ далеко уклонилась от среднего значения рычага за этот период (4,56). Между тем отношение гармонических средних, $K_H = a_H / b_H = 4,92$, представляется достаточно реалистичной характеристикой стационарного рычага.

Таблица 6.

Характеристики модели глобального финансового рычага

a_H	b_H	$\langle l \rangle$	$\langle l \rangle_H$	$K = a_H/b_H$	$\langle L \rangle = \alpha/\beta$	$Mode[L] = (\alpha-1)/\beta$	σ_1^2	σ_2^2
0,034	0,0063	5,0	4,98	5,35	4,67	3,94	0,0092	0,0313

Для дисперсии рычага, равной 0,0092, стохастические траектории следуют уравнению

$$dl(t) = 0,034[1 - 0,0063 l(t)] l(t) dt + 0,0959 l(t) dz,$$

а стационарное гамма-распределение стохастического рычага имеет функцию плотности $p(l; 6,39; 1,37) = 0,032 l^{5,39} \exp[-1,37l]$, которая представлена на рис. 4.

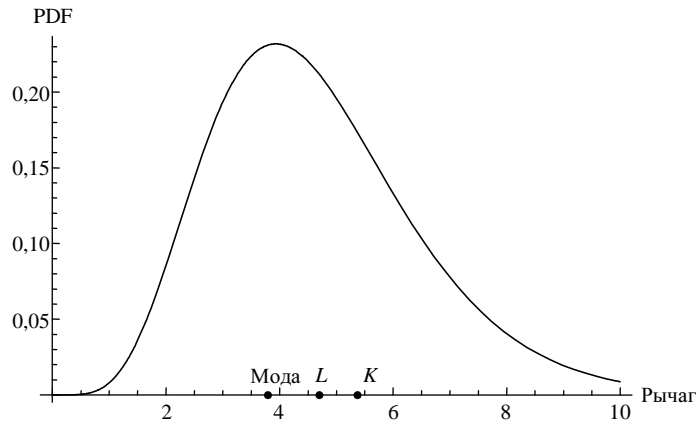


Рис. 4. Гамма распределение значений глобального рычага

Для указанных выше параметров модели экспонента Ляпунова отрицательна:

$$\langle \lambda \rangle = \sigma_1^2 - a = -0,0248.$$

Иными словами, при дисперсии рычага в 0,0092 инвесторы вполне уверены в платежеспособности глобальной финансовой системы. Можно полагать, что инвесторы ожидают возвратности кредитов в пределах значений рычага между модой и ожиданием: $l_\infty \in [3,94; 4,67]$, как бы соглашаясь «уплатить дань» неопределенности, царящей на весьма волатильном мировом рынке. Аттрактором системы является мода, равная 3,94, к которой сходятся в долгосрочном периоде стохастические траектории рычага. Сравнение аттрактора с эмпирическими значениями рычага за 2003–2012 гг. позволяет предположить, что стоимость финансовых активов будет полностью обеспечена материальными

ресурсами, следовательно, мировая финансовая система будет стабильной. Для краткосрочного периода, напротив, более реалистической оценкой представляется ожидаемое значение рычага $\langle L \rangle = 4,67$, которое ближе к его эмпирическому среднему. Эта величина будет использована в следующем разделе.

Интересно, что стационарное гамма-распределение редуцируется к экспоненциальному распределению лишь при весьма значительном увеличении дисперсии, примерно до величины σ_2^2 . Столь высокая неопределенность делает параметр $\alpha = \frac{2a}{\sigma^2} - 1$ равным единице и смещает моду случайного рычага к нулю. Это событие критично, поскольку отражает нежелание инвесторов занимать на свободном рынке. По нашему мнению, такая метаморфоза должна служить сигналом для активизации действий центрального банка, которые должны быть направлены, прежде всего, на уменьшение волатильности финансовых рынков. При этом анализ соответствующей монетарной политики, особенно с учетом возможных конфликтов ее с другими макроэкономическими целями, – сложная проблема, анализ которой выходит за рамки настоящей работы¹⁸.

