Экономический журнал ВШЭ. 2015. Т. 19. № 1. С. 9–29.
HSE Economic Journal, 2015, vol. 19, no 1, pp. 9–29.

Оценка кривой бесконпонной доходности на российском рынке облигаций[1]

Лапшин В.А., Каушанский В.Я., Курбангалеев М.З.

В работе предлагается новый непараметрический метод оценки кривой бескупонной доходности по рыночным котировкам купонных облигаций. В отличие от существующих альтернатив, предлагаемый метод обладает рядом достоинств: возможность отражения сложных форм кривой бескупонной доходности, отсутствие необходимости экспертной (ручной) подстройки баланса точности и гладкости, контроль неотрицательности мгновенных форвардных процентных ставок, учет рыночной ликвидности облигаций, согласованность с безарбитражной моделью стохастической динамики процентных ставок.

Обычно непараметрические методы требуют априорного задания баланса точности решения и гладкости получаемой срочной структуры. Новизна предлагаемого метода в автоматическом определении этого параметра при помощи статистической процедуры кросс-валидации.

Обсуждаются различные модификации предлагаемого метода, призванные учесть индивидуальные предпочтения лиц, принимающих решения на основе кривой бескупонной доходности. Так, например, можно отразить желательность выхода кривой бескупонной доходности на горизонтальный уровень после некоторого срока до погашения или задать относительную либо абсолютную шкалу для вычисления показателя изменчивости (негладкости) этой кривой.

Альтернативные методы часто предполагают, что цены облигаций известны точно. Мы отходим от этого предположения путем учета возможной погрешности исходных данных (котировок облигаций). Мы предполагаем, что порядок погрешности отражен в бид-аск спреде. Это позволяет, с одной стороны, учесть возможную погрешность и/или недостоверность исходных

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-06-31085-мол_а).

Лапшин Виктор Александрович – доцент, к.ф-м.н., Департамент финансов НИУ ВШЭ. E-mail: vlapshin@hse.ru
Каушанский Вадим Яковлевич – стажер-исследователь Лаборатории по финансовой инженерии и риск-менеджменту НИУ ВШЭ. E-mail: vkaushanskiy@hse.ru
Курбангалеев Марат Зуфарович – младший научный сотрудник Лаборатории по финансовой инженерии и риск-менеджменту НИУ ВШЭ. E-mail: mkurbangaleev@hse.ru

Статья получена: декабрь 2014 г./ Статья принята: февраль 2015 г.

данных, а с другой стороны, построить более гладкие кривые бескупонной доходности.

На данных по российскому рынку облигаций проводится сравнение предлагаемого метода с несколькими распространенными альтернативами по ряду популярных критериев качества, используемых для сравнения подобного рода методов, отражающих как точность результата, так и гладкость получаемых кривых. Результаты сравнения говорят о превосходстве предлагаемого метода по всем использованным критериям.

Ключевые слова: кривая бескупонной доходности; срочная структура процентных ставок; российский рынок облигаций; сплайны; регуляризация.

Введение

Срочная структура процентных ставок, или кривая бескупонной доходности, является одним из важнейших индикаторов финансового рынка, широко используемым как в качестве макроэкономического показателя, так и для оценки справедливой стоимости облигаций, вычисления кредитных спредов, актуарного оценивания, а также для других целей риск-менеджмента и финансовой инженерии.

Классический способ задания срочной структуры процентных ставок – при помощи кривой бескупонной доходности, т.е. зависимости спот-ставок r от срока до погашения s: $r(s)$. Спот-ставки взаимно однозначно связаны с коэффициентами дисконтирования, однако конкретное уравнение связи зависит от принятой конвенции начисления процентов. Мы будем использовать конвенцию непрерывного начисления процентов, которая задает следующее уравнение связи между дисконт-фактором $d(s)$ на срок s и $r(s)$ – спот-ставкой на этот же срок: $d(s)=\exp(-r(s)s)$. Доходности и процентные ставки, заданные в других конвенциях, можно легко пересчитать, используя коэффициенты дисконтирования как промежуточное звено.

В ряде приложений принято считать, что процентная ставка постоянна для всех сроков вложений: $r(s)=r_0$, что иногда является разумным упрощением. Тем не менее для ряда применений необходима именно срочная структура процентных ставок. Для целей финансовой инженерии, например для оценки производных финансовых инструментов, часто используют так называемые модели краткосрочной процентной ставки (*short rate models*). Они предполагают, что динамика мгновенной процентной ставки $r=r(0)$ описывается некоторым стохастическим дифференциальным уравнением

$$dr=a(r,t)\,dt+b(r,t)\,dw$$

или его многомерным аналогом (мы не будем вдаваться в подробности, которые можно найти, например, в обзоре [Rebonato, 2004]). Это оправданно, так как именно мгновенная процентная ставка используется при нахождении справедливой стоимости производных финансовых инструментов[2].

[2] В последнее время набирает популярность концепция нескольких кривых доходности (*multiple curve*), отражающая то, что подавляющее большинство безарбитражных соотношений, кото-

При помощи концепции риск-нейтрального оценивания из уравнения динамики краткосрочной процентной ставки можно выразить кривую бескупонной доходности. Так, например, для аффинных моделей, т.е. моделей, в которых коэффициент сноса мгновенной ставки и квадрат ее волатильности являются линейными (аффинными) функциями, кривая бескупонной доходности определяется как решение дифференциального уравнения Риккати, которое аналитически решается в ряде частных случаев. Подробнее об аффинных моделях см.: [Duffee, 2002].

Также широко распространены модели в рамках подхода Heath – Jarrow – Morton (HJM) [Heath, Jarrow, Morton, 1992] и его обобщений. В рамках этого подхода описывается динамика сразу всего бесконечного количества форвардных процентных ставок на все возможные сроки. В дальнейшем, в работе [Brace, Musiela, 1994] бесконечное количество одномерных стохастических дифференциальных уравнений было заменено на одно бесконечномерное уравнение, а в работе [Brace, Musiela, 1997] в качестве фазовой переменной были взяты не мгновенные ставки, а трехмесячные, чтобы избежать ряда технических затруднений. Дальнейшее развитие этого класса моделей выходит за рамки нашего обзора.

Вне зависимости от вида модели стохастической динамики возможен один из двух вариантов: либо эта модель подразумевает некоторую параметрическую форму кривой бескупонной доходности (как, например, аффинные модели) либо она предполагает, что кривая бескупонной доходности нам известна целиком (как, например, модели в рамках концепции HJM).

Однако если стохастическая динамика процентных ставок не представляет интереса для конкретного приложения, можно ограничиться лишь указанием срочной структуры процентных ставок в виде кривой бескупонной доходности. По способу задания кривой бескупонной доходности (или, что то же самое, функции дисконтирования) методы оценки срочной структуры процентных ставок можно подразделить на три больших класса.

«Инженерные» методы не имеют под собой стройного обоснования и часто представляют собой некоторую заданную последовательность действий, которая, по опыту авторов метода, приводит к результату, похожему на искомую кривую бескупонной доходности. Несмотря на то, что подобные методы обычно не имеют теоретической базы, они до сих пор часто используются, в первую очередь, в силу их простоты.

