

Экономический журнал ВШЭ. 2015. Т. 19. № 4. С. 640–669.
HSE Economic Journal, 2015, vol. 19, no 4, pp. 640–669.

Стабильность распределения банков как аргумент в пользу концепции агрегированного агента¹

Малахов Д.И., Пильник Н.П., Радионов С.А.

Вопрос о применении концепции агрегированных и репрезентативных агентов в современной экономической науке стоит достаточно остро. В теоретической модели [Малахов, Поспелов, 2014] показано, что распределение банков по долям активов является стабильным во времени. Если этот вывод выполняется на практике, то это будет еще одним свидетельством в пользу использования концепции агрегированных агентов при моделировании банковского сектора, что в свою очередь является актуальной темой для исследователей макроэкономики. В данной работе мы выполняем эмпирическую проверку этого результата на примере банков России. Помимо активов в работе исследуются и другие ключевые показатели деятельности банков, такие как депозиты домохозяйств, кредиты фирм и т.д., так как стабильность распределений долей этих показателей также может выступить дополнительным аргументом для использования концепции агрегированного агента. Цель данной работы – подбор оптимальной формы распределения российских банков по долям ключевых показателей и проверка стабильности этой функциональной формы во времени. Актуальность данной работы также подтверждается происходящими изменениями в экономике России и банковской отрасли в частности.

Мы показываем, что, используя обобщенные варианты известных распределений, можно достаточно точно описать распределение российских банков по указанным показателям оборотной ведомости. В частности, распределение Парето IV типа и асимметричное обобщенное распределение ошибок дают крайне высокую точность аппроксимации, причем полученные результаты верны для всех рассматриваемых показателей. Подобранные функциональные формы распределений являются устойчивыми как во вре-

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00432).

Малахов Дмитрий Игоревич – аспирант, преподаватель, факультет экономических наук НИУ ВШЭ. E-mail: d.malakhov@gmail.com

Пильник Николай Петрович – к.э.н., доцент, факультет экономических наук НИУ ВШЭ. E-mail: u4d@yandex.ru

Радионов Станислав Андреевич – аспирант, преподаватель, факультет экономических наук, НИУ ВШЭ. E-mail: sradionov@hse.ru

Статья получена: май 2015 г./Статья принята: октябрь 2015 г.

менном, так и в кросс-секционном измерении. При этом, отдельные банки могут перемещаться по распределению, хотя сама функциональная форма распределения является стабильной. Таким образом, можно говорить не о распределении конкретных банков, а о распределении, описывающем всю российскую банковскую систему.

Оценки параметров подобранных распределений для долей активов имеют слабо выраженную динамику, которая потенциально может быть связана со структурными изменениями в банковской системе России. Тест Колмогорова – Смирнова показал, что только при разнице в восемь месяцев и более распределения долей активов отличаются на пятипроцентном уровне значимости. Таким образом, можно утверждать, что модель [Малахов, Поспелов, 2014] в целом проходит эмпирическую проверку.

Ключевые слова: агрегированный агент; банк; банковская отрасль; распределение размеров фирм; динамика отрасли; оборотная ведомость.

Введение

В работе [Малахов, Поспелов, 2014] рассматривается модель банковской системы, в которой предполагается, что существует достаточно много банков и вкладчиков, деньги появляются благодаря займам извне системы и кредитной эмиссии, а прибыль и убытки банков выводятся или погашаются. При таких предпосылках получается, что при некоторых сочетаниях параметров распределение банков по долям активов² стабильно во времени. Этот факт в рамках модели описывает взаимосвязь состояния отдельных банков и развития всей банковской системы, по-своему поднимая вопрос о необходимости использования микрообоснованных моделей для описания банковской системы (о способах моделирования банковского сектора как единого агента подробнее см.: [Андреев, Пильник, Поспелов, 2009]).

Микрообоснованные макроэкономические модели стали активно использоваться после критики Лукаса [Lucas, 1976], поскольку было показано, что в основном лишь модели, построенные на принципе восхождения от микроуровня к макроуровню, потенциально могут адекватно реагировать на структурные изменения, так как в большинстве случаев агрегированные модели не могут полностью учитывать гетерогенность агентов и «глубинные параметры». Модели, использующие принцип репрезентативного агента, также могут давать неверный вывод, если агенты на самом деле гетерогенны [Chang, Kim, Schorfheide, 2013].

В последнее время в исследованиях, посвященных моделированию банковского сектора в DSGE-моделях (данный класс работ стал активно развиваться после последнего финансового кризиса, см., например: [Gertler, Kiyotaki, 2010; Gertler, Kiyotaki, 2009]), также используется микрообоснованный подход. После моделирования микроуровня проводится процедура агрегирования микроагентов, такая процедура позволяет прогнозировать макроэкономические переменные, которые могут быть интересны в контексте по-

² Под долей активов подразумевается объем активов конкретного банка, деленный на совокупный объем активов всех банков в конкретный момент времени.

строения экономической политики. Также, отчасти как реакция на повсеместное использование концепций репрезентативных агентов и агрегированных агентов, возник класс agent-based моделей, которые предполагают, что агенты могут быть гетерогенными и вести себя нерационально [Borshchev, Filippov, 2004; Farmer, Foley, 2009; Samanidou, Zschischang, Stauffer, Lux, 2007].

При этом близость предпосылок модели к реальности не всегда положительно отражается на предсказательной и объясняющей силе вследствие значительного усложнения модели и неоднозначности способа учета гетерогенности, ведь если микроуровень построен не совсем корректно, то, скорей всего, прогноз макропеременных также будет некорректным. Поэтому возникает вопрос о необходимости применения микробоснованных моделей, в том числе при моделировании банковской системы.

В данной работе мы сконцентрируем внимание на проверке результата из работы [Малахов, Поспелов, 2014]. Поскольку в этой модели не вводятся предпосылки о гомогенности агентов, то устойчивость распределения долей активов банков во времени будет еще одним свидетельством в пользу того, что банковскую систему можно достаточно точно описывать с помощью концепции агрегированного агента. Ведь если агенты гетерогенны и их агрегация нетривиальна (например, необходимо использовать специальные индивидуальные веса для микропеременных или какую-то иную специфическую процедуру агрегации, как, скажем, при моделировании фирм в [Gertler, Karadi, 2011]), то можно ожидать, что распределение может сильно меняться со временем, либо, например, быть мультимодальным. При этом качество подгонки параметрическими функциями распределения может быть крайне низка. Кроме того, мы проверим и стабильность распределения долей других ключевых показателей деятельности банков, таких как депозиты домохозяйств, кредиты фирм, межбанковские кредиты и т.д., так как стабильность распределения долей этих показателей также является дополнительным аргументом в пользу использования концепции агрегированного агента.

Тем не менее конкретная параметрическая форма распределения размеров банков тоже может представлять интерес (о подборе функции распределения доходов домохозяйств см.: [McDonald, 1984; Fishlow, 1972]). Более того, достаточно много внимания уделяется связи распределения домохозяйств по доходам и экономического роста страны (например, см.: [Galor, Zeira, 1987; Greenwood, Jovanovic, 1989]). Подбор определенной параметрической функциональной формы распределения помогает лучше понять свойства исследуемой случайной величины, предсказать ее динамику и точнее рассчитать индексы неравенства (подробнее см.: [Atkinson, Bourguignon, 2000; McDonald, 1984; Kleiber, Kotz, 2003]). Кроме того, качественно подобранное распределение может быть использовано для восстановления отсутствующих данных. Как показано в разделе 1.1, достаточно много работ (например: [Ericson, Pakes, 1995; Lotti, Santarelli, Vivarelli, 2003; Miao, 2005]) посвящено исследованию распределения размеров фирм, так как анализ динамики распределения позволяет понять принципы эволюции отрасли, ее структуру, точнее рассчитать степень монополизации, соответственно, учитывая увеличенное внимание к деятельности банковской системы после последнего финансового кризиса, данная тема исследования представляется актуальной.

Подводя итог сказанному выше, еще раз отметим, что объектом данного исследования является банковская система России, а предметом исследования – распределение банков российской банковской системы по ключевым агрегированным финансовым по-

казателям. Цель работы – подбор оптимальной формы распределения российских банков по долям ключевых агрегированных показателей и проверка стабильности этой функциональной формы во времени. Для этого предстоит решить следующие задачи: выбор подходящих семейств распределений, выбор критериев качества, оценка параметров этих распределений, анализ динамики этих оценок и проверка стабильности распределения банков во времени. Решение этих вопросов позволит получить новый инструмент анализа структуры отрасли и ее особенностей, пригодный, в том числе, для прогнозирования ее развития. Также полученный результат может быть использован в качестве базы для модификации блока банковского сектора в моделях общего равновесия.

Статья состоит из трех разделов. В первом разделе представлен обзор основных подходов к моделированию распределений экономических агентов. Отдельно рассматриваются основные приложения данного подхода, а также представлен обзор наиболее популярных теоретических распределений, которые будут использованы в работе. Второй раздел посвящен описанию данных. Наконец, третий раздел содержит результаты подбора функциональной формы и оценки ее параметров. В этом же разделе приводятся основные содержательные выводы.

1. Подходы к моделированию распределений экономических агентов

1.1. Экономические приложения моделирования распределений некоторых случайных величин

Исследование эволюции в биологии, как и истории в общественных науках, позволяет выявить причины наблюдаемых явлений, помогает провести классификацию изучаемых объектов и сделать прогноз развития анализируемых систем. В экономике эволюция отрасли в основном изучается с точки зрения динамики размеров компаний. Классической работой, посвященной проблеме развития и роста компаний, является исследование [Gibrat, 1931]. Идея, предложенная в работе, заключается в том, что размер фирмы и темп ее роста не связаны (т.е. большие и малые фирмы, в среднем, растут с одинаковым темпом). Современные исследователи достаточно обширно развили данную тему, предложив многочисленные эмпирические проверки закона Жибра. Результаты тестирования закона неоднозначны: фирмы в каких-то отраслях растут независимо от своего размера, а в каких-то такой закономерности не наблюдается [Javonovich, 1982].