Дальнейшее возрастание дисперсии рычага превращает экспоненту Ляпунова в положительную величину. При волатильности рычага примерно 20% за год инвесторы, как правило, теряют доверие к надежности рынка кредитов. Гамма-распределение перестает существовать, а вырожденное распределение Дирака, с массой, сосредоточенной в нуле, становится устойчивым. Сохранение таких условий в долгосрочном периоде означает неизбежный коллапс финансовой системы.

Расчет обеспеченности ресурсами мировых финансовых активов

Стоимость реальных ресурсов, формируя истинную величину общественного богатства, объективно играет роль обеспечения, или залога, стоимости совокупных финансовых активов. Зависимости между ними носят стохастический характер, отражая особенности развития подсистем реальных и финансовых рынков. В макрофинансовых исследованиях суммарная стоимость реальных ресурсов обычно аппроксимируется величиной мирового валового продукта. Отношение агрегата финансовых активов к ВВП, l_Y , иначе, величина рычага, исчисленного на единицу ресурсов, характеризует, поэтому, степень обеспеченности совокупных финансовых активов. Такое отношение представляет собой произведение двух величин:

$$(22) \quad l_Y = l_t \cdot q_t,$$

где $q_t = e_t/Y_t$ – отношение стоимости акций (капитализации мировых фондовых рынков) на единицу мирового ВВП. Соответствующие переменные представлены в табл. 7.

¹⁸ В этом аспекте следует рассматривать политику Английского банка, которая проводится несколько последних лет и предусматривает массовый выкуп займов коммерческих банков малому и среднему бизнесу.

Таблица 7.

Динамика компонент финансового рычага

	2003 г.	2004 г.	2005 г.	2006 г.	2007 г.	2008 г.	2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.
l_Y	3,42	3,54	3,42	3,95	4,21	3,52	4,02	3,98	3,66	3,72
l_t	3,97	3,89	4,08	3,74	3,53	6,4	4,92	4,54	5,43	5,12
q_t	0,87	0,91	0,84	1,05	1,19	0,55	0,82	0,88	0,67	0,73
$l_Y = l_t \cdot q_t$	3,45	3,54	3,42	3,93	4,2	3,52	4,03	3,99	3,64	3,74

Согласно данным табл. 7, величины q_t не превышали единицы кроме двух предкризисных лет, когда они составили соответственно 1,05 и 1,19. Это позволяет утверждать, что суммарная стоимость акций, кроме, пожалуй, 2007 г., была обеспечена ресурсами. Общая стоимость акций и долга к 2012 г. превысила мировой ВВП в 3,7 раза, а волатильность рычага l_t (90% за год) была существенно выше волатильности параметра q_t , составившей 18% в расчете на год.

Для расчета обеспеченности всех активов требуется, вообще говоря, модель изменений параметра q_t , динамика которого в долгосрочном периоде управляется различными факторами финансовых и производственных процессов. Возможно, что этот механизм действует подобно известному мультипликатору Дж. Тобина, но его исследование – это самостоятельная задача, которая в данной работе не решена¹⁹. Учитывая эти трудности, рассмотрим более простую краткосрочную задачу – расчета обеспеченности ресурсами мировых финансовых активов в 2012 г.

Стабильным ориентиром долгосрочной динамики рычага для дисперсии, не превышающей 0,034, как установлено в предыдущем разделе работы, является мода гамма-распределения, $Mode[L] = 3,94$. Однако для средней арифметической рычага $\langle l_t \rangle = 5,0$, или его гармонической взвешенной средней 4,98, рассчитанным для послекризисного периода, представляется маловероятным, что мода (стохастический аттрактор) будет достигнута за короткий промежуток времени. Поэтому, учитывая определенную инерционность макрофинансовых процессов, за репрезентативную меру рычага принято его ожидание $\langle L \rangle = 4,67$. Таким образом, для параметра $q_{2012} = 0,73$ краткосрочная норма обеспеченности мировых активов, l_Y , составила

$$(23) \quad l_Y = \frac{\alpha}{\beta} q_{2012} = 4,67 \cdot 0,73 = 3,41.$$

¹⁹ Множитель Тобина (Tobin's q) – это отношение стоимости акций к стоимости капитала. Если его величина превышает единицу, то корпорация легко финансирует свое развитие, если $q < 1$, то дополнительные инвестиции находятся с трудом [Tobin, Brainard, 1977].