К ним можно отнести, например, метод последовательного определения процентных ставок (*bootstrapping*) [Fama, Bliss, 1987], метод ядер [Tanggaard, 1992]. Также к этой же категории можно отнести использование кривой доходности вместо кривой бескупонной доходности (в отличие от последней, кривая доходности купонных облигаций явно наблюдается на рынке).

Параметрические методы предполагают, что кривая бескупонной доходности принадлежит некоторому заранее выбранному параметрическому классу функций. Таким

рые используются в базовом финансовом анализе, могут не выполняться на практике из-за присутствия кредитного риска и риска рыночной ликвидности. Таким образом, например, кривая бескупонной доходности, используемая для дисконтирования, не обязана совпадать с кривой бескупонной доходности, используемой для оценки форвардного контракта на процентную ставку (FRA). Подробнее об этом подходе см.: [Pallavicini, Tarenghi, 2010].

образом, задача оценки кривой сводится, по сути, к задаче оценки параметров семейства. Обычно это делают методом наименьших квадратов. Схожие идеи использовались еще в 1960-х годах [Cohen, Kramer, Waugh, 1966; Echols, Elliott, 1976; Fisher, 1966], однако лишь в работе [Cooper, 1977] параметрический подход был применен системно, с различными параметризациями. До сих пор, в силу своей чрезвычайной простоты, широко используются параметрическая форма Нельсона – Зигеля [Nelson, Siegel, 1987] и ее расширение, предложенное Свенссоном [Svensson, 1994].

Наконец, сплайновые методы подразумевают поиск неизвестной кривой бескупонной доходности в виде сплайна. В пионерной работе [McCulloch, 1971] были использованы квадратичные сплайны, затем в ряде исследований – кубические [Litzenberger, Rolfo, 1984; McCulloch, 1975; Shea, 1984]. В работе [Steeley, 1991] были использованы B-сплайны, а в статье [Vasicek, Fong, 1982] – экспоненциальные. Ряд исследователей использовали сглаживающие сплайны [Adams, van Deventer, 1994; Fisher, Nychka, Zervos, 1995]. В работе [Waggoner, 1997] степень сглаживания была поставлена в зависимость от участка кривой бескупонной доходности. Затем в исследовании [Smirnov, Zakharov, 2003] экспоненциально-синусоидальные сплайны были получены как формальное решение оптимизационной задачи.

Оценка зависимости $r(t)$ обычно производится по рыночной информации: ценам сделок и котировкам. При использовании параметрических методов значения параметров обычно находятся при помощи метода наименьших квадратов. При использовании сплайновых методов, так как число параметров превышает количество возможных уравнений, обычно учитывается не только точность отражения рыночной информации, но и форма собственно кривой бескупонной доходности, что является одним из возможных способов регуляризации задачи. Наша статья, во многом, расширяет работу Смирнова и Захарова [Smirnov, Zakharov, 2003], основываясь на ней в части концептуального подхода к задаче.

На развитых рынках оценка кривой бескупонной доходности по рыночным данным не представляет труда: облигаций много, они ликвидны, а котировки, поступающие из торговых систем, достоверны. К сожалению, на российском рынке государственных облигаций все эти свойства не выполняются: облигаций сравнительно немного, торги по ним происходят редко, а рыночные данные, в силу неликвидности облигаций, подвержены ошибкам и манипуляциям. Это ставит задачу, которой на Западе не уделялось достаточного внимания по причине отсутствия на западных рынках аналогичной проблемы: оценить кривую бескупонной доходности по рыночным данным с учетом их особенностей, а именно, скудности данных и их возможной недостоверности.

Кроме того, использование динамических моделей в рамках концепции HJM предполагает, что кривая бескупонной доходности непосредственно наблюдается на рынке. Как уже было сказано, на западных рынках это правдоподобное допущение, так как в силу большого количества данных и их высокого качества оценка кривой бескупонной доходности практически не зависит от примененного метода. На менее ликвидных же рынках влияние выбранного метода может быть существенным.

Применение отдельного метода оценки бескупонной кривой доходности для последующего использования этих оценок в модели стохастической динамики имеет подводные камни. Так, например, в работе [Filipović, 1999] показано, что широко распространенная параметрическая форма Нельсона – Зигеля [Nelson, Siegel, 1987] не может быть расширена до динамической модели в рамках концепции HJM, т.е. не существует стохастической HJM-модели, в рамках которой кривая бескупонной доходности описывалась бы уравнением Нельсона – Зигеля. Позже, в работах [Björk, Christensen, 1999; Björk, Svensson, 2001; Filipović, Teichmann, 2003] было показано, что любая параметрическая форма, совместимая с какой-либо стохастической моделью в рамках концепции HJM, с необходимостью должна быть аффинной. Спектр же возможных форм кривых бескупонной доходности, которые могут быть представлены аффинными уравнениями с разумным количеством параметров, очень узок.

Теоретические последствия использования сплайновых методов в связке со стохастической моделью в рамках концепции HJM пока изучены слабо. В работах [Лапшин, 2010; Лапшин, 2009a] показано, что разработанная там в рамках этой концепции модель стохастической динамики совместима с некоторым сплайновым методом оценки кривой бескупонной доходности. На основе этого результата в настоящей работе предлагается непараметрический (сплайновый) подход к оценке кривой бескупонной доходности, пригодный для использования на таком неликвидном рынке, как российский рынок облигаций, и совместимый с моделью стохастической динамики процентных ставок в рамках концепции HJM.

В отличие от существующих альтернатив, предлагаемый метод обладает рядом достоинств: возможность отражения сложных форм кривой бескупонной доходности, отсутствие необходимости экспертной (ручной) подстройки баланса точности и гладкости, контроль неотрицательности мгновенных форвардных процентных ставок и учет рыночной ликвидности. Обсуждаются различные модификации предлагаемого метода, призванные учесть индивидуальные предпочтения лиц, принимающих решения на основе кривой бескупонной доходности, а также учет возможной погрешности исходных данных (котировок облигаций), выраженной в бид-аск спреде. На данных по российскому рынку облигаций проводится сравнение предлагаемого метода с несколькими распространенными альтернативами по ряду критериев качества. Результаты говорят о превосходстве предлагаемого метода по всем использованным критериям сравнения.

Постановка задачи

Пусть для каждой облигации с номером $k = 1,\ldots,N$ заданы котировки спроса и предложения (*bid* и *ask*) – соответственно b_k и a_k, а также рыночная цена[3] P_k. Если рыночная цена за рассматриваемый день отсутствует, можно вместо нее использовать среднее арифметическое котировок спроса и предложения. Тогда цены облигаций теоретически должны быть равны сумме дисконтированных обещанных потоков платежей $F_{i,k}$, которые обещаны в общие для всех облигаций моменты времени t_i, $i = 1,\ldots,n$:

$$P_k \approx \sum_{i=1}^{n} F_{i,k} d(t_i). \tag{1}$$

[3] Здесь и далее под рыночной ценой облигации мы будем понимать так называемую «грязную цену», не учитывающую накопленный купонный доход. Это связано с тем, что именно «грязная цена» равна сумме дисконтированных обещанных потоков платежей по облигации.

