Экономический журнал ВШЭ. 2015. Т. 19. № 2. С. 290–303.
HSE Economic Journal, 2015, vol. 19, no 2, pp. 290–303.

О применении нечетких чисел при оценке опционов

Лис А.И.

Вопрос, какой подход к передаче неопределенности является более важным, с использованием случайных величин или с использованием нечетких чисел, далек от своего окончательного решения. В настоящее время широко применяются оба подхода.

Методы нечеткой математики позволяют учесть при анализе неточности в значениях таких параметров, как, например, волатильность или процентная ставка, и выразить цену опциона в виде нечеткого числа. Таким образом, цена опциона дается с различными уровнями достоверности. В данной работе используются аналитические формулы для безарбитражных цен опционов, формула Блэка – Шоулза и модификация этой формулы для расчета цены американского опциона. Вместо точных значений цены базового актива, волатильности этой цены, дивидендной доходности и ставки процента взяты нечеткие числа. В ряде работ такой подход применяется к европейским опционам, в настоящей работе он впервые используется для американских опционов. В работе получена нечеткая стоимость американского колл опциона, что позволяет определить границы цены опциона при каждом уровне достоверности. Проводится сравнение с нечеткими стоимостями европейских опционов. Делается попытка ответить на вопрос, какой подход к подаче неопределенности является более важным, основанный на использовании случайных величин или на использовании нечетких чисел. В настоящее время широко применяются оба подхода.

Ключевые слова: нечеткие множества; нечеткие числа; оценка американских опционов.

1. Введение

В финансах часто приходится иметь дело с неопределенностью. Из-за постоянных колебаний на рынке такие величины, как цена акции, стоимость опциона или рыночная ставка процента, бывает затруднительно сопоставить с точным числом. Кроме того, точ-

Лис Александр Ильич – аспирант кафедры математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. E-mail: lis-alexandr@rambler.ru

Статья получена: октябрь 2014 г./ Статья принята: апрель 2015 г.

ные данные не всегда бывают доступны. Неопределенность такого вида, не связанную, по сути, с различными значениями и их вероятностями, можно выразить, используя нечеткие числа.

Опционы имеют большое значение для финансовых рынков, перед аналитиками стоит задача нахождения стоимости опциона и сравнения рыночной стоимости опциона с этой, так называемой, «справедливой ценой». Один из основных подходов к решению данной задачи – это вычисление цены опциона с помощью некой аналитической формулы. Такой подход применяется, например, в работе [Barone-Adesi, Whaley, 1987]. Формула дает точное значение цены при точных входных параметрах. Однако во многих случаях точные значения параметров не могут быть вычислены из-за расхождения в данных или недостатка информации. В таких случаях уместно использовать теорию нечетких чисел, в которой вместо точных значений параметров используются размытые. Методы нечеткой математики, широко применяемые в различных прикладных исследованиях, приобрели распространение и в задаче оценивания опционов. Например, возникает ситуация, когда доступно несколько различных оценок для волатильности. Кроме того, волатильность актива может быть разной в момент расчета цены опциона и в последующие моменты. Это вносит неопределенность, которую можно отразить как вероятностной моделью, так и с помощью нечетких чисел. Применяется и комбинированный нечетко-случайный подход (см., например: [Zmeskal, 2001]).

Об использовании нечетких чисел в аналитических формулах для безарбитражных цен сегодня можно уже говорить как о некотором направлении в теории опционов. Различные подходы к этому вопросу даются в работах [Chrysafis, Papadopoulos, 2009; Wu, 2004, 2005; Capotortia, Figà-Talamanca, 2013; Thiagarajah, Thavaneswaran, 2006; Guerra, Sorini, Stefanini, 2011]. В этих исследованиях речь идет о европейских опционах. Например, в статье [Thiagarajah, Thavaneswaran, 2006] были рассмотрены модели оценки опционов с нечетко-случайными значениями волатильности. В работе [Guerra, Sorini, Stefanini, 2011] приведен расчет стоимости опциона в случае нечеткой цены базового актива, безрисковой процентной ставки и волатильности и исследована зависимость цены опциона от параметров путем расчета коэффициентов чувствительности. В статье [Zhang, Shi, Xiao, 2011] рассматривается приближенная формула для цены американского опциона, не связанная с теорией безарбитражной оценки опционов, и в эту формулу включаются нечеткие числа. В настоящей работе подход, связанный с использованием нечетких чисел, впервые применяется к безарбитражным формулам для цен американских опционов, используется формула из исследования [Barone-Adesi, Whaley, 1987].