В работе [Lotti, Santarelli, Vivarelli, 2003] проводится эмпирическая проверка закона Жибра на данных по молодым малым фирмам. Авторы постулируют, что существует три подхода к эмпирической проверке данного закона. Первая версия заключается в том, что закон Жибра верен для всех фирм отрасли, независимо от того, закрылись они в период наблюдения или нет. Вторая версия заключается в том, что закон Жибра верен только для тех фирм, которые были живы в течение всего периода наблюдения. Третья версия данного закона заключается в том, что он выполняется лишь для тех фирм, которые являются достаточно большими и развитыми, чтобы преодолеть критический размер для отрасли (*minimum efficient scale*). Авторы приводят достаточно обширный обзор литературы, актуальный на тот период (2003 г.). В этой статье авторы рассмотрели 16 наиболее значимых работ по данной тематике и отметили, что практически во всех из них был сделан вывод, что малые фирмы растут быстрее, чем большие.

Многие исследователи также отмечают, что возраст фирм и структурные изменения оказывают значительное влияние на результаты тестов. Например, используя данные о португальских фирмах, в статье [Cabral, Mata, 2003] анализируется распределение размера фирм. Показано, что для фирм, которые публично предоставляют отчетность, функция распределения размера ближе к логнормальной, чем у генеральной совокупности фирм. Данный результат был получен на основе непараметрического подхода к анализу данных. Это можно объяснить тем, что фирмы, которые публично раскрывают отчетность, зачастую большие по размеру, к тому же малые фирмы чаще прекращают свое существование, нежели большие. Также авторы показали, что если анализировать более «возрастные» фирмы, то распределение их размеров гораздо ближе к логнормальному, чем у более «молодых» фирм: у распределения совсем «молодых» фирм есть толстый правый хвост, который со временем становится меньше (из-за толстого хвоста многие исследователи используют распределение Парето). Авторы также отмечают, что со временем распределение размеров фирм по всей отрасли смещается к логнормальному. Для описания функции распределения «молодых» фирм авторы использовали обобщенное гамма-распределение. Исследователи также рассматривают модель, которая учитывает финансовые ограничения фирм. Благодаря этим ограничениям распределение более «возрастных» фирм получается симметричным и, как предполагают авторы, логнормальным.

Возможность использования при моделировании распределения фирм внутри отрасли распределения Парето опирается на так называемый закон Ципфа³. Он постулирует (см.: [Kechedzhi, Usatenko, Yampolskii, 2005]), что если упорядочить все исследуемые объекты по убыванию частоты их появления, то частота n -го объекта окажется приблизительно обратной его порядковому номеру (рангу) в получившемся списке. То есть, например, второй объект в ранжированном списке встречается примерно в два раза реже, чем первый. Закон Ципфа также часто используется в моделях распределения размеров фирм или финансовых организаций. Дело в том, что зачастую в таком типе распределений возникает толстый правый хвост, который плохо описывается более стандартными распределениями, например, логнормальным. Толстые хвосты в распределении означают, что редкие события (например, значительные потери при изменении стоимости портфеля ценных бумаг) происходят на самом деле чаще, чем это предполагается привычной моделью суммирования независимых величин. Часто экстремальные события происходят вследствие накопления какого-либо эффекта, например, из-за положительной обратной связи.

Другой класс работ рассматривает динамику отрасли с точки зрения теоретико-игрового подхода к анализу конкуренции, принятию инвестиционных решений и входа/выхода фирм с рынка [Ericson, Pakes, 1995; Miao, 2005]. Во второй работе показано, что распределение размеров фирм может зависеть от разных показателей и во многом определяется структурой отрасли.

Другим из наиболее популярных способов описания эволюции отраслей является модель, предложенная Саттоном [Sutton, 2003]. Данная модель объясняет развитие отраслей в терминах динамики размеров фирм и их количества, опять же основываясь на теоретико-игровом подходе. Кроме того, эта модель действительно проходит многие эмпирические тесты.

³ В другой транскрипции – закон Зифа.

Банковская отрасль, как одна из важных отраслей экономики, естественно, не была обделена вниманием исследователей. Однако темы по эволюции банковской отрасли, а также распределению банков по размеру, исследованы меньше, чем аналогичные темы для коммерческих нефинансовых организаций. Это можно объяснить некоторой преемственностью в проблематике статей – модели такого типа были изначально созданы для фирм реального сектора (яркий пример – закон Жибра), при этом количество отраслей реального сектора достаточно высоко.

На данный момент времени существуют две группы работ, посвященных анализу банковской отрасли с точки зрения экономической теории. Первая группа работ посвящена исследованию эффекта банковского мультипликатора (см.: [Bernanke, Blinder, 1988; Bernanke, Gertler, 1995; Romer, Romer, 1989]). Однако в данном типе работ уделяется мало внимания структуре банковской отрасли, в основном банки рассматриваются как финансовые посредники, некий передаточный механизм в моделях общего равновесия.

Второй тип моделей появился не так давно. В данных работах рассматривается банковская отрасль в точки зрения взаимосвязи структуры и ее устойчивости (см.: [Acemoglu, Ozdaglar, Tahbaz-Salehi, 2015; Billio, Getmansky, Lo, Pelizzon, 2012; Iori, De Masi, Precup, Gabbi, Caldarelli, 2008]). Интерес к данным работам во многом спровоцирован причинами последнего финансового кризиса, который ясно показал, что банковская система также может быть источником нестабильности.

Интерес исследователей был также связан с распределением размеров банков. Например, в работе [Prescott, Janicki, 2006] исследуются данные по американским банкам за 1960–2005 гг. Авторы отмечают, что как логнормальное, так и Парето-распределение неплохо описывают данные, но зачастую правый хвост распределения для размеров банков является «толстым», поэтому исследователи используют логнормальное распределение в качестве основного, а правый хвост моделируют с помощью распределения Парето. Получается, что закон Жибра выполняется для данной отрасли экономики. Также на основе анализа марковских цепей авторы проверяют стационарность эмпирического распределения банков. Исследователи строят матрицы переходов для банков, в качестве состояний рассматриваются типичные значения размеров банков. В результате, основываясь на свойствах этой цепи, было показано, что распределение размеров банков стационарно.

В российской экономической науке тема эволюции банковской отрасли не является неизученной, однако работ по данной тематике все-таки не так много. Стоит отметить статью [Андреев, Пильник, Поспелов, 2009], в которой авторы получили, что ранговое распределение банков хорошо описывается законом Парето. Более того, можно утверждать, что данное распределение является стабильным в течение всего периода наблюдения (с 2004 г. по 2008 г.).

В работе [Леонидов, Румянцев, 2013] на основе данных по межбанковскому кредитованию в российской банковской системе показано, что правый хвост распределения банков по количеству контрагентов (кредиторов и заемщиков на рынке МБК) действительно возможно описывать распределением Парето. Для этого используются обычные линейные регрессии на данных в двойной логарифмической шкале (поскольку любое степенное распределение в данном случае выглядит как прямая, имеющая отрицательный наклон).

1.2. Используемые теоретические распределения

В данной статье мы будем опираться на две работы [Kleiber, Kotz, 2003; McDonald, 1984] в качестве отправной точки для выбора потенциальных распределений. Считается, что случайная величина X имеет степенное распределение, если функция плотности задается следующим образом: $f(x) \sim x^{-(1+\alpha_0)}$, где α_0 – параметр. Часто в качестве степенного распределения используют *распределение Парето* (в таблицах и на графиках далее мы будем использовать обозначение *Pareto*):

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (x/x_0)^{-\alpha} & \text{при } x > x_0, \\ 0 & \text{при } x < x_0. \end{cases}$$

Достаточно большое внимание уделяют значению параметра α . Если $\alpha < 1$, то тогда больший вклад в выборочное среднее вносят большие элементы выборки. Если же $\alpha > 1$, то тогда больший вклад и в сумму, и в выборочное среднее вносят маленькие элементы выборки. Кроме того, распределение Парето часто используется для проверки закона Ципфа и наличия положительной обратной связи, так как оно позволяет определить толщину хвостов на основе значения оценки параметра α .

С другой стороны, если для отрасли выполняется закон Жибра, то, как показано в работе [Gibrat, 1931], размеры фирм имеют *логнормальное распределение*. Этот факт позволяет при поиске и интерпретации полученных закономерностей опираться на Центральную предельную теорему, записанную для логарифмов исследуемых показателей. Поэтому качество логнормальной аппроксимации также представляет большой интерес. Заметим, что нормальное распределение в таблицах и графиках везде далее будет обозначаться *Normal*. Таким образом, логнормальное⁴ и распределение Парето являются базовыми распределениями для анализа подобных данных.

И для логнормального и для Парето распределений к настоящему времени предложено значительное количество обобщений. Использование обобщенных распределений зачастую оправдано существенным повышением точности калибровки функции распределения. Однако при использовании обобщенных распределений возникает множество проблем с получением стабильных и точных оценок параметров. В нашем случае в пользу стабильности и точности сработало большое количество имеющихся однородных данных. Далее рассмотрим наиболее популярные распределения из семейства Парето-распределений и семейства нормальных и схожих с ним распределений.

1.2.1. Семейство Парето-распределений

Обобщенное распределение Парето (Gen. Pareto) имеет три параметра – сдвиг, масштаб и форму. Благодаря третьему параметру, параметру формы, данное распределение является более гибким, чем обычное распределение Парето:

⁴ В данной работе мы применяли аппроксимацию нормальных распределений для логарифмов данных, что тождественно использованию логнормальных распределений.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi z)^{-1/\xi} & \text{при } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-z} & \text{при } \xi = 0, \end{cases}$$

где $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$; μ – параметр сдвига; σ – параметр масштаба; ξ – параметр формы.

Wakeby distribution (Wakeby) – следующий уровень обобщения Парето-распределения, которое включает в себя в качестве частных случаев обычное Парето-распределение, экспоненциальное распределение и равномерное распределение. Функция распределения в силу вычислительных трудностей задается через функцию квантилей, которая выглядит следующим образом:

$$x(U) = \xi + \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - (1 - U)^\beta\right) - \frac{\gamma}{\delta} \left(1 - (1 - U)\right)^{-\delta},$$

где U – равномерная величина на отрезке $[0,1]$; ξ – параметр сдвига; α, β – параметры масштаба, γ, δ – параметры формы.