При этом мы игнорируем такие аспекты ценообразования облигаций, как премия за кредитный риск, премия за ликвидность, convenience yield, налогообложение и некоторые другие. Часть из этих аспектов, например премия за кредитный риск или премия за ликвидность, может быть учтена в рамках более общей модели, однако построение такой общей модели является отдельной задачей и выходит за рамки нашего исследования. Стоит отметить, что учитывать рыночную ликвидность мы будем не в смысле включения премии за ликвидность в расчет, а в смысле учета возможной неточности наблюдаемых рыночных котировок вследствие сиюминутных колебаний спроса и предложения, влияние которых может быть достаточно велико для не очень ликвидных бумаг. Это будет учтено при присвоении относительных весов облигациям (см. ниже).

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: по данным спецификациям облигаций $F_{i,k}, t_i$, их рыночным ценам P_k и, возможно, котировкам a_k, b_k оценить неизвестную функцию дисконтирования $d(\cdot)$ или, что то же самое, кривую мгновенных форвардных процентных ставок $f(\cdot)$.

В случае поиска функции дисконтирования она должна удовлетворять следующим ограничениям.

1. $d(0)=1$.
2. $d(t+s)\le d(t)$ при $s\ge 0$.
3. $d(t)>0$.

Если же в качестве неизвестной принимается кривая мгновенных форвардных процентных ставок, то достаточно лишь условия неотрицательности[4]: $f(t)\ge 0$.

Задача оценки неизвестной функции по конечному объему данных является некорректно поставленной: мы не можем оценить бесконечномерный объект, коим является функция как элемент функционального пространства, на основе конечного числа конечномерных наблюдений: информации, заключенной в наблюдениях, недостаточно для этого. Таким образом, необходима дополнительная информация, или, другими словами, регуляризация. Дополнительная информация обычно вводится путем априорных предположений. В зависимости от вида априорных предположений модели можно разделить на параметрические и непараметрические.

В параметрических моделях в качестве априорного предположения, регуляризующего задачу, выступает предположение о принадлежности неизвестной функции некоторому (конечномерному) параметрическому классу функций. Таким образом, задача оценки неизвестной функции сводится к задаче оценки значений нескольких неизвестных параметров.

В непараметрических моделях регуляризация обычно проводится путем предположения о том, что искомая функция, помимо удовлетворения (1), доставляет минимум некоторому функционалу, обычно интерпретируемому как потенциальная энергия, однако в рамках нашей задачи регуляризующий функционал, скорее, может иметь смысл

---

[4] На самом деле, условие неотрицательности процентных ставок может не выполняться в реальном мире. Более того, существует мнение [Jarrow, 2013], что современная модель процентных ставок должна допускать их отрицательные значения. Тем не менее для целей настоящей работы мы будем предполагать их неотрицательность.

меры визуальной непривлекательности (неправдоподобности) той или иной формы кривой. Этот функционал, называемый еще регуляризующим функционалом, определяет предпочтения между различными кривыми доходностями, дающими одинаковую точность приближения наблюдаемых цен облигаций. Подробнее о роли регуляризующего функционала – в следующем разделе.

Описание модели

Мы будем строить непараметрическую модель, основанную на идеях из работ [Smirnov, Zakharov, 2003; Лапшин, 2009a]. В качестве неизвестной мы выберем кривую мгновенных форвардных процентных ставок $f(\cdot)$, связанную с функцией дисконтирования $d(\cdot)$ следующим образом:

(2) $$d(t) = e^{\int_0^t f(\tau)d\tau},$$

а в качестве регуляризующего функционала

(3) $$J\left(f\right) = \int_0^T \alpha(t)\left(\frac{d^2 G\left(f(t)\right)}{dt^2}\right)^2 dt,$$

где $G(\cdot)$ – заданная функция. Во-первых, такая форма может легко удовлетворить условию неотрицательности $f(\cdot)$: если выбрать функцию $G(\cdot)$ такой, что $G^{-1}(x) \geq 0,$ то достаточно замены переменных $f = G^{-1}(g)$ для того, чтобы любое решение задачи обладало свойством неотрицательности. Например, нужным свойством обладают функции $G(x) = \sqrt{x}$ и $G(x) = \ln x.$

Далее мы будем использовать $G(x) = \sqrt{x}$ и $\alpha(t) = 1,$ однако это ни в коем случае не ограничивает выбора. Ниже мы приведем интуитивные соображения, которые могут помочь в выборе функционала регуляризации, т.е., в нашем случае, функций $G(\cdot)$ и $\alpha(\cdot)$.

В различных приложениях регуляризующий функционал имеет свою интерпретацию. В нашем случае его можно интерпретировать как субъективную оценку «правдоподобности» той или иной формы кривой, ее «приятности глазу» и ее экономической осмысленности.

Мы проиллюстрируем это на нескольких примерах. При $G(x) = x$ мы имеем функционал

(4) $$J(f) = \int_0^T \alpha(t)\left(\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right)^2 dt,$$

который штрафует отклонение графика функции $f(\cdot)$ от прямой линии, притом штраф может быть различным в разных точках: чем больше значение функции $\alpha(t),$ тем более важно для нас, чтобы функция $f(\cdot)$ в окрестности точки t была похожа на линейную. Идеальная функция $f(\cdot)$ при таком функционале – линейная.

Следующий вариант, заслуживающий упоминания, – $G(x)=\ln x$. Функционал

$$J(f)=\int_0^T \alpha(t)\left(\frac{d^2\ln f(t)}{dt^2}\right)^2 dt \tag{5}$$

соответствует описанному выше штрафу за отклонение от прямой линии, но в логарифмическом масштабе по оси ординат. В некоторых ситуациях это может быть разумно, так как визуальное восприятие аналитиками формы кривой процентных ставок не зависит от масштаба по осям. Так что субъективную часть функционала, возможно, стоит формулировать именно в логарифмическом масштабе, который штрафует не абсолютные отклонения графика от прямой линии, а относительные. С другой стороны, объективно-экономическая часть функционала, возможно, должна учитывать не относительные, а именно абсолютные колебания процентных ставок. В этом случае разумным компромиссом представляется $G(x)=\sqrt{x}$:

$$J(f)=\int_0^T \alpha(t)\left(\frac{d^2\ln f(t)}{dt^2}\right)^2 dt. \tag{6}$$

Штрафуя нелинейности, этот функционал несколько повышает важность участков с малыми процентными ставками, но не так сильно, как (4).

Выбор функции $\alpha(\cdot)$ может отражать, например, тот факт, что инвесторы психологически очень хорошо могут различить мгновенные форвардные ставки через год и через два года, но с трудом могут различить таковые через 21 и 22 года. Это означает, что штраф за нелинейность должен быть выше для больших сроков, т.е. функция $\alpha(\cdot)$ должна быть возрастающей.

Разумеется, возможны и другие функционалы. Так, например, разумным представляется смешанный функционал, учитывающий и первую, и вторую производные: на коротких сроках важнее линейность, а на длинных сроках можно потребовать примерно постоянные процентные ставки:

$$J(f)=\int_0^T \alpha(t)\left[\beta(t)\left(\frac{d^2G(f(t))}{dt^2}\right)^2+(1-\beta(t))\left(\frac{dG(f(t))}{dt}\right)^2\right]dt\,. \tag{7}$$

Задача минимизации

В рамках подхода, предложенного Тихоновым [Тихонов, Арсенин, 1979], мы составим совокупный функционал

(8)
$$J_0(f)=\sum_{k=1}^{N} w_k\left[\frac{1}{a_k-b_k}\left(P_k-\sum_{i=1}^{n}F_{i,k}d_f(t_i)\right)\right]^2+\alpha J(f),$$

где α – параметр регуляризации, отвечающий за баланс двух противоречащих требований: «точности» (первого слагаемого, отвечающего за качество приближения наблюдаемых цен облигаций моделью) и «гладкости» (второго слагаемого, подробно описанного выше), а w_k – относительные веса каждой из облигаций. Здесь мы полагаем функцию $\alpha(t)$ постоянной для простоты: $\alpha(t)=\alpha$. Разумеется, при необходимости можно обобщить на нетривиальную функцию $\alpha(t)$ в соответствии с рекомендациями выше.