Данная работа организована следующим образом: в разделе 2 приведены некоторые сведения, касающиеся нечетких чисел. В разделе 3 описаны алгоритмы получения нечеткой цены европейского и американского опционов. Для европейских опционов приводимый алгоритм близок к алгоритму из работы [Guerra, Sorini, Stefanini, 2011], хотя и является более простым. Подробнее об этом упрощении говорится в разделе 3. Схема расчета получения нечеткой цены американского опциона является новой. В разделе 4 приведены результаты расчетов стоимостей опционов при нечетких входных данных.

2. Нечеткие числа, функции нечетких чисел

Существуют различные определения нечетких чисел, здесь используется то же определение нечеткого числа, что и в работе [Shvedov, 2013]. Компакт $\tilde{a} \subseteq \mathbb{R}^2$ называется нечетким числом, если выполнены следующие условия:

- при $\eta_1 \notin [0,1]$ пересечение $\tilde{a}$ с прямой $\eta = \eta_1$ пусто;
- при $\eta_1 \in [0,1]$ пересечение $\tilde{a}$ с прямой $\eta = \eta_1$ имеет вид

$$\{(\xi;\eta) : k_1(\eta_1) \le \xi \le k_2(\eta_1), \eta = \eta_1\},$$

где $k_1(\eta)$ – монотонно неубывающая непрерывная слева функция на отрезке [0;1]; $k_2(\eta)$ – монотонно невозрастающая непрерывная слева функция на отрезке [0;1].

η-срезом нечеткого числа $\tilde{a}$ при $\eta \in [0,1]$ называется отрезок $\tilde{a}_\eta = [k_1(\eta); k_2(\eta)]$ прямой ξ.

Функции $k_1(\eta)$ и $k_2(\eta)$ будем называть индексами нечеткого числа $\tilde{a}$. В данной работе для индексов будем использовать также обозначения $\tilde{a}_\eta^L = k_1(\eta), \tilde{a}_\eta^U = k_2(\eta)$. Тогда η-срез нечеткого числа $\tilde{a}$ имеет вид

$$\tilde{a}_\eta = \left[\tilde{a}_\eta^L; \tilde{a}_\eta^U\right].$$

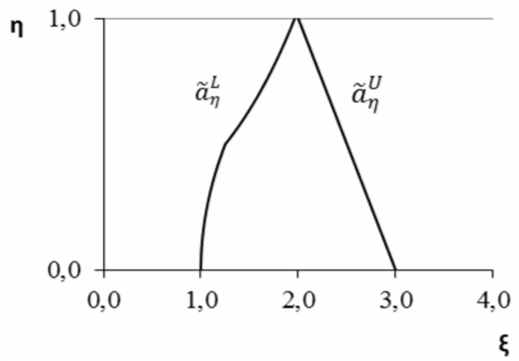

Рис. 1. Пример нечеткого числа

Треугольное нечеткое число $\tilde{a}$ может быть задано тройкой $\{a^-; a; a^+\}$ (см. рис 2).

В настоящей работе для задания нечеткого числа используются индексы. Но существует и другой подход к определению нечеткого множества (нечеткое число – это частный случай нечеткого множества). В основе этого подхода лежит понятие функции принадлежности. Не давая здесь точных определений, скажем только, что функция аргумента ξ, график которой изображен на рис. 1, 2, называется функцией принадлежности. На рис. 3 показаны нечеткие множества, не являющиеся нечеткими числами. Подробнее о нечетких множествах см., например: [Liu, 2002].