Wakeby-распределение в силу своей гибкой функциональной формы используется для моделирования финансовых данных [Negrea, 2014].

Также набирает популярность так называемое Парето четвертого типа или **Парето IV распределение (Pareto IV)**. Существует целое семейство разных типов Парето-распределений и Парето IV является самым общим из них:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{-\alpha} & \text{при } x > \mu, \\ 0 & \text{при } x \leq \mu, \end{cases}$$

где μ – параметр сдвига; σ – параметр масштаба; γ – параметр формы/неравенства; α – параметр хвоста.

Заметим, что параметр μ определяет положение (сдвиг) распределения и оказывает влияние на математическое ожидание, влияя на толщину хвоста. Параметр σ позволяет растянуть распределение вдоль горизонтальной оси, параметр γ во многом определяет значение коэффициента Джини для этого распределения, а последний параметр задает толщину хвоста. Парето IV типа достаточно часто используется для анализа распределений фирм по размерам, ярким примером является работа [Crosato, Ganugi, 2007]. Стоит отметить, что Парето IV никак не связано с обобщенным Парето-распределением.

Обобщенное бета-распределение второго типа (также называемое beta prime distribution или **VPD**) является в какой-то степени обобщением Парето IV типа. Функция плотности для этого распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{\alpha \left(\frac{x}{b}\right)^{\alpha p - 1}}{b \cdot B(p, q) \cdot \left(1 + \left(\frac{x}{b}\right)^\alpha\right)^{p+q}}, \quad x \in (0, +\infty),$$

где α, p, q – параметры формы; b – параметр масштаба; $B(p, q)$ – бета-функция.

Такое распределение используется для моделирования доходов населения, а также в финансовом анализе (подробнее см.: [Sepanski, Kong, 2014]).

1.2.2. Семейство нормальных и связанных с ним распределений

Стоит сразу сказать, что не все приведенные ниже распределения напрямую связаны с нормальным распределением, однако для упрощения будем считать, что в силу схожести функций плотности их можно объединить в одну группу.

Обобщенное нормальное распределение (Gen. Normal) имеет функцию распределения:

$$F(x) = 1 - \exp(-y), \quad \text{где } y = \begin{cases} -\frac{1}{\kappa} \log \left[1 - \frac{\kappa(x - \xi)}{\alpha} \right], & \text{если } \kappa \neq 0, \\ \frac{(x - \xi)}{\alpha}, & \text{если } \kappa = 0, \end{cases}$$

а ξ, α, κ – параметры сдвига, масштаба и формы соответственно. Благодаря наличию трех параметров данное распределение является гораздо более гибким, чем обычное нормальное распределение. Более того, данный тип распределения является в общем случае асимметричным, что может быть полезно при моделировании размеров фирм.

Ассиметричное нормальное распределение (Skew Normal) имеет функцию плотности

$$f(x) = \frac{1}{\omega\pi} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\omega^2}} \alpha \left(\frac{x-\xi}{\omega}\right) \int_{-\infty}^{\frac{x-\xi}{\omega}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где ξ, ω, α – параметры сдвига, масштаба и формы соответственно. Однако при вычислении функции плотности считается интеграл, который приближается численно, поэтому зачастую точность и стабильность оценок этого распределения не слишком высока.

Также используется **ассиметричное обобщенное распределение ошибок** (generalized error distribution или asymmetric exponential power, далее – АЕР) с функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2} \gamma\left(\left[\frac{\xi - x}{\alpha\kappa}\right]^h, \frac{1}{h}\right), & x < \xi, \\ 1 - \frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2} \gamma\left(\left[\frac{\xi - x}{\alpha\kappa}\right]^h, \frac{1}{h}\right), & x \geq \xi, \end{cases}$$

где $\gamma(Z, a) = \frac{\int_0^Z y^{a-1} \cdot \exp(-y) dy}{\Gamma(a)}$; $\Gamma(a)$ – неполная (incomplete) гамма-функция; ξ – параметр сдвига; α – параметр масштаба; κ, h – параметры формы.

Ассиметричное обобщенное распределение ошибок было разработано как ассиметричное обобщение exponential power distribution, которое в свою очередь обобщает обычное нормальное распределение с добавлением параметра, отвечающего за эксцесс распределения. Также стоит отметить, что ассиметричное обобщенное распределение ошибок обладает максимальной энтропией в достаточно большом классе распределений [Zhu, Zinde-Walsh, 2009]. Благодаря достаточно общему виду функции распределения коэффициент ассиметрии может быть разным для левого и правого хвоста. Более того, оно включает в себя множество других распределений как частные случаи. Хвосты данного распределения более толстые, чем у обычного нормального распределения, и они могут иметь разную толщину. В работе [Buldyrev, Growiec, Pammolli, Riccaboni, Stanley, 2007] ассиметричное обобщенное распределение ошибок используется для моделирования размеров фирм.

Обобщенное лямбда-распределение (Gen. Lambda) также используется в данной работе. Функция квантилей задается следующим образом:

$$x(U) = \xi + \alpha \left(U^\kappa - (1-U)^h \right),$$

где U – равномерная величина на отрезке $[0,1]$; ξ – параметр сдвига; α – параметр масштаба; κ, h – параметры формы.

Обобщенное лямбда-распределение применяется, например, для моделирования финансовых данных с толстыми (powerlaw) хвостами, кроме того, оно является ассиметричным. В работе [Veena, Kumaran, 2010] обобщенное лямбда-распределение используется для анализа неравномерности распределения доходов. Данное распределение было разработано для использования в Монте-Карло моделированиях, поэтому оно является крайне гибким, так как может аппроксимировать совершенно разные распределения с высокой точностью.

2. Описание данных

В качестве источника статистической информации для исследования использовались данные из 101-й формы банков. Форма 101 – это оборотная ведомость по счетам

бухгалтерского учета банков, из которой можно получить полную статистику о составе счетов второго порядка, в том числе о размере активов, пассивов, депозитов, кредитов и других финансовых показателей конкретного банка. В анализе участвовали только коммерческие банки, зарегистрированные в Российской Федерации и предоставляющие 101-ю форму Банку России (ЦБ). Данные о форме 101 собирались с официального сайта Банка России (<http://www.cbr.ru/>). В выборку попало примерно 97% банковской системы России, если брать в расчет количество банков, если же использовать совокупные активы банков, то в конечной выборке оказалось приблизительно 99% банковской системы, что говорит в пользу репрезентативности результатов.

Счета второго порядка представляют собой достаточно мелкие показатели, они являются относительно зашумленными и не всегда отображают реальное состояние банковской системы. Поэтому, чтобы проанализировать деятельность банковской системы, в данном случае удобнее оперировать агрегированными показателями, так как они позволяют получить более полное и корректное представление о состоянии банковской системы. В этой связи были выделены наиболее значимые агрегированные показатели, анализ которых позволяет получить достоверное представление о банковской системе.

В качестве исследуемых переменных было решено взять следующие:

- 1) совокупные балансовые активы банков;
- 2) срочные депозиты банков и кредитных организаций, включая овердрафт (здесь и в дальнейшем для обозначения всех агрегатов будут использоваться сокращения, в данном случае это Db);
- 3) срочные депозиты нерезидентов (Df);
- 4) срочные депозиты физлиц-резидентов (Dh);
- 5) срочные депозиты нефинансовых организаций-резидентов (Da);
- 6) срочные кредиты коммерческим небанковским организациям-резидентам, включая овердрафт (La);
- 7) срочные кредиты физлиц-резидентов (Lh);
- 8) срочные кредиты иностранным организациям (Lf).

Все упомянутые выше показатели формировались методом суммирования соответствующих по смыслу счетов 101-й формы. Выбор в пользу данных показателей был сделан также и потому, что они занимают значительную долю в совокупных активах (или пассивах) банков. Обработанные данные представляют собой таблицы, где по столбцам отложены поочередно все месяцы начиная с января 2004 г. и заканчивая февралем 2015 г., а по строкам – идентификационные номера банков. Данные доступны для каждого месяца в течение указанного периода.

Везде далее мы будем использовать в качестве объекта анализа величину долей банков по каждому из приведенных выше показателей в общей сумме этого показателя по всем банкам. Например, под долей банка в общих активах мы подразумеваем долю активов конкретного банка в совокупных активах банковской системы в конкретный месяц. Естественно, что разные банки имеют разные доли в разных показателях в разные моменты времени. Именно доли представляют наибольший интерес, так как, во-первых, для анализа абсолютных показателей в разные моменты времени необходимо ставить вопрос о сопоставимости их единиц измерения (дефлировании), а найти соответствующие дефляторы зачастую практически невозможно, во-вторых, именно доли, а не абсолютные показатели лучше отражают структуру отрасли и позволяют проводить сравне-

ния по разным показателям в течение одного месяца. Более того, из теоретической модели [Малахов, Поспелов, 2014] следует, что именно распределение долей активов является наиболее информативным инструментом описания динамики отрасли.

Общее количество банков в России менялось от месяца к месяцу, равно как и количество банков, предоставляющих информацию в Банк России, поэтому количество наблюдений по месяцам варьируется. Однако в целом наблюдается тенденция к увеличению количества наблюдаемых банков. Количество наблюдений в один и тот же месяц для разных показателей не всегда совпадает, однако в среднем в начальные периоды количество банков, которое предоставляло отчетность и имело ненулевые активы, составляло около 700, а в последние периоды – около 1100. Стоит отметить, что хотя мы и работаем только с теми банками, которые предоставили отчетность, но, тем не менее, наша выборка практически эквивалентна генеральной совокупности.

Заметим, что везде далее в расчетах используются в том числе данные и по таким крупным банкам, как Сбербанк и ВТБ. Кроме того, в отличие от большинства описанных выше работ мы воспроизводим все распределение, не игнорируя мелкие банки, образующие левый хвост распределений.

3. Моделирование распределений банков

Поскольку наша выборка достаточно однородна и велика, то в качестве основного инструмента ее анализа мы будем использовать эмпирическую функцию распределения, являющуюся состоятельной оценкой для истинной функции распределения. Отметим также, что все представленные вычисления были проделаны в пакете R⁵.