Невязка $P_k-\sum_{i=1}^{n}F_{i,k}d_f\left(t_i\right)$ нормируется на бид-аск спред, так как именно он является естественной мерой (не)существенности отклонений расчетных цен $\sum_{i=1}^{n}F_{i,k}d_f(t_i)$ от наблюдаемых P_k.

Выбор весов w_k должен отражать относительную важность и/или достоверность ценовой информации об облигациях. Так, например, необычно малые или необычно большие значения спреда, равно как слишком маленькие или слишком большие объемы торгов, свидетельствуют о меньшей достоверности данных.

Мы будем использовать веса, штрафующие как чрезмерно большие, так и чрезмерно маленькие спреды, так как в данных встречаются аномально маленькие спреды, что приводит к неоправданно высоким относительным весам у одной или двух облигаций, что, в свою очередь, приводит к неверным оценкам параметра α (см. ниже).

Выбор параметра α должен отражать желаемый баланс между точностью и «гладкостью», однако его выбор экспертным образом затруднен. Существует несколько правил, руководствуясь которыми, можно выбрать значение α. Так, принцип, предложенный Тихоновым, заключается в выборе такого значения, при котором численное значение невязки было бы того же порядка, что и характерная величина ошибки наблюдения. Ошибкой наблюдения в нашем случае является бид-аск спред, соответственно, оптимальное значение $J(f)$ должно быть порядка единицы.

Мы будем использовать метод перекрестной проверки с исключением (*leave-one-out cross-validation*), заключающийся в следующем: для каждой облигации мы проведем оценку по всем остальным облигациям, а затем вычислим расхождение Δ_k между фактической ценой рассматриваемой облигации и ее расчетной ценой (при этом при оценке не учитывалась эта облигация). Эта процедура повторяется для всех облигаций, а полученные невязки агрегируются так же, как и в минимизируемом функционале:

(9)
$$\Delta(\alpha)=\sum_{k=1}^{N} w_k\left(\frac{1}{a_k-b_k}\Delta_k\right)^2.$$

Затем находится такое значение α, при котором суммарная агрегированная невязка $\Delta(\alpha)$ минимальна. В работе [Wahba, 1990] описан алгоритм решения этой задачи для линейного функционала невязки, а в исследовании [Lapshin, Kaushanskiy, 2014] описан итеративный алгоритм последовательной линеаризации для нашего (нелинейного) функционала.

Для полноты описания мы кратко приведем его здесь, однако соответствующие формулы весьма громоздки, поэтому за деталями реализации мы отсылаем читателя к работе [Lapshin, Kaushanskiy, 2014].

1. Выбор начального приближения для $f(\cdot)$ в виде постоянной функции $f(x) = c$.
2. Вычисление линеаризации функционала невязки в окрестности текущего приближения.
3. Оценка параметра регуляризации по методу перекрестной проверки с исключением.
4. Вычисление нового приближения для $f(\cdot)$, с использованием нового значения параметра регуляризации.

Пункты 2–4 повторяются до сходимости. К сожалению, вопрос формального исследования сходимости этого алгоритма пока остается открытым, хотя на практике бывает достаточно лишь нескольких итераций.

Описание динамической модели

В работе [Лапшин, 2009a] предложена динамическая модель динамики срочной структуры процентных ставок, построенная в рамках концепции HJM. Не вдаваясь в детали, можно сказать, что описанная в ней динамическая модель оценки кривой бескупонной доходности сводится, в случае отсутствия исторической информации, к аналогу метода, описываемого в настоящей работе (а конкретно – для $G(x) = \ln x$). В случае, когда историческая информация присутствует, сведение невозможно. Более полное исследование связи этих двух моделей является предметом исследований в настоящее время. Отметим лишь, что упомянутый факт означает методологическую корректность раздельной оценки при помощи описываемого метода кривых бескупонной доходности в различные моменты времени, а затем исследование динамических свойств полученных оценок.

Тестирование методики

Далее мы протестируем нашу методику на данных о торгах облигациями Минфина России на бирже ММВБ с 10 января 2012 г. по 14 мая 2013 г. Данные предоставлены компанией Cbonds.Info и содержат ISIN каждой облигации, ее цену закрытия, котировки спроса и предложения (*bid-ask*), также на конец дня. По каждой облигации известно расписание обещанных купонных платежей.

К сожалению, данные не являются полными: отдельные облигации торговались не каждый день. В табл. 1 приведено распределение количества торгуемых облигаций в день.

Таблица 1.

Статистика количества торгуемых облигаций

Количество											
облигаций	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
дней	1	3	5	16	10	23	40	94	80	61	9

Отдельно стоит остановиться на бид-аск спредах. Эти данные, во первых, иногда отсутствуют, а во-вторых, крайне разнородны. В табл. 2 показана описательная статистика по спреду, а на рис. 1 показана гистограмма его распределения – для большей наглядности в логарифмическом масштабе (для всех облигаций).

Таблица 2.

Описательная статистика по бид-аск спреду

Минимум	Максимум	Среднее	Медиана	Среднее квадратичное отклонение
0,0001	17,1834	0,3572	0,18	0,888

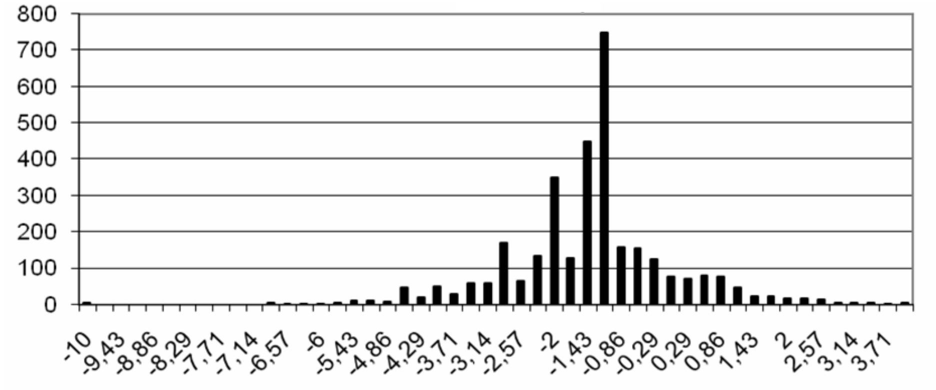

Рис. 1. Гистограмма значений спреда (логарифмический масштаб)

Видно, что встречаются как нехарактерно большие, так и нехарактерно маленькие значения спреда (вплоть до одного тика). Нехарактерные значения свидетельствуют о низкой достоверности соответствующих данных, что должно находить отражение в уменьшении веса соответствующей облигации. Таким образом, после анализа данных мы предлагаем следующую зависимость веса w от спреда s :

$$w = \frac{1}{1 + \left(\frac{s - m}{m} \right)^2}, \tag{10}$$

где s – величина спреда, а m – его медианное значение. Так как бид-аск спред является одной из характеристик рыночной ликвидности облигации, его включение в расчет означает учет рыночной ликвидности облигаций при оценке кривой бескупонной доходности.