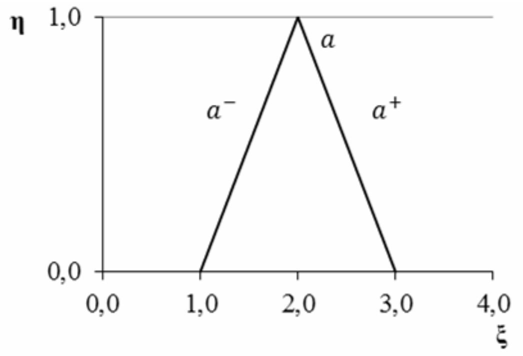

Рис. 2. Треугольное нечеткое число

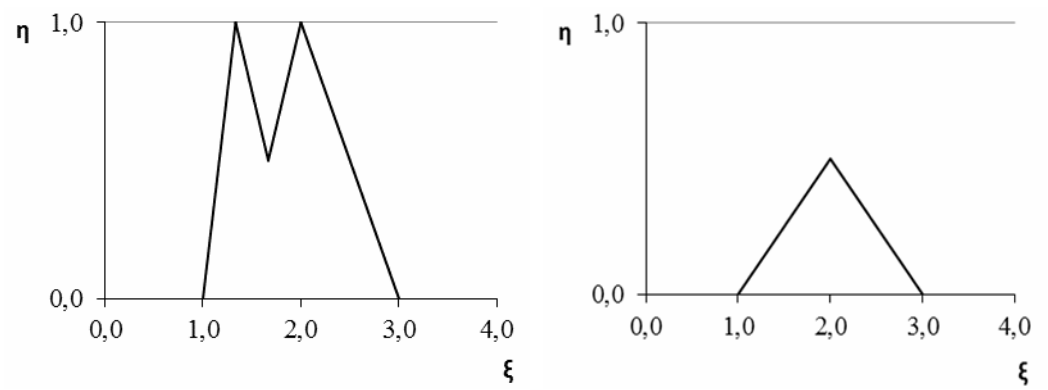

Рис. 3. Примеры нечетких множеств, не являющихся нечеткими числами

Рассмотрим сетку на отрезке $[0;1]$:

$$0=\eta_0<\eta_1<\eta_2<\ldots<\eta_{k-1}<\eta_k=1.$$

В дальнейшем, при расчетах, индексы нечеткого числа будем определять только в точках сетки, считая, что таким образом приближенно задается нечеткое число.

Пусть $\tilde{a}^1,\ldots,\tilde{a}^l$ – нечеткие числа, и непрерывная функция

$$f:\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}.$$

η-срезы нечетких чисел $\tilde{a}^1,\ldots,\tilde{a}^l$ обозначим $\tilde{a}_\eta^j=\left[\tilde{a}_\eta^{j,L},\tilde{a}_\eta^{j,U}\right], j=1,\ldots l.$

Что понимается под нечетким числом $f\left(a^1,\ldots,a^l\right)$? В исследовании [Guerra, Sorini, Stefanini, 2011, p. 517] приводится следующее определение, которое названо хорошо известным подходом. Индексы нечеткого числа $f\left(a^1,\ldots,a^l\right)$ определяются следующим образом:

$$f\left(\tilde{a}^1,\ldots,\tilde{a}^l\right)_\eta^L = \inf f\left(a^1,\ldots,a^l\right),$$
$$f\left(\tilde{a}^1,\ldots,\tilde{a}^l\right)_\eta^U = \sup f\left(a^1,\ldots,a^l\right),$$

где inf и sup берутся по всем

$$a^1 \in \left[\tilde{a}_\eta^{1,L},\tilde{a}_\eta^{1,U}\right],\ldots,a^l \in \left[\tilde{a}_\eta^{l,L},\tilde{a}_\eta^{l,U}\right],$$

т.е. по l-мерному параллелепипеду.

По свойству монотонности индексов нечеткого числа при любом $i = 1,\ldots,k$

$$\left[\tilde{a}_{\eta_i}^{j,L},\tilde{a}_{\eta_i}^{j,U}\right] \subseteq \left[\tilde{a}_{\eta_{i-1}}^{j,L},\tilde{a}_{\eta_{i-1}}^{j,U}\right], j = 1,\ldots,l.$$

Значит, соответствующее включение имеет место и для l-мерных параллелепипедов.

$$\left[f\left(\tilde{a}^1,\ldots,\tilde{a}^l\right)_{\eta_i}^L; f\left(\tilde{a}^1,\ldots,\tilde{a}^l\right)_{\eta_i}^U\right] \subseteq \left[f\left(\tilde{a}^1,\ldots,\tilde{a}^l\right)_{\eta_{i-1}}^L, f\left(\tilde{a}^1,\ldots,\tilde{a}^l\right)_{\eta_{i-1}}^U\right].$$

Это означает, что набор отрезков

$$\left[f\left(\tilde{a}^1,\ldots,\tilde{a}^l\right)_{\eta_i}^L; f\left(\tilde{a}^1,\ldots,\tilde{a}^l\right)_{\eta_i}^U\right], i = 0,\ldots,k$$

может рассматриваться как набор η-срезов некоторого нечеткого числа.