3.1. Логнормальное и Парето-распределения

Сначала проанализируем базовые распределения: Парето и логнормальное. Как упоминалось выше, чтобы критерии качества аппроксимации распределений не влияли на результаты оценивания, использовались метод максимального правдоподобия и метод L-моментов, как наиболее подходящие для оценивания нетривиальных распределений [Asquith, 2015; Hosking, 2015; Yee, Wild, 1996].

Качество подгонки обоих этих распределений для всех периодов наблюдения практически не меняется и при этом весьма типично для всех исследуемых переменных. Поэтому в качестве примера мы покажем график функции распределения лишь для одного месяца (мая 2012 г.) для долей активов банков. Общие активы представляют больший интерес еще и потому, что именно они являются наилучшей аппроксимацией размера банка. Часть самых правых точек (банков с наибольшим весом) при построении всех графиков для Парето и семейства Парето-распределений была усечена, чтобы не потерять наглядность. Никакого значительного влияния на результаты графического анализа добавление этих точек не окажет. Как правило, не были отображены первые три банка.

Как можно заметить из рис. 1, качество подгонки Парето-распределением очень низкое. Это можно объяснить крайне негибкой функциональной формой и слишком ма-

⁵ Компьютерный код может быть предоставлен по запросу читателя.

лым количеством параметров. Для подтверждения приведем график в двойной логарифмической оси (рис. 2). В этом случае ранговое распределение величины, распределенной по Парето, должно давать прямую линию с отрицательным наклоном. Мы же видим четкий изгиб в правой части графика, образованный наиболее мелкими банками. Естественно, что попытка приблизить представленную кривую прямой, характеризующей распределение Парето, заранее обречена. Заметим, что очень часто эту проблему решают за счет игнорирования правого хвоста и моделирования только средней части. Мы же в данной работе будем стремиться воспроизвести эмпирическую функцию распределения целиком. Аналогичная ситуация наблюдается и для других финансовых показателей в любые моменты времени.

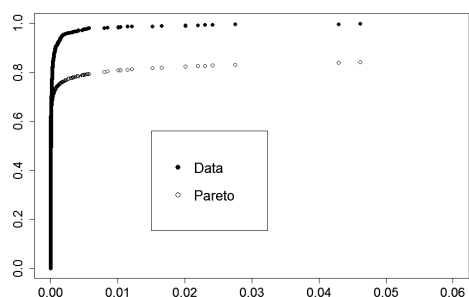


Рис. 1. Активы, Парето-распределение

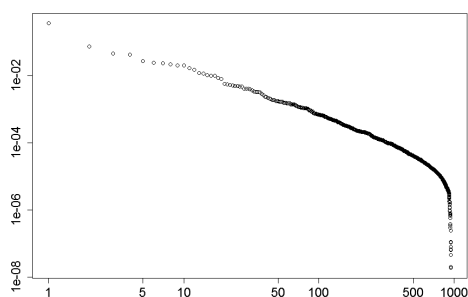


Рис. 2. Ранговое распределение активов в двойной логарифмической шкале

Теперь приблизим те же данные логнормальным распределением. На рис. 3 по оси абсцисс отложены логарифмы доли активов банка в общем объеме активов банковской системы. Как можно заметить, качество подгонки существенно лучше, но все-таки не слишком высокое. Явно выделяется резкое расхождение в районе левого хвоста (значения логарифма доли порядка -12) и общее смещение центральной части (значения логарифма доли порядка -8), связанное с необходимостью калибровки правого хвоста. В связи с этим действительно имеет смысл перейти к анализу остальных распределений. Анализ точности подгонки распределений будет дан в разделе 3.3.

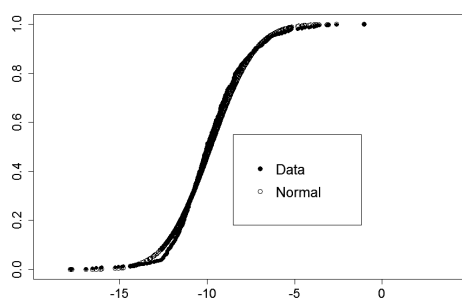


Рис. 3. Логарифм активов, нормальное распределение

3.2. Использование обобщенных распределений

Рассмотрим рисунки, на которых будут изображены данные и оцененное теоретическое распределение для четырех переменных: активы, срочные кредиты коммерческим небанковским организациям-резидентам (La), срочные депозиты банков и кредитных организаций (Db). Далее мы приведем графики только для одного месяца – мая 2012 г., поскольку закономерности для остальных месяцев аналогичны. Для остальных финансовых показателей наблюдается схожая картина.

При построении графиков было решено убрать *обобщенное бета-распределение второго типа* из рассмотрения, так как его подгонка практически неотличима от подгонки Парето IV, а дополнительная линия усложнит визуальный анализ. По этой же причине не было построено Wakeby-распределение, так как при полученных значениях параметров оно практически совпадало с обобщенным Парето для всех месяцев. Для Парето IV распределения параметр сдвига не может быть определен при использовании процедуры оценки параметров и должен быть задан априори. Поэтому при построении Парето IV мы предполагали, что он равен нулю, что вполне согласуется с природой данных и не приводит к потере точности [Brazauskas, 2003].

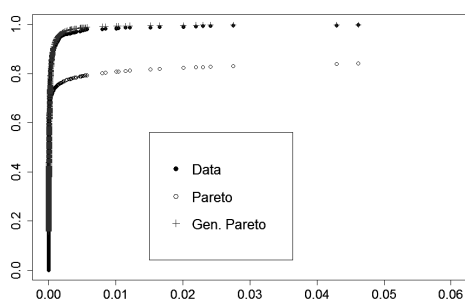


Рис. 4. Активы, семейство Парето-распределений (Pareto, Gen. Pareto)

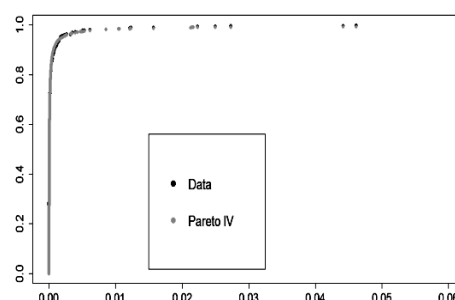


Рис. 5. Активы, семейство Парето-распределений (Pareto IV)

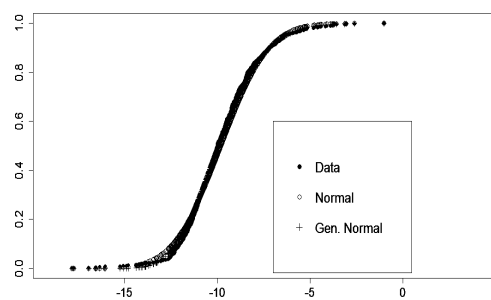


Рис. 6. Логарифм активов, семейство нормальных и связанных с ним распределений (Normal, Gen. Normal)

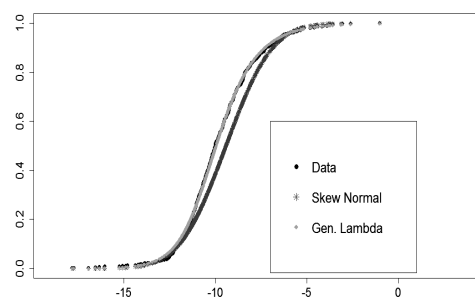


Рис. 7. Логарифм активов, семейство нормальных и связанных с ним распределений (Skew Normal, Gen. Lambda)

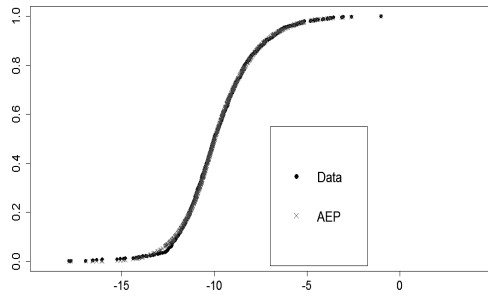


Рис. 8. Логарифм активов, семейство нормальных и связанных с ним распределений (AEP)

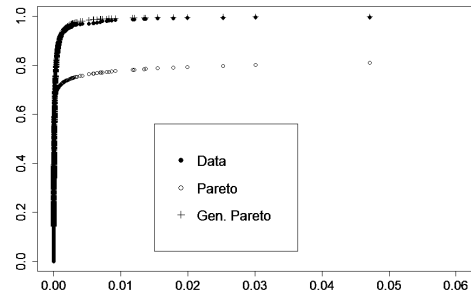


Рис. 9. Кредиты фирмам (La), семейство Парето-распределений (Pareto, Gen. Pareto)

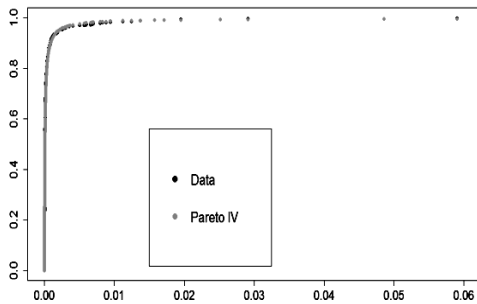


Рис. 10. Кредиты фирмам (La), семейство Парето-распределений (Pareto IV)

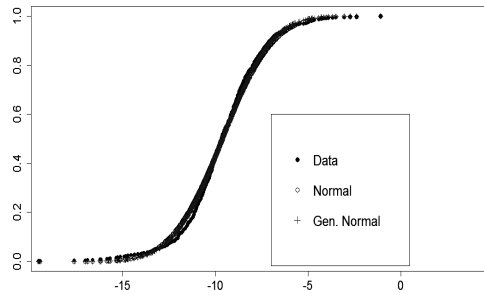


Рис. 11. Логарифмы кредитов фирмам (La), семейство нормальных и связанных с ним распределений (Normal, Gen. Normal)