Она, как видно из табл. 7, оказалась ниже эмпирического значения рычага для 2012 г. Поэтому ресурсами (валовым внутренним продуктом в 72,2 трлн долл.) в этом году было обеспечено лишь 246,2 трлн долл. финансовых активов:

$$(24) \quad A = l_Y \cdot Y = 3,41 \cdot 72,2 = 246,2,$$

что составило 94% фактической стоимости активов мировой финансовой системы²⁰. Иными словами, в 2012 г. мировые финансы состояли примерно на 16,6 трлн долл. из «токсичных» активов. Этот результат согласуется с мнением многих экспертов о медленном, половинчатом и неоднозначном оздоровлении мировых финансов, прежде всего, в странах «большой четверки», G4 [Economist, 2014]. Кроме того, «подозрение» о наличии значительных токсичных активов подтверждает и наш вывод о ненулевой вероятности «второй волны» финансового кризиса, который был ранее получен совершенно иными методами [Смирнов, 2013].

Обсуждение модели и некоторые выводы

Подведем некоторые итоги. Теоретические аргументы, и эмпирические данные, говорят об опережающем росте стоимости финансовых активов в сравнении с ростом производства. Такое опережение является закономерностью формирования развитых финансовых рынков, основанных на заимствованиях под будущие доходы и использовании разнообразных заемных средств. Эта закономерность, реализуемая, в том числе, через процессы финансовых нововведений (*financial innovations*), способствует эффективной трансформации совокупных сбережений в инвестиции и экономический рост. Однако масштаб превышения стоимости финансовых активов над ресурсами, мерой которого является рычаг, достаточно эластичен и носит вероятностный характер. С одной стороны, финансовый рычаг, составивший 6,4 в 2008 г., явился свидетельством кризиса, причем самого разрушительного со времен Великой Депрессии. С другой – есть основания полагать, что величина моды случайного рычага в 3,94, позволит достаточно надежно обеспечить активы мировой финансовой системы ресурсами. Мера такой обеспеченности, в частности найденная выше, может служить «параметром управления» финансовой системой, поиски которого сейчас находятся в центре внимания центральных банков. Важно подчеркнуть, что эта характеристика – не простой множитель, а синтетическая оценка, отражающая вероятностные процессы развития мировых финансовых и экономических рынков. Конечно, в данной работе охарактеризована лишь начальная фаза расчетов обеспеченности активов ресурсами, и решение этой сложнейшей проблемы современной рыночной экономики требует дальнейших исследований и обоснований.

Адекватным и удобным средством изучения финансовых процессов представляется математически простая логистическая модель. Так, в зависимости от комбинации знаков спредов, а также соотношений начальных условий и стационарных состояний, модель систематизирует семейство траекторий финансового рычага, раскрывая, например, про-

²⁰ Отметим, что в формуле (23) уменьшение параметра q влечет сокращение обеспеченной части финансовых активов, хотя и по другим причинам в отличие от чрезмерного роста заимствований.

цесс формирования финансового пузыря, происходящий вдоль траектории Мински. Движущая сила «пузыря» – чрезмерно высокие размеры заимствований участников рынка – определяется в модели вполне операционально и в соответствии с представлениями о причинах финансовых кризисов [Minsky, 2008]. Раздувание финансового пузыря и кризис, происходящие вдоль «ветви Мински», являются результатом слишком больших и необоснованных размеров заимствований. Это приводит к коллапсу рынка, моделируемого через сингулярность решения логистического уравнения. Стохастическая версия модели, которая раскрывает иной ход событий, существенно дополняет эти представления.