В соответствии с данным определением умножение нечеткого числа на константу, сумма, разность и произведение нечетких чисел задаются следующим образом.

При $\lambda \in \mathbb{R}$ нечеткое число $\lambda\tilde{a}$ – это нечеткое число с η-срезами

$$\left[\min\left\{\lambda\tilde{a}_\eta^L;\lambda\tilde{a}_\eta^U\right\};\max\left\{\lambda\tilde{a}_\eta^L;\lambda\tilde{a}_\eta^U\right\}\right].$$

Нечеткое число $\tilde{a} \oplus \tilde{b}$ – это нечеткое число с η-срезами

$$\left[\tilde{a}_\eta^L + \tilde{b}_\eta^L,\tilde{a}_\eta^U + \tilde{b}_\eta^U\right].$$

Нечеткое число $\tilde{a} \oplus \tilde{b}$ – это нечеткое число с η-срезами

$$\left(\tilde{a} \otimes \tilde{b}\right)_\eta = \left[\min\left\{\tilde{a}_\eta^L \tilde{b}_\eta^L, \tilde{a}_\eta^L \tilde{b}_\eta^U, \tilde{a}_\eta^U \tilde{b}_\eta^L, \tilde{a}_\eta^U \tilde{b}_\eta^U\right\}, \max\left\{\tilde{a}_\eta^L \tilde{b}_\eta^L, \tilde{a}_\eta^L \tilde{b}_\eta^U, \tilde{a}_\eta^U \tilde{b}_\eta^L, \tilde{a}_\eta^U \tilde{b}_\eta^U\right\}\right].$$

3. Стоимость европейского и американского опционов колл на акцию

Безарбитражные цены опционов могут быть получены либо при помощи численных методов, либо, в некоторых случаях, задаваться аналитическими формулами. Здесь мы ограничимся рассмотрением задач, в которых для безарбитражных цен опционов существуют аналитические формулы либо приближенные аналитические формулы.

При четком задании всех значений стоимость европейского опциона колл со страйком X, моментом исполнения T может быть получена по формуле Блэка – Шоулза:

$$c(S,t,X,r,\sigma,q) = Se^{-qt}N(d_1) - Xe^{-rt}N(d_2),$$

где

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t},$$

где S – цена акции; σ – волатильность цены акции; r – безрисковая ставка процента; q – дивидендная доходность; t – время, оставшееся до момента исполнения. $N(x)$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины. При цене акции S_t будем использовать обозначение для цены европейского опциона колл $c_t = c(S_t, t, X, r, \sigma, q)$.

В приведенной формуле акции S, волатильность σ, безрисковая ставка r и q являются обычными действительными числами. Но можно рассмотреть и такую математическую модель, где эти числа являются нечеткими и задаются η-срезами:

$$\tilde{S}_\eta = \left[\tilde{S}_\eta^L; \tilde{S}_\eta^U\right]; \tilde{\sigma}_\eta = \left[\tilde{\sigma}_\eta^L; \tilde{\sigma}_\eta^U\right]; \tilde{r}_\eta = \left[\tilde{r}_\eta^L; \tilde{r}_\eta^U\right]; \tilde{q}_\eta = \left[\tilde{q}_\eta^L; q_\eta^U\right].$$

Формула расчета стоимости опциона для нечеткого случая примет вид

$$c\left(\tilde{S}, t, X, \tilde{r}, \tilde{\sigma}, \tilde{q}\right)_\eta^L = \inf c(S,t,X,r,\sigma,q),$$

$$c\left(\tilde{S}, t, X, \tilde{r}, \tilde{\sigma}, \tilde{q}\right)_\eta^R = \sup c(S,t,X,r,\sigma,q),$$

где inf и sup берутся по четырехмерному параллелепипеду:

$$S \in \left[\tilde{S}_\eta^L; \tilde{S}_\eta^U\right], r \in \left[\tilde{r}_\eta^L; \tilde{r}_\eta^U\right], \sigma \in \left[\tilde{\sigma}_\eta^L; \tilde{\sigma}_\eta^U\right], q \in \left[\tilde{q}_\eta^L; \tilde{q}_\eta^U\right].$$

Приведенная схема расчета нечеткой цены европейского опциона близка к схеме расчета из работы [Guerra, Sorini, Stefanini, 2011], хотя и отличие от алгоритмов из ряда других работ, упомянутых во введении, не носит принципиального характера. Кроме значений индексов нечеткой цены опциона в точках сетки в исследовании [Guerra, Sorini, Stefanini, 2011] вычисляются еще значения производных в этих же точках. Возможно, именно с этим усложнением алгоритма связано то, что найденные в ней в качестве индексов нечеткого числа функции могут индексами нечеткого числа не быть (см. рис. 11 указанной работы).