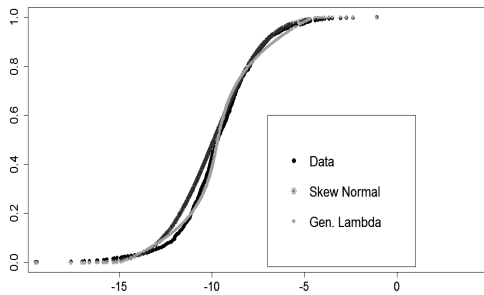


Рис. 12. Логарифмы кредитов фирмам (La), семейство нормальных и связанных с ним распределений (Skew Normal, Gen. Lambda)

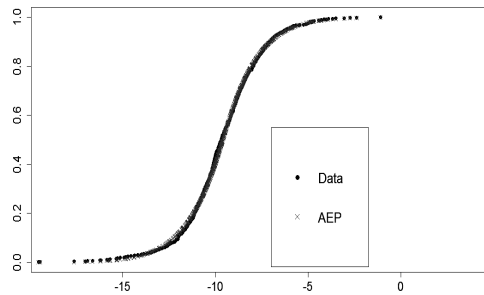


Рис. 13. Логарифмы кредитов фирмам (La), семейство нормальных и связанных с ним распределений (AEP)

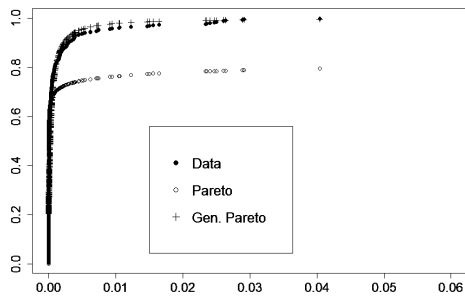


Рис. 14. Межбанковские депозиты (Db), семейство Парето-распределений (Pareto, Gen. Pareto)

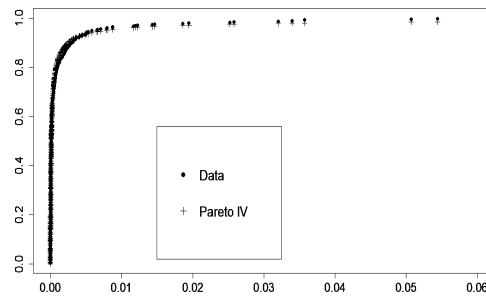


Рис. 15. Межбанковские депозиты (Db), семейство Парето-распределений (Pareto IV)

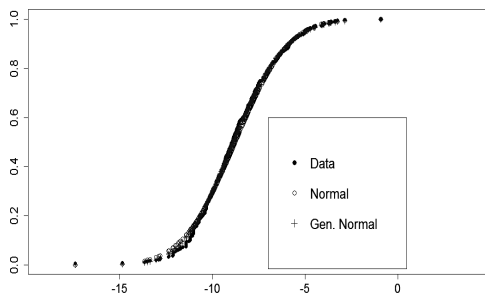


Рис. 16. Логарифм межбанковских депозитов (Db), семейство нормальных и связанных с ним распределений (Normal, Gen. Normal)

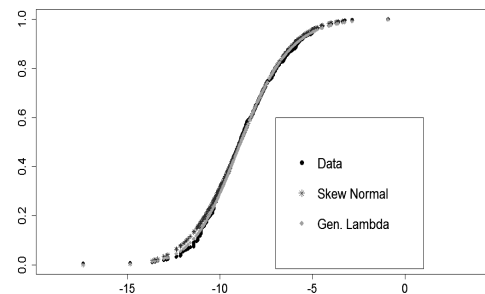


Рис. 17. Логарифм межбанковских депозитов (Db), семейство нормальных и связанных с ним распределений (Skew Normal, Gen. Lambda)

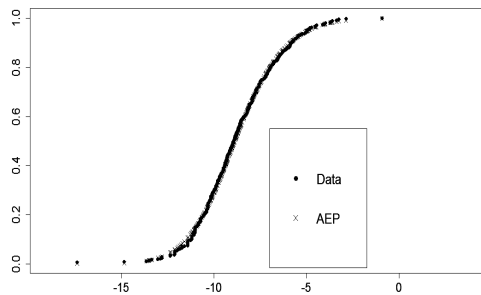


Рис. 18. Логарифм межбанковских депозитов (Db), семейство нормальных и связанных с ним распределений (AEP)

Исходя из графического анализа качество подгонки достаточно высоко, причем это верно для всех финансовых показателей. Отдельно стоит отметить асимметричное нормальное распределение (Skew Normal), оценки которого не являются стабильными, а ка-

чество подгонки низко, поэтому в дальнейшем мы исключим его из рассмотрения. Парето и обобщенное Парето (Gen. Pareto) распределения практически не описывают правый хвост распределения. Обычное логнормальное распределение также не демонстрирует высокого качества подгонки, что связано с явной асимметрией реальных данных. Тем не менее в дальнейших расчетах мы оставим и логнормальное, и Парето-распределения как некоторую точку отсчета качества подгонки остальных распределений. Другие же распределения вполне адекватно описывают данные.

3.3. Количественная оценка точности подгонки распределений

По результатам графического анализа трудно сделать однозначный вывод, какое теоретическое распределение является наилучшей аппроксимацией для наблюдаемых данных, поэтому рассчитаем формальные дистанции между эмпирическим и теоретическим распределениями для каждого месяца для каждого из исследуемых нами показателей. Мы будем использовать два типа статистической дистанции, экстремальную и среднюю абсолютную дистанцию:

$$1) \quad \max_x |F^{emp}(x) - F^{theor}(x)|,$$

$$2) \quad \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} |F^{emp}(x_i) - F^{theor}(x_i)|,$$

где n – количество наблюдений в k -ом месяце.

Такие дистанции были выбраны в силу, во-первых, простоты интерпретации, во-вторых, симметричности, в-третьих, комплементарности друг к другу (экстремальная дистанция не учитывает неэкстремальные наблюдения, а средняя абсолютная дистанция учитывает все наблюдения, но придает им одинаковый вес).

Дистанции считались для каждого месяца, затем рассчитывалось максимальное, минимальное, среднее значения по времени и стандартная ошибка, которые и даны в табл. 1 и 2. Эти таблицы значений дистанции были рассчитаны для активов.

Таблица 1.

Экстремальные дистанции для распределения активов

| | Максимум | Минимум | Среднее | Стандартная ошибка |
|-------------|----------|---------|---------|--------------------|
| Pareto | 0,48313 | 0,34992 | 0,41238 | 0,03508 |
| Gen. Pareto | 0,18795 | 0,10712 | 0,14349 | 0,02008 |
| Pareto IV | 0,02455 | 0,01191 | 0,01709 | 0,00254 |
| Normal | 0,06809 | 0,03485 | 0,05275 | 0,00803 |
| Gen. Normal | 0,04451 | 0,02327 | 0,03178 | 0,00470 |
| AEP | 0,02064 | 0,00972 | 0,01805 | 0,00314 |
| Gen. Lambda | 0,04773 | 0,01185 | 0,01924 | 0,00468 |

Таблица 2.

Средняя абсолютная дистанция для распределения активов

| | Максимум | Минимум | Среднее | Стандартная ошибка |
|-------------|----------|---------|---------|--------------------|
| Pareto | 0,21907 | 0,17427 | 0,19391 | 0,01084 |
| Gen. Pareto | 0,07107 | 0,03248 | 0,05107 | 0,01077 |
| Pareto IV | 0,00720 | 0,00323 | 0,00506 | 0,00093 |
| Normal | 0,03006 | 0,01363 | 0,02378 | 0,00523 |
| Gen. Normal | 0,01635 | 0,00929 | 0,01267 | 0,00149 |
| AEP | 0,00734 | 0,00268 | 0,00498 | 0,0008 |
| Gen. Lambda | 0,02029 | 0,00334 | 0,00575 | 0,00198 |

Как мы видим из табл. 1 и 2, среди распределений семейства Парето в целом лучше Парето IV типа, а среди семейства нормальных распределений – распределение с асимметричным показателем степени (AEP). По результатам анализа распределение с асимметричным показателем степени (AEP) чуть лучше (особенно по экстремальной метрике), чем Парето IV. При этом вариативность дистанции для указанных распределений достаточно мала во времени, что свидетельствует о стабильности функциональной формы.

Покажем графики для активов для ноября 2004 г. и ноября 2014 г. Выбор этих дат неслучаен. С одной стороны, ноябрь 2014 г. – одна из наиболее поздних дат в исследуемом массиве, не искаженная эффектами сезонности (имеющими некоторое место в декабре и январе каждого года). С другой стороны, десятилетний интервал между точками наблюдения позволяет проверить факт резких изменений в исследуемых распределениях.

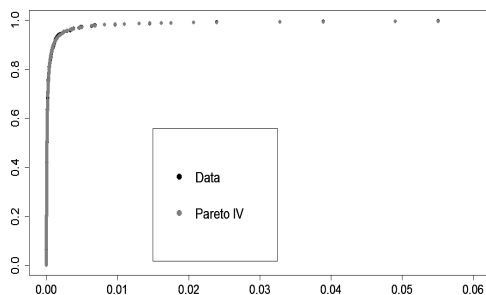


Рис. 19. Активы, Парето IV распределение, ноябрь 2004 г.

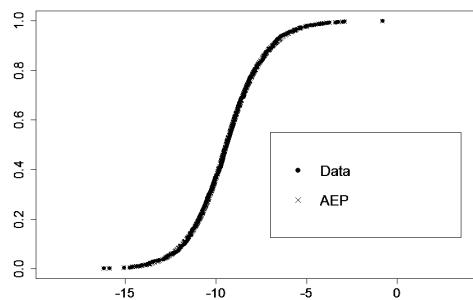


Рис. 20. Логарифм активов, asymmetric exponential power распределение, ноябрь 2004 г.

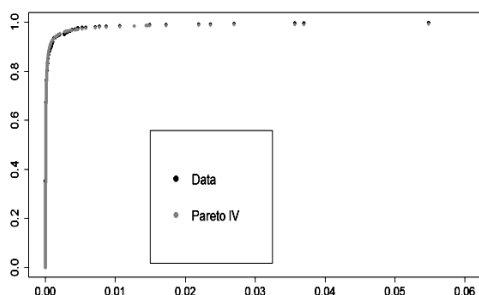


Рис. 21. Активы, Парето IV распределение, ноябрь 2014 г.