Заметим, что, разумеется, возможно поставить в зависимость вес облигации не только от спреда, но и ото всех наблюдаемых параметров, например, еще от объема сделки. Соответственно, в таком случае зависимость веса от наблюдаемых параметров будет иметь следующий вид:

$$w = \prod_{k=1}^{n_{par}} \frac{1}{1 + \left(\frac{m_k - s_k}{m_k} \right)^2}, \tag{11}$$

где n_{par} – количество наблюдаемых параметров; s_k – наблюдаемое значение k-го параметра, а m_k – его медианное значение.

Результаты расчетов

Для сравнения, мы оценим на тех же данных несколько широко распространенных методик оценки кривой бескупонной доходности. Ниже мы кратко опишем альтернативные методики и приведем методологию сравнения.

Модель Свенссона [Svensson, 1994] является широко используемым обобщением популярной модели Нельсона – Зигеля [Nelson, Siegel, 1987]. Они держат пальму первенства среди параметрических моделей, используемых для оценки срочной структуры процентных ставок. В рамках обобщения Свенссона мгновенная форвардная процентная ставка моделируется уравнением

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \beta_2 \frac{t}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \beta_3 \frac{t}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \tag{12}$$

где $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2$ – неизвестные параметры, подлежащие оценке методом наименьших квадратов.

Модель Кокса – Ингерсолла – Росса [Cox, Ingersoll, Ross, 1985] описывает, в первую очередь, динамику процентных ставок; выражение для их срочной структуры появляется как следствие выбранного уравнения динамики. Мы абстрагируемся от динамических свойств этой модели и рассматриваем ее исключительно как параметрический метод оценки кривой бескупонной доходности в соответствии со следующим уравнением:

$$(13)\qquad \begin{cases} Q(t) &= \exp\left[-A(t)-B(t)r_0\right], \\ A(t) &= \dfrac{2\alpha}{\sigma^2}\left\{\ln\left[\dfrac{(\gamma+\beta)\left(1-e^{-\gamma t}\right)}{2\gamma}+e^{-\gamma t}\right]+\gamma t\right\}-\dfrac{\alpha(\gamma+\beta)t}{\sigma^2}, \\ B(t) &= \dfrac{2\left(1-e^{-\gamma t}\right)}{(\gamma+\beta)\left(1-e^{-\gamma t}\right)+2\gamma e^{-\gamma t}}, \\ \gamma &= \sqrt{\beta^2+2\sigma^2}, \end{cases}$$

где r_0,α,β,σ – неизвестные параметры, подлежащие оценке методом наименьших квадратов. Стоит отметить, что это не самая распространенная параметризация уравнения Кокса – Ингерсолла – Росса, однако, по нашему опыту, она лучше других поддается оценке по данным. С классической параметризацией, обусловленной стохастическим дифференциальным уравнением, которому подчиняется мгновенная процентная ставка спот r_t,

$$(14)\qquad dr_t = k(\theta - r_t) + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t,$$

она связана следующим образом: r_0 – это текущее значение процесса r_t, $\alpha = k + \mu\sigma$, $\beta = k\theta$, а μ – рыночная цена риска. На параметры часто накладывают ограничение $2\beta > \sigma^2$, чтобы обеспечить существование стационарного распределения у стохастического дифференциального уравнения. Поскольку нас интересует только способность рассматриваемой параметрической формы приблизить срочную структуру процентных ставок, мы не будем налагать этого ограничения, таким образом, еще расширяя спектр возможных форм кривых бескупонной доходности.

Модель Фишера – Нички – Зервоса [Fisher, Nychka, Zervos, 1995] является в настоящее время наиболее распространенной сплайновой моделью. В ней также используются сглаживающие сплайны и автоматический выбор параметра сглаживания на основе принципа перекрестной проверки, однако и параметрическая форма сплайнов (B-сплайны), и узловые точки в ней выбираются экспертно, в отличие от предлагаемого метода, в котором и параметрическая форма (если соответствующее уравнение имеет аналитическое решение), и узлы являются частью математического решения поставленной задачи (подробнее см.: [Лапшин, 2009b]).

Наконец, G-кривая [Гамбаров, 2006] – модель, используемая в настоящее время на Московской бирже. Это динамическая модель, в основе которой лежит обобщение упомянутой выше модели Свенссона путем добавления еще нескольких параметров, однако оценка неизвестных параметров производится по мере совершения сделок – посредством обобщенного фильтра Калмана. Оценки кривой бескупонной доходности по этому методу для целей сравнения мы взяли с официального сайта ЦБ РФ. Различные облигации обладают различным весом в зависимости от их рыночной ликвидности.

Методология сравнения такова: для каждой из моделей, кроме G-кривой (так как результаты расчетов по этой методике мы имеем только в готовом виде, а предоставленного описания недостаточно, чтобы однозначно воспроизвести эти расчеты), мы рассматриваем два варианта: метод наименьших квадратов без учета весов и с учетом различных весов облигаций. Соответственно, критерии качества приближения будут разными для этих двух случаев: средняя/среднеквадратическая ошибка в цене для случая расчетов без учета различных весов облигаций и средняя/среднеквадратическая ошибка в цене, нормированной на бид-аск спред, для расчетов с учетом весов. Таким образом, критерием сравнения будет являться, по сути, именно та целевая функция, которая оптимизировалась, что позволяет исключить несправедливое преимущество одного метода перед другим, когда сравнение происходит не по той целевой функции, по которой происходила оптимизация.

Результаты сравнения представлены в табл. 3. Здесь и далее методы закодированы аббревиатурами: «OurMethod» – предлагаемый метод, «NS» – метод Нельсона – Зигеля, «CIR» – метод Кокса – Ингерсола – Росса, «Sven» – метод Свенссона, «G-curve» – G-кривая, используемая на Московской бирже, а «Splines» – сплайновый метод Фишера – Нички – Зервоса.

Таблица 3.

Ошибки приближения цен облигаций различными методами

	Среднее абсолютное значение ошибки	Стандартное отклонение ошибки	Среднее абсолютное значение ошибки/ ценовой спред	Стандартное отклонение ошибки/ ценовой спред
Метод:				
NS	0,2911	0,4787	3,9201	10,4407
Sven	0,2122	0,2643	3,2797	8,8879
CIR	0,2170	0,2861	5,5097	17,8905
Splines	0,2717	0,3004	2,9625	7,4074
G-curve	0,2452	0,3263	3,5723	9,7635
Our Method	**0,1132**	**0,1512**	**0,7878**	**1,1857**

Видно, что предлагаемый метод существенно выигрывает по всем параметрам. Еще раз подчеркнем, что для всех методов, кроме G-кривой, сравнение проводилось в максимально благоприятных для каждого из методов условиях: если сравнение проводилось для неравных весов облигаций, каждый из методов адаптировался к этому.

Второй критерий качества – гладкость и визуальную привлекательность кривых бескупонных доходностей – мы иллюстрируем на рис. 2.