Как известно, в отличие от европейского опциона, американский опцион может быть исполнен до наступления срока. Премия за раннее исполнение может быть записана в виде

$$\varepsilon_C(S,t) = C(S,t) - c(S,t),$$

где $C(S,t)$ – стоимость американского опциона колл; $c(S,t)$, как и выше, – стоимость европейского опциона колл на акцию. Если считать, что и функция $C(S,t)$, и функция, $c(S,t)$ являются решениями уравнения с частными производными

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{ss} - rV + (r-q)SV_S - V_t = 0,$$

где в качестве $V(S,t)$ берется либо $C(S,t)$, либо $c(S,t)$, то и функция $\varepsilon_C(S,t)$ является решением того же уравнения.

Пусть $M = \dfrac{2r}{\sigma^2}$ и $N = (2(r-q))/\sigma^2$.

В работе [Barone-Adesi, Whaley, 1987] выведена следующая приближенная формула для $C(S,t)$. Пусть $K(t) = 1 - e^{-rt}$,

$$q_2 = \frac{\left[-(N-1) + \sqrt{(N-1)^2 + 4M/K}\right]}{2}.$$

Тогда можно принять

$$C(S,t) = c(S,t) + Ka_2 S^{q_2}.$$

Для поиска значения a_2 нужно найти такое значение S^*, в котором исполнение опциона будет оптимальным решением. В работе [Barone-Adesi, Whaley, 1987] показано, что для нахождения S^* может быть использовано уравнение

$$S^* - X = c\left(S^*, t\right) + \left(1 - e^{-qt} N\left(d_1\left(S^*\right)\right)\right) S^* / q_2.$$

Для решения данного уравнения используется итеративный процесс. Введем обозначения для левой и правой частей уравнения на *i*-ом шаге алгоритма:

$$LHS\left(S_i\right) = S_i - X;$$

$$RHS\left(S_i\right) = c\left(S_i, t\right) + \left(1 - e^{-qt} N\left(d_1\left(S_i\right)\right)\right) S_i / q_2.$$

Алгоритм завершается, когда разница между $LHS\left(S_i\right)$ и $RHS\left(S_i\right)$ меньше заданной величины, которая в данной работе равна 0,001.

Если разница на *i*-ом шаге превосходит эту величину, вычисляется значение S для следующей итерации. Для этого выполняется поиск точки, в которой прямая, соединяющая S_i и S_{i-1}, пересекается с осью абсцисс. Это значение находится методом секущих:

$$S_{i+1} = S_i - \frac{\left(LHS\left(S_i\right) - RHS\left(S_i\right)\right)\left(S_i - S_{i-1}\right)}{LHS\left(S_i\right) - LHS\left(S_{i-1}\right) - \left(RHS\left(S_i\right) - RHS\left(S_{i-1}\right)\right)}.$$

Тогда a_2 определяется из уравнения

$$1 = e^{-qt} N\left(d_1\left(S^*\right)\right) + K q_2 a_2 S^{*q_2 - 1}.$$

Стоимость американского опциона может быть принята равной

$$C\left(S, t\right) = c\left(S, t\right) + A_2 \left(\frac{S}{S^*}\right)^{q_2}, \text{ когда } S < S^*,$$

$$C\left(S, t\right) = S - X, \text{ когда } S \geq S^*,$$

где $A_2 = \left(S^* / q_2\right)\left(1 - e^{-qt} N\left(d_1\left(S^*\right)\right)\right)$.