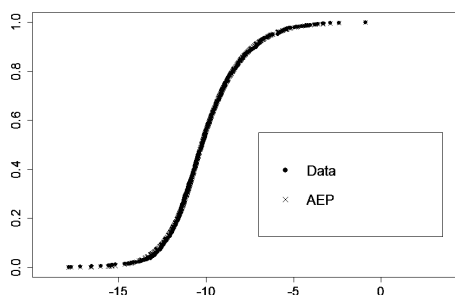


Рис. 22. Логарифм активов, asymmetric exponential power распределение, ноябрь 2014 г.

Из графиков видно, что распределение банков по активам не претерпело значительных изменений за десять лет. Можно заметить, что оба распределения стали чуть более пологими, что означает, что, при прочих равных, банковская система стала более однородной. Появился хвост из очень мелких банков, а правый хвост стал чуть более однородным. Качество подгонки обоих распределений очень высоко.

Для подтверждения стабильности распределений банков по долям активов был проведен тест Колмогорова – Смирнова на эквивалентность эмпирических распределений. В данном случае эмпирические распределения достаточно хорошо описывают данные, так как выборки однородны и достаточно большого размера. Было получено, что гипотеза о сходстве распределений не отвергалась (p -value в среднем равнялся 0,99). При разнице в 8 периодов и больше для сравниваемых месяцев нулевая гипотеза отвергается на пятипроцентном уровне значимости, т.е. далекие месяцы могут быть отличны друг от друга. Однако статистическое тестирование не транзитивно, поэтому такая ситуация не является контринтуитивной.

Теперь перейдем к анализу распределения долей остальных ключевых показателей деятельности банков, поскольку стабильность этих показателей также может служить дополнительным аргументом в пользу использования концепции агрегированного агента. Анализ качества подгонки остальных рассматриваемых показателей также позволяет остановиться на двух наиболее подходящих распределениях – Парето IV и распределении с асимметричным показателем степени (AEP). Для них обоих в табл. 3 приведены максимум, минимум, среднее и стандартная ошибка экстремальной (Max) и средней абсолютной (Mean) дистанции.

В целом, как мы видим, трудно однозначно сделать вывод, какое из распределений лучше описывает данные. Разные агрегаты лучше аппроксимируются разными распределениями (в среднем чуть лучше аппроксимирует распределение с асимметричным показателем степени, AEP). Стоит отметить, что для всех исследуемых финансовых агрегатов (в том числе и для активов) дистанции между эмпирическим и теоретическим распределениями не сильно меняются со временем, что в очередной раз подтверждает робастность полученных результатов. Поэтому мы оставляем эти два распределения как наиболее подходящие для описания данных.

Таблица 3.

Максимальные и средние дистанции для прочих показателей

| | | Максимальное значение | Минимальное значение | Среднее значение | Стандартная ошибка |
|----|-----------------|-----------------------|----------------------|------------------|--------------------|
| Db | Max, Pareto IV | 0,0561 | 0,0217 | 0,0381 | 0,0068 |
| | Max, AEP | 0,0478 | 0,0163 | 0,0293 | 0,0068 |
| | Mean, Pareto IV | 0,0211 | 0,0073 | 0,0135 | 0,0029 |
| | Mean, AEP | 0,0182 | 0,0043 | 0,0090 | 0,0028 |
| Df | Max, Pareto IV | 0,0942 | 0,0318 | 0,0546 | 0,0165 |
| | Max, AEP | 0,0574 | 0,0173 | 0,0296 | 0,0078 |
| | Mean, Pareto IV | 0,0377 | 0,0093 | 0,0196 | 0,0078 |
| | Mean, AEP | 0,0213 | 0,0048 | 0,0099 | 0,0039 |
| Dh | Max, Pareto IV | 0,0601 | 0,0171 | 0,0325 | 0,0100 |
| | Max, AEP | 0,0472 | 0,0168 | 0,0312 | 0,0081 |
| | Mean, Pareto IV | 0,0200 | 0,0065 | 0,0121 | 0,0038 |
| | Mean, AEP | 0,0209 | 0,0056 | 0,0117 | 0,0041 |
| Da | Max, Pareto IV | 0,0401 | 0,0131 | 0,0260 | 0,0059 |
| | Max, AEP | 0,0429 | 0,0145 | 0,0269 | 0,0062 |
| | Mean, Pareto IV | 0,0149 | 0,0040 | 0,0087 | 0,0025 |
| | Mean, AEP | 0,0162 | 0,0044 | 0,0089 | 0,0026 |
| Lf | Max, Pareto IV | 0,0531 | 0,0163 | 0,0318 | 0,0065 |
| | Max, AEP | 0,0441 | 0,0142 | 0,0252 | 0,0053 |
| | Mean, Pareto IV | 0,0172 | 0,0054 | 0,0102 | 0,0027 |
| | Mean, AEP | 0,0127 | 0,0042 | 0,0072 | 0,0017 |
| Lh | Max, Pareto IV | 0,0355 | 0,0128 | 0,0222 | 0,0043 |
| | Max, AEP | 0,0326 | 0,0093 | 0,0158 | 0,0048 |
| | Mean, Pareto IV | 0,0113 | 0,0041 | 0,0073 | 0,0019 |
| | Mean, AEP | 0,0097 | 0,0029 | 0,0047 | 0,0014 |
| La | Max, Pareto IV | 0,0335 | 0,0151 | 0,0240 | 0,0042 |
| | Max, AEP | 0,0387 | 0,0162 | 0,0262 | 0,0051 |
| | Mean, Pareto IV | 0,0116 | 0,0044 | 0,0080 | 0,0019 |
| | Mean, AEP | 0,0118 | 0,0052 | 0,0079 | 0,0016 |

Стоит отдельно сказать, что полученные выше значения дистанций для относительных размеров банков не меняются значимо, если исключить случайную часть выборки, т.е. результаты устойчивы. Кроме того, было проведено моделирование функций плотности относительных размеров с помощью непараметрических (*kernel*) функций. Получилось, что распределения относительных размеров являются одномодальными, причем явных признаков того, что данные распределения получены путем слияния других распределений, не выявлено. В силу большого количества рисунков данные результаты не приведены в работе для экономии места и могут быть предоставлены по запросу.

Отдельно стоит сказать про особенность всех вышеприведенных распределений. При детальном анализе было установлено, что некоторые банки с течением времени могут перемещаться по этому распределению достаточно сильно, однако, как мы уже показали, сама структура распределения является стабильной во времени. Таким образом, это не распределение конкретных банков, а распределение банков банковской системы Российской Федерации. То есть форму распределения определяют не индивидуальные характеристики отдельных банков, а свойства всей системы.

3.4. Динамика оценок параметров распределений

Мы убедились, что Парето IV и распределение с асимметричным показателем степени являются хорошей аппроксимацией для наших данных для любого периода времени, т.е. сама функциональная форма стабильна, теперь постараемся определить, насколько стабильны оценки параметров распределений для долей активов⁶. Для этого проанализируем, как менялись их значения в течение периода наблюдения (рис. 23–25, где по горизонтальной шкале отложены месяцы начиная с января 2004 г. и заканчивая февралем 2015 г.).

Заметим, что примерно до 60-й точки (60-я точка – это декабрь 2008 г.) значения оценок параметров менялись достаточно сильно, но после нее значения оценок всех параметров становятся относительно стабильными. Отсюда получается интересная гипотеза: до 2009 г. был период трансформации банковской системы, который завершился после кризиса, и банковская система перешла в другой режим функционирования, в котором и оставалась вплоть до начала 2014 г. (120-я точка – декабрь 2013 г.), после чего начался следующий период трансформации. Тем не менее на данный момент остается не до конца понятным, можно ли считать, что изменения динамики оценок параметров связаны именно с принципиальными изменениями внутри банковской системы (и их адекватно отражают) или же речь идет только об изменении количества банков в Российской Федерации и их стимулов к раскрытию своей отчетности или изменение динамики связано с каким-то другим эффектом.

⁶ Опять же внимание сконцентрировано на долях активов, так как это наиболее важный показатель.

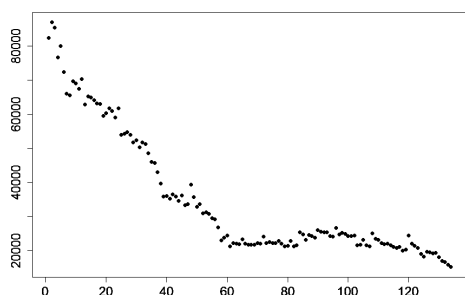


Рис. 23. Динамика оценки параметра масштаба распределения Парето IV активов банков

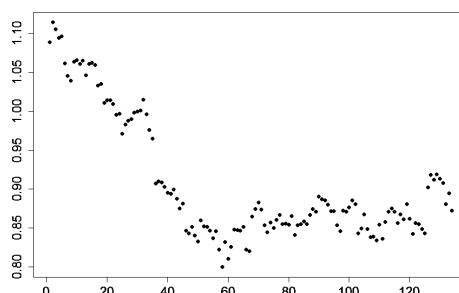


Рис. 24. Динамика оценки параметра неравенства распределения Парето IV активов банков

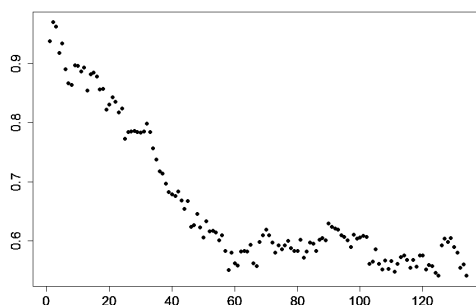


Рис. 25. Динамика оценки параметра формы распределения Парето IV активов банков

Достаточно схожие изменения динамики оценок можно заметить, анализируя оценки параметров распределения с асимметричным показателем степени (рис. 26–29). Динамика оценок параметра сдвига и оценок первого параметра формы (рис. 26 и 28) достаточно сильно похожа на динамику оценок распределения Парето IV, чуть менее схожую динамику имеют оценки параметра масштаба (рис. 27) и оценки второго параметра формы (рис. 29), при этом значения оценок последних двух параметров являются в целом менее стабильными. Такую разницу в стабильности оценок параметров двух распределений можно отчасти объяснить разными методами получения оценок. Оценки параметров Парето IV типа искались с помощью метода L-моментов, а оценки параметров распределения с асимметричным показателем степени – с помощью метода максимального правдоподобия. В силу нетривиальной функциональной формы последнего распределения можно ожидать, что результаты поиска максимума функции правдоподобия для этого распределения не будут робастными.