Видно, что все методы дают похожим образом выглядящие кривые. Разумеется, одного примера недостаточно для выводов, однако авторы изучили аналогичные графики за каждый из 342 торговых дней, вошедших в базу расчета, и результаты аналогичны. Иногда некоторые альтернативные методы работают плохо, в то время, как наш метод дает правдоподобные результаты. Пример представлен на рис. 3.

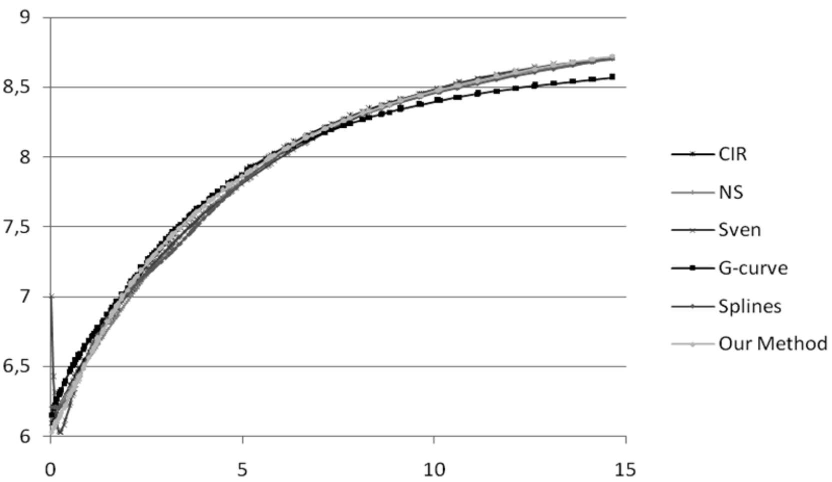

Рис. 2. Пример кривых бескупонных доходностей на 28 мая 2012 г., полученных разными методами

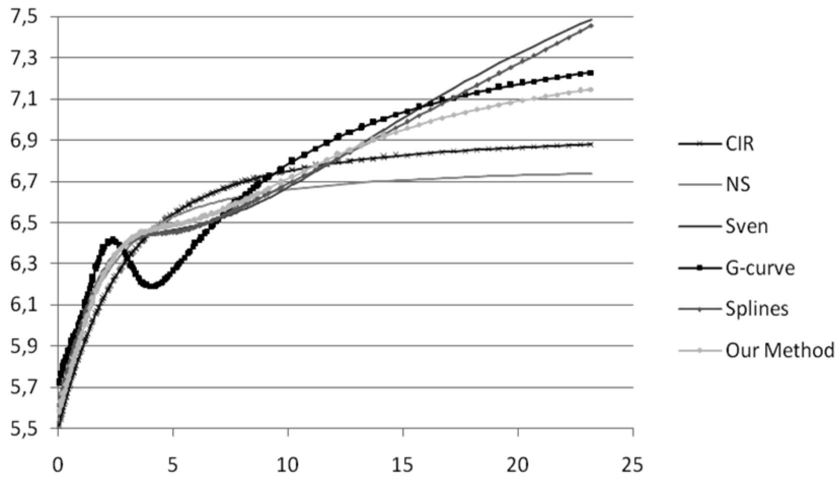

Рис. 3. Пример кривых бескупонных доходностей на 29 августа 2012 г., полученных разными методами

Мгновенные форвардные процентные ставки, подразумеваемые этими графиками, конечно, будут различаться, но в отсутствие производных инструментов на процентную ставку подобное сравнение лишено практического критерия. Тем не менее мы полагаем, что если бы подобное сравнение было проведено, предлагаемый метод вышел бы победителем, так как он изначально был сформулирован в терминах мгновенных форвардных процентных ставок.

Заключение

Мы предложили новый метод оценки срочной структуры процентных ставок, обладающий целым рядом достоинств, отличающих его от конкурирующих методов. Ряд альтернативных методов обладают некоторыми из описанных свойств, но лишь предлагаемый метод обладает ими всеми.

1. Предлагаемый метод – непараметрический, что позволяет отражать сложные формы кривых бескупонных доходностей, не ограничиваясь заданной параметрической формой. Это позволяет методу быть применимым даже при изменении экономической обстановки, когда параметрические методы, подходившие для прежней ситуации, могут перестать работать.

2. Предлагаемый метод, будучи, по факту, сплайновым, не требует произвольного выбора того или иного сплайнового семейства. Вместо этого конкретный вид сплайна (в отдельных случаях – аналитически) получается как решение математической задачи оптимизации согласно выбранным функциям $\alpha(\cdot)$ и $G(\cdot)$, рекомендации по выбору которых приведены в настоящей работе.

3. Наш метод учитывает общую низкую ликвидность рынка и разную ликвидность различных бумаг путем нормирования невязки в ценах на бид-аск спред и дополнительного множителя, зависящего от правдоподобности наблюдаемых величин. Несмотря на то, что, как продемонстрировано в настоящей работе, подобная модификация применима ко многим существующим методам, насколько нам известно, она не была описана ранее.

4. Наш метод может гарантировать неотрицательность мгновенных форвардных ставок, если это требуется по условиям задачи. С другой стороны, если это не требуется, ограничение на неотрицательность может быть снято. Это достигается соответствующим выбором функции $G(\cdot)$.

5. Предлагаемый метод является асимптотически согласованным с бесконечномерной моделью динамики процентных ставок, что является аргументом в пользу того, что при использовании нашего метода на практике для ежедневной переоценки кривой бескупонной доходности получаемая динамика будет внутренне согласованной.

Мы также провели тестирование нашего метода и нескольких альтернативных на данных о торгах государственными облигациями Минфина России. Результаты расчетов показывают существенное преимущество предлагаемого метода над альтернативными по обеим метрикам: как по среднему и среднеквадратическому отклонению модельной цены от ее фактического значения, так и по среднему и среднеквадратическому относительному отклонению (отклонению цены, отнесенному к бид-аск спреду). Иллюстрации также показывают, что предлагаемый метод обеспечивает визуально столь же (а иногда и более) привлекательные кривые бескупонных доходностей, что и альтернативные методы. Таким образом, при сравнимых визуальных характеристиках и гладкости и при явном преимуществе в количественном тесте мы делаем вывод о превосходстве предлагаемого метода для целей оценки бескупонной кривой доходности.

Дальнейшее развитие представленного метода может проходить по нескольким направлениям. Во-первых, обобщение предложенного правила выбора весов: предложенную нами adhoc-процедуру назначения весов можно скомбинировать с часто необходимой на практике процедурой предварительной фильтрации входных данных с целью исключения выбросов. Это возможно в рамках байесовского подхода к формализации наблюдений и теории правдоподобности (*credibility theory*), в соответствии с которой наблюдаемые показатели, такие как типичность спреда, объема и др., переводятся в правдоподобность – величину, имеющую свойства вероятности и использующуюся как вероятность в байесовском анализе. Эта работа ведется авторами в настоящее время.

Во-вторых, представляется интересным изучение влияния выбора функций $\alpha(\cdot)$ и $G(\cdot)$ на получаемые результаты. Проведенные предварительные расчеты показывают, что результаты довольно робастны по отношению к выбору этих функций, однако более детальный анализ этого вопроса был бы интересен.