При использовании нечетких аргументов формула цены опциона будет иметь следующий вид:

$$C\left(\tilde{S}, T, X, \tilde{r}, \tilde{\sigma}, \tilde{q}\right) = c\left(\tilde{S}, T, X, \tilde{r}, \tilde{\sigma}, \tilde{q}\right) \oplus \tilde{A}_2 \left(\frac{\tilde{S}}{\tilde{S}^*}\right)^{q_2}, \text{ когда } \tilde{S}_1^L < S^*,$$

$$C\left(\tilde{S}, T, X, \tilde{r}, \tilde{\sigma}, \tilde{q}\right) = \tilde{S} - X, \text{ когда } S_1^L \geq S^*,$$

где

$$\left(\tilde{A}_2\right)_\eta^L = inf\left(\left(\frac{\tilde{S}^*}{q_2}\right)\left\{1 - e^{-qt} N\left(d_1(S^*)\right)\right\}\right);$$

$$\left(\tilde{A}_2\right)_\eta^U = sup\left(\left(\frac{\tilde{S}^*}{q_2}\right)\left\{1-e^{-qt}N\left(d_1(S^*)\right)\right\}\right).$$

Заметим, что $\tilde{S}_1^L = \tilde{S}_1^U$, поскольку $\tilde{S}$ – треугольное нечеткое число. Также $\tilde{\sigma}_1^L = \tilde{\sigma}_1^U$, $\tilde{r}_1^L = \tilde{r}_1^U$, $\tilde{q}_1^L = \tilde{q}_1^U$. При расчете S^* в качестве S,σ,r,q используются $\tilde{S}_1^L,\sigma_1^L,r_1^L,q_1^L$. Это обеспечивает то, что $\tilde{C}_1^L$ совпадает с ценой американского опциона при четких значениях аргументов.

4. Результаты расчетов

Рассмотрим европейский колл опцион со страйком 100, сроком исполнения $T=3$. Текущая стоимость акции около 100, волатильность около 20%, безрисковая ставка и дивидендная доходность – нечеткие числа с центром в точке 8%. Допустим, что все четыре величины заданы треугольными нечеткими числами. $\tilde{r}=(0,06;0,08;0,10)$, $\tilde{q}=(0,06;0,08;0,10)$ и $\tilde{\sigma}=(0,15;0,20;0,25)$. В первом расчете $\tilde{S}=(90,100,110)$, во втором расчете $\tilde{S}=(90,100,150)$.

При этих данных получено $S^*=153,6$.

Результаты первого расчета.

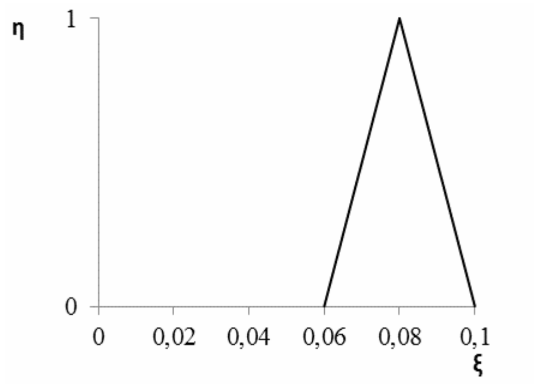

Рис. 4. Безрисковая ставка

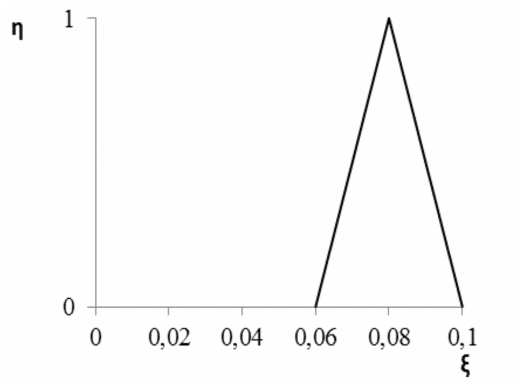

Рис. 5. Дивидендная доходность

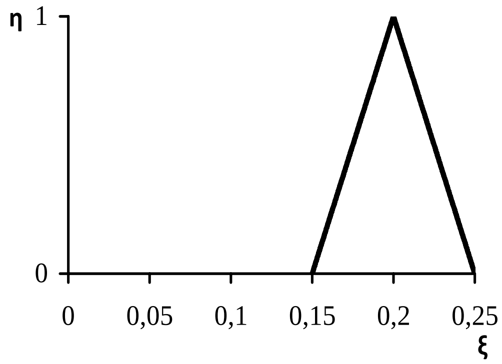

Рис. 6. Волатильность

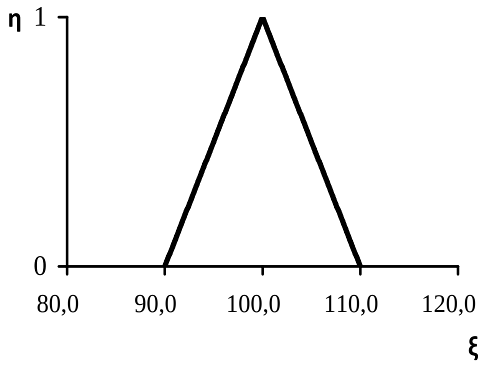

Рис. 7. Цена базового актива

Тогда нечеткие цены европейского и американского опционов будет иметь вид:

Рис. 8. Нечеткие числа, представляющие цены европейского и американского опционов (первый расчет)

Значения при $\eta = 0 : \tilde{c}_0^L = 2{,}06,\ c_0^U = 24{,}51,\ \tilde{C}_1^L = 3{,}26,\ C_1^U = 26{,}53.$

Результаты второго расчета.

Проанализируем влияние асимметрии на форму нечеткой цены опциона. Для этого положим асимметричной начальную цену акции, оставив остальные параметры без изменений.

Цены американских опционов имеют следующий вид.

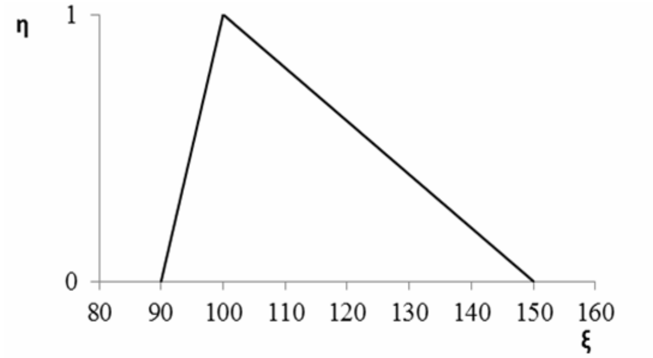

Рис. 9. Цена базового актива

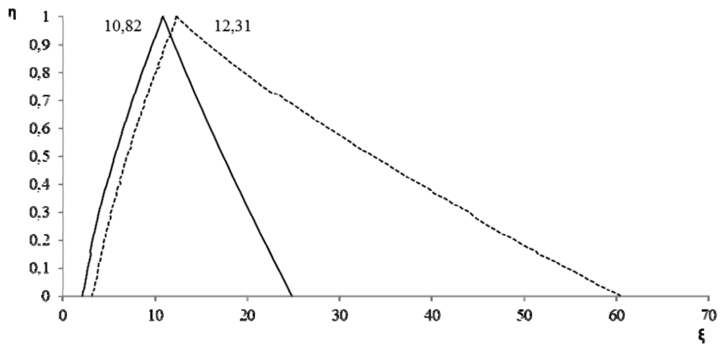

Рис. 10. Нечеткие числа, представляющие цены европейского и американского опционов (второй расчет)

Значения при $\eta = 0: \tilde{c}_0^L = 2{,}06,\ c_0^U = 54{,}45,\ \tilde{C}_1^L = 3{,}21,\ C_1^U = 60{,}44.$

При сравнении рис. 8 и 10 видно, как изменяются цены европейского и американского опционов при появлении асимметрии базовой цены актива. Рассматриваемый случай отражает картину, когда более высокое значение базового актива достовернее, чем более низкое. В этом случае цены колл опционов смещены в сторону больших значений сильнее, чем цена базового актива.

Еще один интересный вывод, который можно сделать, говорит, что все найденные цены опционов не являются треугольными нечеткими числами, хотя для задания входных параметров используются треугольные нечеткие числа.

5. Заключение

В настоящее время предложено несколько расчетных схем для включения нечетких значений аргументов в аналитические формулы для безарбитражных цен европейских опционов. В данной работе предлагается модификация одной из таких расчетных схем, по сути, упрощение.

Проводятся расчеты безарбитражных цен не только европейских, но и американских опционов при нечетких значениях аргументов. Изучается влияние асимметрии в базовой цене актива на цены опционов.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Barone-Adesi G., *Whaley R.E.* Efficient Analytic Approximation of American Option Values // The Journal of Finance. 1987. 13. P. 301–320.

Capotortia A., Figà-Talamanca G. On an Implicit Assessment of Fuzzy Volatility in the Black and Scholes Environment // Fuzzy Sets and Systems. 2013. 223. P. 59–71.

Chrysafis A., Papadopoulos K. On Theoretical Pricing of Options with Fuzzy Estimators // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009. 223. P. 552–566.