Но, несмотря на изменения оценок параметров, распределения даже для данных с разницей в 10 лет отличаются весьма слабо (при том, что количество банков в России в течение этого периода менялось). Вероятно, это связано с тем фактом, что абсолютные изменения значений оценок параметров не столь существенны (исключение составляют

оценки для параметра масштаба для распределения Парето IV типа, хотя, возможно, это вопрос лишь масштаба значений оценок (рис. 23)). Однако исследование динамики оценок параметров представляет поле для дальнейшего исследования.

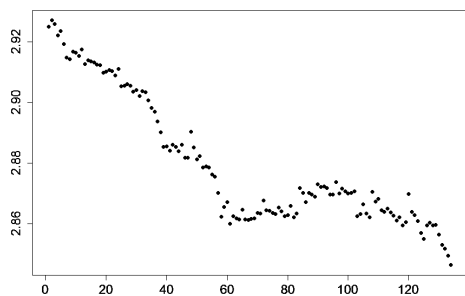


Рис. 26. Динамика оценки параметра сдвига распределения АЕР активов банков

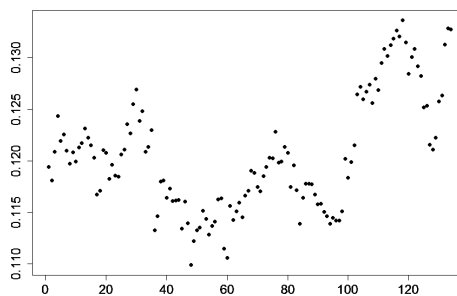


Рис. 27. Динамика оценки параметра масштаба распределения АЕР активов банков

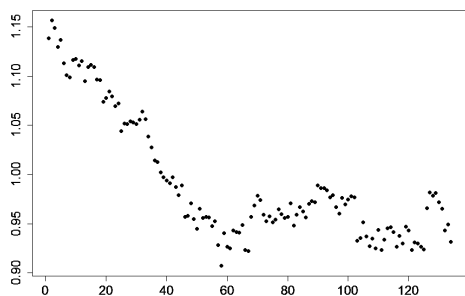


Рис. 28. Динамика оценки первого параметра формы распределения АЕР активов банков

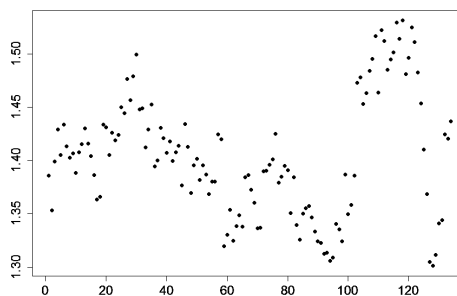


Рис. 29. Динамика оценки второго параметра формы распределения АЕР активов банков

Заключение

В работе [Малахов, Поспелов, 2014] было показано, что исходя из достаточно реалистичных предпосылок получается, что распределение банков по долям активов является стабильным во времени. Если это следствие выполняется на реальных данных, то все банки достаточно однородны (по сути, меняться может лишь масштаб банков), что является аргументом в пользу использования концепции агрегированного агента в DSGE-моделях. Для анализа были выбраны данные по российским банкам с января 2004 г. по февраль 2015 г., предоставляемые Банком России.

Было показано, что распределение долей банков по финансовым показателям в большинстве случаев хорошо аппроксимируется распределением Парето IV и асимметричным распределением ошибок (АЕР), причем качество подгонки крайне высоко, но невозможно отдать предпочтение одному из этих распределений. При этом результаты значимо не меняются, как во времени, так и при урезании выборки.

Для уточнения результатов был проведен тест Колмогорова – Смирнова для долей активов, как наиболее важного показателя, получилось, что только при разнице в восемь месяцев и более начинает наблюдаться неэквивалентность в функциях распределения на пятипроцентном уровне значимости.

При этом обычное Парето-распределение для долей ключевых показателей не дало качественной подгонки данных, таким образом, распределение банков не подчинено закону Ципфа. Также подобранные функциональные формы распределений отличаются от описанных, например, в [McDonald, 1984], что объясняется иной природой данных.

При анализе всех ключевых показателей было установлено, что отдельные банки могут перемещаться по распределению, меняя свой порядковый номер несколько раз за рассматриваемый период, однако сама структура остается стабильной. Другими словами, рассмотренные распределения описывают распределения не долей ключевых показателей конкретных банков, а распределение долей показателей банков банковской системы России в целом. То есть система на макроуровне устойчива к изменению характеристик отдельных агентов. Также стоит добавить, что исследуемые распределения являются одномодальными, что является дополнительным свидетельством в пользу однородности выборки.

Была исследована динамика оценок параметров распределения долей активов как наиболее важного показателя. Получилось, что в целом изменения значений оценок параметров достаточно малы по абсолютной величине. Вероятно, динамика оценок отражает смену режима функционирования банковской системы: например, оценки параметров после кризиса 2008 г. резко стабилизировались. Однако вопрос о взаимосвязи оценок параметров распределения и смены режимов функционирования системы остается открытым. Поскольку функциональная форма стабильна, а оценки параметров для долей активов меняются незначительно, можно утверждать, что теоретическая модель в целом проходит эмпирическую проверку.

В качестве возможных направлений дальнейших исследований отметим, что, во-первых, необходимо проанализировать, как изменялось неравенство распределения банков по долям этих финансовых показателей, во-вторых, изучить возможность прогнозирования изменения структуры банковской системы, в-третьих, проанализировать динамику коэффициента асимметрии и толщины хвостов распределения, чтобы получить всестороннее представление о структурных изменениях в банковской системе и методах их диагностики. Более того, необходимо найти причины и более подробно описать смену режимов функционирования банковской системы России. Также необходимо включить в анализ данные по развитым странам, например США, так как институциональные характеристики у банковских отраслей разных стран могут существенно различаться.

* *

*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бессонов В.А. Проблемы анализа российской макроэкономической динамики переходного периода. М.: Институт экономики переходного периода, 2005.

Андреев А.Ю. Анализ распределения банков по активам // Прикладная эконометрия. 2008. Т. 10. № 2. С. 3–10.

- Андреев М.Ю., Пильник Н.П., Поспелов И.Г. Моделирование деятельности современной российской банковской системы // Экономический журнал ВШЭ. 2009. Т. 13. № 2. С. 143–171.
- Валитова Л.А. Эволюционное моделирование развития российской банковской системы: дисс. канд. наук. М.: МГУ, 2003.
- Дедова М.С., Пильник Н.П., Поспелов И.Г. Описание потребности в ликвидности со стороны российской банковской системы на основе статистики оборотов // Журнал Новой экономической ассоциации. 2014. № 4 (24). С. 87–110.
- Леонидов А.В., Румянцев Е.Л. Оценка системных рисков межбанковского рынка России на основе сетевой топологии // Журнал Новой экономической ассоциации. 2013. 3(19). С. 65–80.
- Малахов Д.И., Поспелов И.Г. Эволюция распределения российских банков по ключевым агрегированным показателям // Труды Московского физико-технического института. 2014. Т. 6. № 4(24). С. 57–66.
- Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A. Systemic Risk and Stability in Financial Networks // American Economic Review. 2015. 105(2). P. 564–608.
- Atkinson A.B., Bourquignon F. Handbook of Income Distribution. Vol. 1. Elsevier, 2000.
- Axtell R.L. Zipf Distribution of US Firm Sizes // Science. 2001. 293(5536). P. 1818–1820.
- Asquith W.H. lmomco: L-moments, Censored L-moments, Trimmed L-moments, L-comoments, and Many Distributions, Package for R. 2015.
- Beena V.T., Kumaran M. Measuring Inequality and Social Welfare from any Arbitrary Distribution // Brazilian Journal of Probability and Statistics. 2010. 24(1). P. 78–90.
- Benito E. Size, Growth and Bank Dynamics: Working Paper. 2008. № 080.
- Bernanke B.S., Blinder A.S. Credit, Money, and Aggregate Demand. National Bureau of Economic Research: Working Paper. 1988. № w2534.
- Bernanke B.S., Gertler M. Inside the Black Box: The Credit Channel of Monetary Policy Transmission. National Bureau of Economic Research: Working Paper 1995. № w5146.
- Billio M., Getmansky M., Lo A.W., Pelizzon L. Econometric Measures of Connectedness and Systemic Risk in the Finance and Insurance Sectors // Journal of Financial Economics. 2012. 104(3). P. 535–559.
- Borshchev A., Filippov A. From System Dynamics and Discrete Event to Practical Agent Based Modeling: Reasons, Techniques, Tools: Proceedings of the 22nd International Conference of the System Dynamics Society. 2004. Vol. 22.
- Brazauskas V. Information Matrix for Pareto (IV), Burr, and Related Distributions // Communications in Statistics-Theory and Methods. 2003. 32(2). P. 315–325.
- Buldyrev S.V., Growiec J., Pammolli F., Riccaboni M., Stanley H.E. The Growth of Business Firms: Facts and Theory // Journal of the European Economic Association. 2007. Vol. 5(2–3). P. 574–584.
- Cabral L.M.B., Mata J. On the Evolution of Size Distributions: Facts and Theory // The American Economic Review. 2003. Vol. 93. № 4. P. 1075–1090.
- Chang Y., Kim S.B., Schorfheide F. Labor-market Heterogeneity, Aggregation, and Police (in) Variance of DSGE Model Parameters // Journal of the European Economic Association. 2013. 11(s1). P. 193–220.
- Crosato L., Ganugi P. Statistical Regularity of Firm Size Distribution: The Pareto IV and Truncated Yule for Italian SCI Manufacturing // Statistical Method and Applications. 2007. 16(1). P. 85–115.
- Dawid H., Gemkow S., Harting P., Van der Hoog S., Neugart M. The Eurace@Unibi Model: An Agent-based Macroeconomic Model for Economic Policy Analysis: Working Paper in Economics and Management. № 05-2012, 2012.
- Eeckhout J. Gibrat's Law for (All) Cities // American Economic Review. 2004. Vol. 94. № 5. P. 1429–1451.
- Ericson R., Pakes A. Markov-perfect Industry Dynamics: A Framework for Empirical Work // The Review of Economic Studies. 1995. 62(1). P. 53–82.
- Evans D.S. The Relationship between Firm Growth, Size, and Age: Estimates for 100 Manufacturing Industries // Journal of Industrial Economics. 1987. Vol. 35(4). P. 567–581.
- Farmer J.D., Foley D. The Economy Needs Agent-based Modeling // Nature. 2009. 460(7256). P. 685–686.