В-третьих, обобщая предыдущий абзац, было бы желательно экономическое исследование требования гладкости кривой бескупонной доходности, его возможных интерпретаций и формализаций, а также способов количественного сравнения методов по этому критерию.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Гамбаров Г.М., Шевчук И.В., Балабушкин А.Н., Никитин А.В. Кривая бескупонной доходности на рынке ГКО-ОФЗ // Рынок ценных бумаг. 2005. № 3. С. 68–77.

Лапшин В.А. Математические модели динамики срочной структуры процентных ставок, учитывающие качественные свойства рынка. М.: МГУ имени М.В. Ломоносова, 2010.

Лапшин В.А. Непараметрическая модель стохастической динамики процентных ставок // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2009. № 4. С. 25–37.

Лапшин В.А. Определение срочной структуры процентных ставок // Вестник московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. М.: Изд. отд. ф-та ВМиК МГУ, 2009. Т. 33, № 4. С. 37–43.

Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

Adams K., van Deventer D. Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness // The Journal of Fixed Income. Institutional Investor, Inc. 1994. Vol. 4. № 1. P. 52–62.

Björk T., Christensen B.J. Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves // Mathematical Finance. Wiley Online Library. 1999. Vol. 9. № 4. P. 323–348.

Björk T., Svensson L. On the Existence of Finite-Dimensional Realizations for Nonlinear Forward Rate Models // Mathematical Finance. Wiley Online Library. 2001. Vol. 11. № 2. P. 205–243.

Brace A., Gatarek D., Musiela M. The Market Model of Interest Rate Dynamics // Mathematical Finance. Wiley Online Library. 1997. Vol. 7. № 2. P. 127–155.

Brace A., Musiela M. A Multifactor Gauss Markov Implementation of Heath, Jarrow, and Morton // Mathematical Finance. Wiley Online Library. 1994. Vol. 4. № 3. P. 259–283.

Cohen K.J., Kramer R.L., Waugh W.H. Regression Yield Curves for US Government Securities // Management Science. JSTOR. 1966. Vol. 13. № 4. P. 168–175.

Cooper I.A. Asset Values, Interest-rate Changes, and Duration // Journal of Financial and Quantitative Analysis. JSTOR. 1977. Vol. 12. № 5. P. 701–723.

Cox J.C., Ingersoll Jr.J.E., Ross S.A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates // Econometrica. JSTOR. 1985. Vol. 53. № 2. P. 385–408.

Duffee G.R. Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models // The Journal of Finance. Wiley Online Library. 2002. Vol. 57. № 1. P. 405–443.

Echols M., Elliott J. A Quantitative Yield Curve Model for Estimating the Term Structure of Interest Rates // Journal of Financial and Quantitative. JSTOR. 1976. Vol. 11. № 1. P. 87–114.

Fama E., Bliss R. The Information in Long-maturity Forward Rates // The American Economic Review. JSTOR. 1987. Vol. 77. № 4. P. 680–692.

Filipović D. A Note on the Nelson-Siegel Family // Mathematical Finance. Blackwell Publishers Inc. 1999. Vol. 9. № 4. P. 349–359.

Filipović D., Teichmann J. Existence of Invariant Manifolds for Stochastic Equations in Infinite Dimension // Journal of Functional Analysis. Elsevier. 2003. Vol. 197. № 2. P. 398–432.

Fisher D. Expectations, the Term Structure of Interest Rates, and Recent British Experience // Economica. London School of Economics and Political Science. 1966. Vol. 33. № 131. P. 319–329.

Fisher M., Nychka D., Zervos D. Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines. Federal Reserve System Working Paper № 95-1. 1995.

Heath D., Jarrow R., Morton A. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation // Econometrica: Journal of the Econometric Society. JSTOR. 1992. Vol. 60. № 1. P. 77–105.

Jarrow R.A. The Zero-lower Bound on Interest Rates: Myth or Reality? // Finance Research Letters. 2013. Vol. 10. № 4. P. 151–156.

Lapshin V., Kaushanskiy V. A Nonparametric Method for Term Structure Fitting with Automatic Smoothing. Working Paper. 2014. (http://www.hse.ru/org/hse/wp/news/pfi/)

Litzenberger R.H., Rolfo J. An International Study of Tax Effects on Government Bonds // The Journal of Finance. JSTOR. 1984. Vol. 39. № 1. P. 1–22.

McCulloch J.H. Measuring the Term Structure of Interest Rates // The Journal of Business. JSTOR. 1971. Vol. 44. № 1. P. 19–31.

McCulloch J.H. The Tax-adjusted Yield Curve // The Journal of Finance. JSTOR. 1975. Vol. 30. № 3. P. 811–830.

Nelson C.R., Siegel A.F. Parsimonious Modeling of Yield Curves // Journal of Business. University of Chicago Press. 1987. Vol. 60. № 4. P. 473–489.

Pallavicini A., Tarenghi M. Interest-rate Modeling with Multiple Yield Curves // SSRN 1629688. 2010. P. 1–27. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=1629688 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1629688

Rebonato R. Interest-Rate Term-Structure Pricing Models: A Review // Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2004. Vol. 460. № 2043. P. 667–728.

Shea G.S. Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations // Journal of Financial and Quantitative Analysis. JSTOR. 1984. Vol. 19. № 3. P. 253–269.

Smirnov S., Zakharov A. A Liquidity-Based Robust Spline Fitting of Spot Yield Curve Providing Positive Forward Rates. EFFAS-EBC Working Paper. 2003.

Steeley J. Estimating the Gilt-Edged Term Structure: Basis Splines and Confidence Intervals // Journal of Business Finance & Accounting. Wiley Online Library. 1991. Vol. 18. № 4. P. 513–529.

Svensson L.E.O. Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994. NBER Working Paper 4871. 1994.

Tanggaard C. Kernel Smoothing of Discount Functions. Aarhus School of Business Working Paper № 92-8. 1992.

Vasicek O.A., Fong H.G. Term Structure Modeling Using Exponential Splines // The Journal of Finance. JSTOR. 1982. Vol. 37. № 2. P. 339–348.

Waggoner D.F. Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices. Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 97-10. 1997. Available at: SSRN http://ssrn.com/abstract=86789

Wahba G. Spline Models for Observational Data. SIAM publications. Philadelphia, 1990. P. 169.

Fitting Zero-coupon Yield Curve in the Russian Bond Market

Lapshin Victor[1], **Kaushansky Vadim**[2], **Kurbangaleev Marat**[3]

[1] National Research University Higher School of Economics,
26, Shabolovka st., Moscow, 119049, Russian Federation.
E-mail: vlapshin@hse.ru

[2] National Research University Higher School of Economics,
26, Shabolovka st., Moscow, 119049, Russian Federation.
E-mail: vkaushanskiy@hse.ru

[3] National Research University Higher School of Economics,
26, Shabolovka st., Moscow, 119049, Russian Federation.
E-mail: mkurbangaleev@hse.ru

In this paper we present a new nonparametric approach for fitting the zero-coupon yield curve to coupon bond quotes. Unlike other existing methods, our method has a number of advantages: the ability to fit complex zero-coupon yield curve shapes, the absence of the need to manually choose the smoothing parameter, the ability to ensure the positiveness of the fitted instantaneous forward rates, incorporating market liquidity information, and consistency with a no-arbitrage stochastic model.

Usually nonparametric methods require apriori knowledge about the ratio of accuracy of the solution and smoothness of the term structure. The novelty of proposed method is in the automatic determination of this parameter by using cross-validation method.