Сокращение объемов кредитования и финансового рычага может наступить, как это неоднократно бывало в истории, из-за провала стоимости фондового рынка, вызванного пессимистическими ожиданиями инвесторов относительно перспектив развития экономики. Под влиянием высокой волатильности рынка его участники могут ограничить и даже полностью отказаться от кредитования. Ветвь Фишера существует и в окрестности детерминированного репеллера, но волатильность рынков резко усиливает вероятность подобного развития событий. Падение стоимости реальных ресурсов, выражающееся, например, в сокращении капитализации фондового рынка, способно резко усилить рассогласованность между ними и стоимостью финансовых активов [Fisher, 1933]. Последствия этого могут быть не менее значимы, чем от чрезмерных заимствований. В таком ракурсе выявление причин спада кредитования в послекризисном периоде 2009–2013 гг. – либо из-за нежелания банков выдавать займы, либо бизнеса их брать – не представляется чисто схоластическим спором. Эти же соображения допускают, что сопротивление банковского сообщества мерам по увеличению нормы обязательного капитала вызвано инстинктом самосохранения не в меньшей степени, чем нежеланием сократить свои прибыли.

Операциональность логистической модели – преимущество, которым не следует пренебрегать, особенно в свете набирающей популярность имитационных методов изучения плохо структурированных проблем поведения финансовых рынков. Имитация способна воспроизводить важные характеристики реальных процессов – степенные распределения доходностей, кластеризацию волатильности, раздувание и лопание пузырей стоимости активов и т.д. [Thurner et al., 2012]. Вместе с тем имитационные модели чувствительны к изменениям размеров и структуры системы, числу переменных, начальным условиям и т.д. Сложна верификация результатов эксперимента, поскольку определенные черты реальности имитация отображает на основе аналогий, степень общности которых определить весьма непросто. Мера адекватности таких моделей реалиям – интуитивная и нестабильная величина, что чревато парадоксальными результатами. Известно, например, что в экспериментах, имитирующих так называемые осциллоны (*oscillons*), установлена полная инвариантность свойств системы по отношению к свойствам ее элементов²¹. Финансовые модели такого класса автору неизвестны. Однако достаточно эластичная степень общности имитации вполне допускает существование и «финансовых осциллонов», хотя вряд ли поведение финансового рынка зависит исключительно от взаимодействия его участников.

²¹ Осциллон – характеристика поведения системы, свойства которой инвариантны относительно свойств ее элементов, а зависят лишь от их взаимодействий. Популярное изложение таких экспериментов можно найти в работе [Buchanan, 2013, p. 110–111].

Стохастическая модель рычага объясняет, каким образом высокая волатильность рынка изменяет его динамические свойства и поведение. Стохастический аттрактор меньше своего детерминированного аналога, а их разность эквивалентна своеобразной «дани», которую собирает неопределенность, заставляя основную группу инвесторов выбирать менее рискованные, следовательно, менее доходные, стратегии поведения. Свойство неопределенности «умерять» аппетиты инвесторов может быть использовано, если соотношения стохастического и детерминированного аттракторов (16) соответствуют фазам экономических циклов. Так, в нижней фазе цикла центральный банк, всемерно стимулируя инвестиции, должен делать все для уменьшения волатильности рынков. В таком ракурсе, например, политика QE и forward guidance, с некоторыми вариациями проводимая центральными банками стран G4 в послекризисный период, представляется совершенно оправданной. Напротив, в фазе бума действия центральных банков должны иметь противоположную направленность – удорожания кредитов и сокращения инвестиционной активности. Поскольку усиление волатильности уменьшает чрезмерные объемы кредитования, то крайне важно, чтобы оно происходило на фазе подъема экономики. В условиях, исключающих раскручивание спирали дефляции долга, центральный банк, в принципе, может этого достичь посредством целенаправленных интервенций, как это не странно, «раскачивающих» свободный рынок денег и кредитов.