Guerra M.L., Sorini L., Stefanini L. Option Price Sensitivities through Fuzzy Numbers // Computers and Mathematics with Applications. 2011. 61. P. 515–526.

Liu B. Theory and Practice of Uncertain Programming. Physica-Verlag Heidelberg, 2002.

Shvedov A.S. On Fuzzy Random Variables: Working Paper WP2/2013/02. Moscow: Publishing House of the Higher School of Economics, 2013.

Thiagarajah K., Thavaneswaran A. Fuzzy Random-coefficient Volatility Models with Financial Applications // The Journal of Risk Finance. 2006. 7. P. 503–524.

Wu H.-C. European Option Pricing under Fuzzy Environments // International Journal of Intelligent Systems. 2005. 20. P. 89–102.

Wu H.-C. Pricing European Options Based on the Fuzzy Pattern of Black-Scholes Formula // Computers & Operators Research. 2004. 31. P. 1069–1081.

Zhang W.-G., Shi Q.-S., Xiao W.-L. Fuzzy Pricing of American Options on Stocks with Known Dividends and its Algorithm // International Journal of Intelligent Systems. 2011. 26. P. 169–185.

Zmeskal Z. Application of the Fuzzy-stochastic Methodology to Appraising the Firm Value as a European Call Option // European Journal of Operational Research. 2001. 135. P. 303–310.

Автор благодарен анонимному рецензенту за указание работы [Zhang, Shi, Xiao, 2011].

Application of Fuzzy Numbers Theory in Option Pricing

Lis Alexander

National Research University Higher School of Economics,
20, Myasnitskaya str., Moscow, 101000, Russian Federation.
E-mail: lis-alexandr@rambler.ru

There is no accurate answer for the question, which method of modeling of uncertainty is preferable: random or fuzzy. Today both of these approaches are highly popular. Fuzzy and probabilistic approaches are commonly used for modeling of uncertainty.

Fuzzy numbers can be used for modeling vagueness of parameters, such as risk-free rate or volatility in option pricing. Under these assumptions, option value depends on believe degree and turns to fuzzy number. In this paper the Black – Scholes formula and it's modification for American option arbitrage-free value are used. Fuzzy representations of underlying asset price, volatility of asset price and risk-free rate are used as parameters. There is set of papers regarding fuzzy approach for European option pricing. In this paper fuzzy approach is used for arbitrage-free American option pricing for the first time. The fuzzy American call value is compared with fuzzy European option value.

***Key words*:** fuzzy sets; fuzzy numbers; american options pricing.

JEL Classification: G13, C14.

* *
*

References

Barone-Adesi G., Whaley R.E. (1987) Efficient Analytic Approximation of American Option Values. *The Journal of Finance*, 13, pp. 301–320.

Capotortia A., Figà-Talamanca G. (2013) On an Implicit Assessment of Fuzzy Volatility in the Black and Scholes Environment. *Fuzzy Sets and Systems*, 223, pp. 59–71.

Chrysafis A., Papadopoulos K. (2009) On Theoretical Pricing of Options with Fuzzy Estimators. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223, pp. 552–566.

Guerra M.L., Sorini L., Stefanini L. (2011) Option Price Sensitivities through Fuzzy Numbers. *Computers and Mathematics with Applications*, 61, pp. 515–526.

Liu B. (2002) *Theory and Practice of Uncertain Programming*. Physica-Verlag Heidelberg.

Shvedov A.S. (2013) *On Fuzzy Random Variables*. Working Paper WP2/2013/02. Moscow: Publishing House of the Higher School of Economics.

Thiagarajah K., Thavaneswaran A. (2006) Fuzzy Random-coefficient Volatility Models with Financial Applications. *The Journal of Risk Finance*, 7, pp. 503–524.

Wu H.-C. (2005) European Option Pricing under Fuzzy Environments. *International Journal of Intelligent Systems*, 20, pp. 89–102.

Wu H.-C. (2004) Pricing European Options Based on the Fuzzy Pattern of Black-Scholes Formula. *Computers & Operators Research*, 31, pp. 1069–1081.

Zhang W.-G., Shi Q.-S., Xiao W.-L. (2011) Fuzzy Pricing of American Options on Stocks with Known Dividends and its Algorithm. *International Journal of Intelligent Systems*, 26, pp. 169–185.

Zmeskal Z. (2001) Application of the Fuzzy-stochastic Methodology to Appraising the Firm Value as a European Call Option. *European Journal of Operational Research*, 135, pp. 303–310.