We discuss various modifications of the method to incorporate individual preferences of a decision maker used yield curve. For example, one can reflect the horizontal yield in yield curve after certain time to maturity or set own relative/absolute scale for non-smoothness of yield curve.

Alternative methods often assume that bond prices are accurately known. We depart from this assumption by taking into account a possible error of input data (bond prices). We assume that the order of the error is reflected in the bid-ask spread. This allows on the one hand to take into account possible errors and/or inaccuracy of the original data, and on the other hand to build a zero-coupon yield curves are smooth.

On Russian bond market data we compare the proposed method with several alternatives for a number of widespread popular quality criteria used for comparison of this kind of methods that reflect the accuracy of the result, and the smoothness of the resulting curves. The results of the comparison indicate the superiority of the proposed method for all criteria.

Key words: zero-coupon yield curve; term structure of interest rates; Russian bond market; splines; regularization.

JEL Classification: G12, C14.

* *
*

References

Gambarov G.M., Shevchuk I.V., Balabushkin A.N., Nikitin A.V. (2005) Krivaja beskuponnoj dohodnosti na rynke GKO-OFZ [Zero-Coupon Yield Curve on the GKO-OFZ Market [In Russian]]. *Rynok cennyh bumag*, 3, pp. 68–77.

Lapshin V.A. (2010) *Matematicheskie modeli dinamiki srochnoj struktury procentnyh stavok, uchityvajushhie kachestvennye svojstva rynka* [Mathematical Models of Term Structure Dynamics Allowing for Qualitative Properties of Markets [In Russian]]. Moscow: Lomonosov Moscow State University.

Lapshin V.A. (2009) Neparametricheskaja model' stohasticheskoj dinamiki procentnyh stavok [A Non-Parametric Stochastic Dynamics of Interest Rates [In Russian]]. *Herald of PFUR: Mathematics, Informatics, Physics*, 4, pp. 25–37.

Lapshin V.A. (2009) Opredelenie srochnoj struktury procentnyh stavok [Determining of the Term Structure of Interest Rates]. *Vestnik moskovskogo universiteta*. Ser. 15. Vychislitel'naja matematika i kibernetika. Moscow: Izd. otd. f-ta VMiK MGU, 33, 4, pp. 37–43.

Tihonov A.N., Arsenin V.Ja. (1979) *Metody reshenija nekorrektnyh zadach* [Solutions of ill-posed problems]. Moscow: Nauka.

Adams K., van Deventer D. (1994) Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness. *The Journal of Fixed Income*, Institutional Investor, Inc., 4, 1, pp. 52–62.

Björk T., Christensen B.J. (1999) Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves. *Mathematical Finance*, Wiley Online Library, 9, 4, pp. 323–348.

Björk T., Svensson L. (2001) On the Existence of Finite-Dimensional Realizations for Nonlinear Forward Rate Models. *Mathematical Finance*, Wiley Online Library, 11, 2, pp. 205–243.

Brace A., Gatarek D., Musiela M. (1997) The Market Model of Interest Rate Dynamics. *Mathematical Finance*, Wiley Online Library, 7, 2, pp. 127–155.

Brace A., Musiela M. (1994) A Multifactor Gauss Markov Implementation of Heath, Jarrow, and Morton. *Mathematical Finance*, Wiley Online Library, 4, 3, pp. 259–283.

Cohen K.J., Kramer R.L., Waugh W.H. (1966) Regression Yield Curves for US Government Securities. *Management Science*, JSTOR, 13, 4, pp. 168–175.

Cooper I.A. (1977) Asset Values, Interest-rate Changes, and Duration. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, JSTOR, 12, 5, pp. 701–723.

Cox J.C., Ingersoll Jr.J.E., Ross S.A. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, JSTOR, 53, 2, pp. 385–408.

Duffee G.R. (2002) Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, 57, 1, pp. 405–443.

Echols M., Elliott J. (1976) A Quantitative Yield Curve Model for Estimating the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial and Quantitative*, JSTOR, 11, 1, pp. 87–114.

Fama E., Bliss R. (1987) The Information in Long-maturity Forward Rates. *The American Economic Review*, JSTOR, 77, 4, pp. 680–692.

Filipović D. (1999) A Note on the Nelson-Siegel Family. *Mathematical Finance*. Blackwell Publishers Inc., 9, 4, pp. 349–359.

Filipović D., Teichmann J. (2003) Existence of Invariant Manifolds for Stochastic Equations in Infinite Dimension. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, 197, 2, pp. 398–432.

Fisher D. (1966) Expectations, the Term Structure of Interest Rates, and Recent British Experience. *Economica*, London School of Economics and Political Science, 33, 131, pp. 319–329.

Fisher M., Nychka D., Zervos D. (1995) *Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines.* Federal Reserve System Working Paper no 95-1.

Heath D., Jarrow R., Morton A. (1992) Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, 60, 1, pp. 77–105.

Jarrow R.A. (2013) The Zero-lower Bound on Interest Rates: Myth or Reality? *Finance Research Letters*, 10, 4, pp. 151–156.

Lapshin V., Kaushanskiy V. (2014) *A Nonparametric Method for Term Structure Fitting with Automatic Smoothing*. Working Paper. Available at: http://www.hse.ru/org/hse/wp/news/pfi/

Litzenberger R.H., Rolfo J. (1984) An International Study of Tax Effects on Government Bonds. *The Journal of Finance*, JSTOR, 39, 1, pp. 1–22.

McCulloch J.H. (1971) Measuring the Term Structure of Interest Rates. *The Journal of Business*, JSTOR, 44, 1, pp. 19–31.

McCulloch J.H. (1975) The Tax-adjusted Yield Curve. *The Journal of Finance*, JSTOR, 30, 3, pp. 811–830.

Nelson C.R., Siegel A.F. (1987) Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business*, University of Chicago Press, 60, 4, pp. 473–489.

Pallavicini A., Tarenghi M. (2010) *Interest-rate Modeling with Multiple Yield Curves*. SSRN 1629688, pp. 1–27. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=1629688 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1629688

Rebonato R. (2004) Interest-Rate Term-Structure Pricing Models: A Review. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460, 2043, pp. 667–728.

Shea G.S. (1984) Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, JSTOR, 19, 3, pp. 253–269.

Smirnov S., Zakharov A. (2003) *A Liquidity-Based Robust Spline Fitting of Spot Yield Curve Providing Positive Forward Rates*. EFFAS-EBC Working Paper.

Steeley J. (1991) Estimating the Gilt-Edged Term Structure: Basis Splines and Confidence Intervals. *Journal of Business Finance & Accounting*, Wiley Online Library, 18, 4, pp. 513–529.

Svensson L.E.O. (1994) *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994*. NBER Working Paper 4871.

Tanggaard C. (1992) *Kernel Smoothing of Discount Functions*. Aarhus School of Business Working Paper no 92-8.

Vasicek O.A., Fong H.G. (1982) Term Structure Modeling Using Exponential Splines. *The Journal of Finance*, JSTOR, 37, 2, pp. 339–348.

Waggoner D.F. (1997) *Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices*. Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 97-10. Available at: SSRN http://ssrn.com/abstract=86789

Wahba G. (1990) *Spline Models for Observational Data*. SIAM publications. Philadelphia, pp. 169.