Методологически, отказ от односторонней, исключительно негативной, трактовки роли неопределенности на финансовых рынках вполне согласуется с результатами исследований по так называемому «стохастическому резонансу» [Benzi, 2010]. В рамках этого направления установлено, что повышение зашумленности процессов разной природы способно, при определенных условиях, содействовать изменению состояния системы в желательном направлении. Этот принцип применим и к финансам. В стохастической модели изменение уровня волатильности рынка, например, в результате неортодоксальных действий центрального банка, вполне способно минимизировать негативные последствия экономических циклов.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Смирнов А.Д. Макрофинансы: модели пузырей и кризисов: препринт WP2/2010/03. М.: ГУ ВШЭ, 2010.

Смирнов А.Д. Простая модель предсказания финансовых кризисов // Экономический журнал ВШЭ. 2013. Т. 17. № 2.

Смирнов А.Д. Логистическая модель: детерминированная динамика финансового рычага // Экономический журнал ВШЭ. 2013. Т. 17. № 4.

Aubrey T. Profiting from Monetary Policy: Investing through the Business Cycle. London: Palgrave Macmillan, 2013.

Benzi R. Stochastic Resonance: From Climate to Biology // Nonlinear Processes in Geophysics. 2010. 17. P. 431–441.

Bodie Z., Merton R. Finance. London: Prentice Hall, 1998.

- Buchanan M.* Forecast. What Physics, Meteorology and the Natural Science Can Teach us about Economics. London: Bloomsbury, 2013.
- Cassidy J.* How Markets Fail. The Logic of Economic Calamities. London: Allen Lane, 2009.
- Chick V.* Finance and Saving // The New Palgrave: A Dictionary of Economics. London: Palgrave Macmillan, 1987. P. 336.
- Cobb L.* Stochastic Differential Equations for the Social Sciences. 1998. [Revised and extended from Chapter 2 of Cobb & Thrall (eds.) Mathematical Frontiers of the Social and Policy Sciences, Westview Press, 1981.]
- Colander D., Follmer H., Haas A., Goldberg M., Juselius K., Kirman A., Lux T., Sloth B.* The Financial Crisis and the Systemic Failure of Academic Economics: Discussion Paper, Department of Economics, University of Copenhagen, 2008.
- Dennis B., Desharnais R., Cushing J., Henson S., Constantino R.* Can Noise Induce Chaos? // OIKOS. 2003. Vol. 102. № 2. P. 329–339.
- Dennis B., Patil G.* The Gamma Distribution and Weighted Multimodal Gamma Distributions as Models of Population Abundance // Mathematical Biosciences. 1988. № 68. P. 187–212.
- Domar E.* Essays in the Theory of Economic Growth. New York: Oxford University Press, 1957.
- The Economist.* A Worrying Wobble. 2014. January 18.
- Encyclopedia of Complexity and Systems Science.* Berlin/Heidelberg: Springer, 2009.
- Ferguson N.* The Ascent of Money. A Financial History of the World. London: Penguin Books, 2009.
- Fisher I.* The Debt-Deflation Theory of Great Depressions // Econometrica. 1933. 1. P. 337–357.
- Galbraith J.K.* A Short History of Financial Euphoria. Knoxville: Whittle Direct Books, 1990.
- Geanakoplos J.* The Leverage Cycle: NBER Research Paper. 2010.
- Geanakoplos J.* Solving the Present Crisis and Managing the Leverage Cycle // FRBNY Economic Policy Review. 2010. August. New York.
- Global Financial Stability Reports (GFSR), 2004–2013.* Washington, D.C.: IMF, 2004-2013.
- Kindleberger Ch., Aliber R.* Manias, Panics and Crashes. A History of Financial Crises. 5th ed., J. Wiley & Sons, 2005.
- Knight F.* Risk, Uncertainty and Profit. Washington: Beard Books, 2002.
- Kloeden P., Platten E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 1999.
- Levinson M.* Guide to Financial Markets // The Economist Newspaper. London, 2010.
- Malkiel B.* A Random Walk Down Wall Street. New York: W.W. Norton, 2012.
- Minsky H.* Stabilizing an Unstable Economy. 2nd ed. New York: McGraw Hill, 2008.
- Pasquali S.* The Stochastic Logistic Equation: Stationary Solutions and their Stability // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 2001. Vol. 106. P. 165–183.
- Peters O.* Optimal leverage from Non-ergodicity // Quantitative Finance. 2011. Vol. 11. Iss. 11. P. 1593–1602.
- Ross S.* Finance // New Palgrave Dictionary of Economics. London: Palgrave Macmillan, 1987. P. 26–41.
- Skiadas C.* Exact Solutions of Stochastic Differential Equations: Gompertz, Generalized Logistic and Revised Exponential // Methodol. Comput Appl. Prob. 2010. 12 P. 261–270.
- Smirnov A.D.* To Buy or Not to Buy, That's Not the Question: A Simple Model of Credit Expansion: Working Paper WP7/2012/05. Moscow: NRU HSE, 2012.
- Strogatz S.* Nonlinear Dynamics and Chaos. Reading: Addison-Wesley, 1994.
- Thurner S., Farmer D., Geanakoplos J.* Leverage Causes Fat Tails and Clustered Volatility // Quantitative Finance. 2012. Vol. 12. № 5. P. 695–707.
- Tobin J., Brainard W.* Asset Markets and the Cost of Capital // Economic Progress, Private Values and Public Policy. Amsterdam: North-Holland, 1977.
- World Bank.* Macroeconomic Indicators. Gross Saving. 2013.

Financial Assets and their Collateral: The Stochastic Model of Leverage

Smirnov Alexander

National Research University Higher School of Economics,
20, Myasnitskaya ul., Moscow, 101990, Russian Federation.
E-mail: adsmir@hse.ru

The paper continues investigation of the logistic model of financial leverage. Analogies between collateralized loans with margin calls and macrofinancial leverage are studied. The gamma distribution for the global financial leverage was found and its parameters were estimated on the IMF data about development of the world financial system in 2003–2012. The model was applied in order to estimate the amount of global assets that would have been fully collateralized by the world GDP. In particular, it was found that about 6 per cent of world financial assets in 2012, or approximately \$17tn could be defined as toxic ones. Stochastic logistic model that underlies the process did possess some qualities which significantly differs from its deterministic analogue. As appeared, noise was able to transform the stable deterministic model into unstable stochastic system. If existed, the stochastic attractor coincides with the mode of gamma distribution. It was much smaller than its deterministic analogue, though stochastic trajectories might converge towards zero. The Lyapunov exponent while being the standard measure of the stochastic model stability served as a signal of investors' confidence in the global markets solvency. Correspondingly, a reduction of gamma distribution to the exponential one could be interpreted as a signal of the financial system destabilization. Hence the crisis might emerge either due to credit expansion and excessive borrowing or as an unintentional outcome of investors' reluctance to refinance their indebtedness because of unusually high volatility. The latter was modeled as a system's behavior along the "Fisher trajectory" accompanied by decreasing value of the equity market. Such processes could have resulted in the increase of leverage (per unit of GDP) whereby undermining the validity and universality of the no-arbitrage mechanism under uncertainty.

Key words: financial assets; leverage; collateral; logistic equation; gamma distribution; Lyapunov exponent.

JEL Classification: C2, E4, E5, G1, N2.

* *
*

References

- Smirnov A.D. (2010) *Makrofinansy: modeli puzyrej i krizisov* [MacroFinance: A Model of Bubbles and Crises]. Working Paper WP2/2010/03, Moscow: HSE.
- Smirnov A.D. (2013) Prostaja model' predskazaniya finansovyh krizisov [A Simple Model of Crises Prediction]. *Ekonomicheskii zhurnal VSE*, vol. 17, no 2.
- Smirnov A.D. (2013) Logisticheskaja model': determinirovannaja dinamika finansovogo rychaga [Logistic Model of Financial Leverage]. *Ekonomicheskii zhurnal VSE*, vol. 17, no 4.
- Aubrey T. (2013) *Profiting from Monetary Policy: Investing through the Business Cycle*, London: Palgrave Macmillan.
- Benzi R. (2010) Stochastic Resonance: From Climate to Biology. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 17, pp. 431–441.
- Bodie Z., Merton R. (1998) *Finance*, London: Prentice Hall.
- Buchanan M. (2013) *Forecast. What Physics, Meteorology and the Natural Science Can Teach Us about Economics*, London: Bloomsbury.
- Cassidy J. (2009) *How Markets Fail. The Logic of Economic Calamities*, London: Allen Lane.
- Chick V. (1987) Finance and Saving. *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, London: Palgrave Macmillan, p. 336.
- Cobb L. (1998) *Stochastic Differential Equations for the Social Sciences*. [Revised and extended from Chapter 2 of Cobb & Thrall (eds.) *Mathematical Frontiers of the Social and Policy Sciences*, Westview Press, 1981.]
- Colander D., Follmer H., Haas A., Goldberg M., Juselius K., Kirman A., Lux T., Sloth B. (2008) *The Financial Crisis and the Systemic Failure of Academic Economics*. Discussion Paper, Department of Economics, University of Copenhagen.
- Dennis B., Desharnais R., Cushing J., Henson S., Constantino R. (2003) Can Noise Induce Chaos? *OIKOS*, vol. 102, no 2, pp. 329–339.
- Dennis B., Patil G. (1988) The Gamma Distribution and Weighted Multimodal Gamma distributions as Models of Population Abundance. *Mathematical Biosciences*, 68, pp. 187–212.
- Domar E. (1957) *Essays in the Theory of Economic Growth*, New York: Oxford University Press.
- The Economist*, A worrying wobble, January 18, 2014.
- Encyclopedia of Complexity and Systems Science* (2009) Berlin/Heidelberg: Springer.
- Ferguson N. (2009) *The Ascent of Money. A Financial History of the World*, London: Penguin Books.
- Fisher I. (1933) The Debt-Deflation Theory of Great Depressions. *Econometrica*, 1, pp. 337–57.
- Galbraith J.K. (1990) *A Short History of Financial Euphoria*, Knoxville: Whittle Direct Books.
- Geanakoplos J. (2010) *The Leverage Cycle*, NBER Research Paper.
- Geanakoplos J. (2010) Solving the Present Crisis and Managing the Leverage Cycle. *FRBNY Economic Policy Review*, August, New York.
- Global Financial Stability Reports (GFSR), 2004–2013*. Washington, D.C.: IMF.
- Kindleberger Ch., Aliber R. (2005) *Manias, Panics and Crashes. A History of Financial Crises*. Fifth Edition, J. Wiley&Sons.
- Knight F. (2002) *Risk, Uncertainty and Profit*, Washington: Beard Books.
- Kloeden P., Platten E. (1999) *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Berlin: Springer.
- Levinson M. (2010) Guide to Financial Markets. *The Economist Newspaper*, London.
- Malkiel B. (2012) *A Random Walk Down Wall Street*, New York: W.W. Norton.
- Minsky H. (2008) *Stabilizing an Unstable Economy*, 2nd ed., New York: McGraw Hill.

Pasquali S. (2001) The Stochastic Logistic Equation: Stationary Solutions and their Stability. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, vol. 106, pp. 165–183.

Peters O. (2011) Optimal Leverage from Non-ergodicity. *Quantitative Finance*, vol. 11, iss. 11, pp. 1593–1602.

Ross S. (1987) Finance. *New Palgrave Dictionary of Economics*, London: Palgrave Macmillan, pp. 26–41.

Skiadas C. (2010) Exact Solutions of Stochastic Differential Equations: Gompertz, Generalized Logistic and Revised Exponential. *Methodol. Comput Appl. Probab*, 12, pp. 261–270.

Smirnov A.D. (2012) *To Buy or Not to Buy, That's Not the Question: A Simple Model of Credit Expansion*, Working Paper WP7/2012/05, NRU HSE, Moscow.

Strogatz S. (1994) *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Reading: Addison-Wesley.

Thurner S., Farmer D., Geanakoplos J. (2012) Leverage Causes Fat Tails and Clustered Volatility. *Quantitative Finance*, vol. 12, no. 5, pp. 695–707.

Tobin J., Brainard W. (1977) Asset Markets and the Cost of Capital. *Economic Progress, Private Values and Public Policy*, Amsterdam: North-Holland.