- Fishlow A.* Brazilian Size Distribution of Income // *The American Economic Review*. 1972. P. 391–402.
- Galor O., Zeira J.* Income Distribution and Macroeconomics // *The Review of Economic Studies*. 1987. 60(1). P. 35–52.
- Garcia N.E.* DSGE Macroeconomic Models: A Critique // *Economie Appliquee*. 2011. 64(1). P. 149.
- Gertler M., Karadi P.* A Model of Unconventional Monetary Policy // *Journal of Monetary Economics*. 2011. 58(1). P. 17–34.
- Gertler M., Kiyotaki N.* Financial Intermediation and Credit Policy in Business Cycle Analysis // *Handbook of Monetary Economics*. 2010. 3(3). P. 547–599.
- Gertler M., Kiyotaki N.* Banking, Liquidity and Bank Runs in an Infinite-horizon Economy: National Bureau of Economic Research. Working Paper. 2013. № w19129.
- Gibrat R.* Les Inégalités économiques. Recueils irey. 1931.
- Gonzales-Val R., Lanaspá L., Sanz F.* Gibrat's Law for Cities Revisited. 2010. MRPA Paper. № 20169.
- Gordy M.B.* A Generalization of Generalized Beta Distributions: Working Paper Federal Reserve System. 1998.
- Greenwood J., Jovanovic B.* Financial Development, Growth, and the Distribution of Income. National Bureau of Economic Research. 1989. № w3189.
- Hosking J.R.M.* L-moments, Package for R. 2015.
- Hall B.N.* The Relationship between Firm Size and Firm Growth in the U.S. Manufacturing Center. National Bureau of Economic Research. 1986. Working Paper № 1965.
- Iori G., De Masi G., Precup O.V., Gabbi G., Caldarelli G.* A Network Analysis of the Italian Overnight Money Market // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2008. 32(1). P. 259–278.
- Javonovich B.* Selection and the Evolution of Industry // *Econometrica*. 1982. Vol. 50. Iss. 3. P. 649–670.
- Kechedzhi K.E., Usatenko O.V., Yampol'skii V.A.* Rank Distributions of Words in Correlated Symbolic Systems and the Zipf Law // *Physical Review*. 2005. E 72. 046138.
- Kleiber C., Kotz S.* Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences. Vol. 470. John Wiley&Sons, 2003.
- Lotti F., Santarelli E., Vivarelli M.* Does Gibrat's Law Hold Among Young, Small Firms // *Journal of Evolutionary Economics*. 2003. Vol. 13. P. 213–235.
- Lucas R.E.* Econometric Policy Evaluation: A Critique // *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*. 1976. December. Vol. 1. P. 19–46. North-Holland.
- Mansfield E.* Entry, Gibrat's Law, Innovation, and the Growth of Firms // *American Economics Review*. 1952. Vol. 52. P. 1023–1051.
- Miao J.* Optimal Capital Structure and Industry Dynamics // *The Journal of Finance*. 2005. Vol. 60(6). P. 2621–2659.
- McDonald J.B.* Some Generalized Functions for the Size Distribution of Income // *Econometrica: Journal of the Econometric Society*. 1984. P. 647–663.
- McDonald J.B., Xu Y.J.* A Generalization of the Beta Distribution with Applications // *Journal of Econometrics*. 1995. Vol. 66(1–2). P. 133–152.
- Negrea B.* A Statistical Measure of Financial Crises Magnitude // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2014. Vol. 397. P. 54–75.
- Prescott E.S., Janicki H.P.* Changes in the Size of U.S. Banks: 1960–2005 // *Economic Quarterly*. 2006. Iss. Fall. P. 291–316.
- Romer C.D., Romer D.H.* Does Monetary Policy Matter? A New Test in the Spirit of Friedman and Schwartz // *NBER Macroeconomics Annual*. 1989. Vol. 4. P. 121–184. MIT Press.
- Samanidou E., Zschischang E., Stauffer D., Lux T.* Agent-based Models of Financial Markets // *Reports on Progress in Physics*. 2007. Vol. 70(3). P. 409.
- Sepanski J.H., Kong L.* A Family of Generalized Beta Distributions for Income // *arXiv Preprint arXiv: 07104614*. 2014.

Sotskov A.I. Time-consistent Government Policies in the Sidrausky's Model // New Economic School. 2003. Working Paper № 2003/034.

Sutton J. Sunk Costs and Market Structure: Price Competition, Advertising, and the Evolution of Concentration. Cambridge, Mass, MIT Press, 2003.

Wang Z. Income Distribution, Market Size and the Evolution of Industry // Review of Economic Dynamics. 2008. Vol. 11. Iss. 3. P. 542–565.

Yee T.W., Wild C.J. Vector Generalized Additive Models // Journal of Royal Statistical Society. Series B. 1996. 58(3). P. 481–493.

Zhu D., Zinde-Walsh V. Properties and Estimation of Asymmetric Exponential Power Distribution // Journal of Econometrics. 2009. 148(1). P. 86–99.

Stability of Distributions of Banks as an Argument to Usage of Concept of Aggregate Agent

Malakhov Dmitry¹, Pilnik Nikolay², Radionov Stanislav³

¹ National Research University Higher School of Economics,
26, Shabolovka st., Moscow, 119049, Russian Federation.
E-mail: d.malakhov@gmail.com

² National Research University Higher School of Economics,
26, Shabolovka st., Moscow, 119049, Russian Federation.
E-mail: u4d@yandex.ru

³ National Research University Higher School of Economics,
26, Shabolovka st., Moscow, 119049, Russian Federation.
E-mail: sradionov@hse.ru

Issue about relevancy of usage of concepts of representative and aggregate agents in modern economic science is very actual. In theoretical model [Malakhov, Pospelov, 2014] showed, that distribution of banks on shares of assets is stable over time. If this results is correct for real data, then it will another argument to usage of concept of aggregate agent in modeling of banking sector, which is an actual topic for macroeconomists. In this paper we provide an empirical test of this result using data from Russian banking system. We also analyze other key variables, such as households' deposits, firm's credits, interbank credits, etc., because if distributions of shares of these variables are stable too, then it will be additional argument to usage of concept of aggregate agents. Aim of this paper is selection of optimal (in some sense) functional forms of distribution of shares of key variable and validating stability of these distributions over time. Actuality of this topic is also confirmed by recent events in Russian economy and banking system in particular.

We show that using generalized versions of well-known distributions, we can accurately describe the distribution of Russian banks in terms of turnover balance sheet. In particular, the Pareto distribution of type IV and asymmetric generalized error distribution show a very high

accuracy of approximation and these results are correct for all considered variables. Quality of approximation by these distribution is robust, both in time and in the cross-sectional dimension, however, individual banks can move in distribution. Thus, we can't talk about the distribution of individual banks but of the distribution of banks of the entire Russian banking system.

Moreover, estimations of parameters of distribution of shares of assets have been minorly changing during observation period and these changes could be possibly connected with structural shifts in banking industry. Kolmogorov – Smirnov test shows, that differences between distributions of shares of assets become significant at 5% confidence level, only when difference between periods is more than 8 months. Thus theoretical model [Malakhov, Pospelov, 2014] mainly passes the empirical test.

Key words: aggregate agent; bank; banking system; distribution of firm size; industry dynamics; turnover balance sheet.

JEL Classification: E19, C10, L10, G21.

* *
*

References

Bessonov V.A. (2005) *Problemy analiza rossijskoj makroekonomicheskoj dinamiki perehodnogo perioda* [Problems of Analyses of Russian Macroeconomic Dynamic of Transition Period]. Moscow: Institute of Economics of Transition Period.

Andreev A.U. (2008) Analiz raspredelenija bankov po aktivam [Analysis of Distribution of Banks on Assets]. *Applied Econometrics*, 10, 2, pp. 3–10.

Andreev M.U., Pilnik N.P., Pospelov I.G. (2009) Modelirovanie dejatel'nosti sovremennoj rossijskoj bankovskoj sistemy [Modeling of Performance of Modern Russian Banking System]. *HSE Economic Journal*, 13, 2, pp. 143–171.

Valitova L.A. (2003) *Jevoljucionnoe modelirovanie razvitija rossijskoj bankovskoj sistemy* [Evolution Modeling of Developing of Russian Banking System]. (PhD Thesis), Moscow: MSU.

Dedova M.S., Pilnik N.P., Pospelov I.G. (2014) Opisanie potrebnosti v likvidnosti so storony rossijskoj bankovskoj sistemy na osnove statistiki oborotov [Description of Demand in Liquidity of Russian Banking System Using the Turnover Balance Sheet]. *Journal of New Economic Association*, 4, 24, pp. 87–110.

Leonidov A.V., Rumianchev E.L. (2013) Ocenka sistemnyh riskov mezhsoborotnogo rynka Rossii na osnove setevoj topologii [Estimation of System Risks of Russian Interbank Market Using the Network Topology]. *Journal of New Economic Association*, 3, 19, pp. 65–80.

Malakhov D.I., Pospelov I.G. (2014) Jevoljucija raspredelenija rossijskih bankov po ključevym agregirovannym pokazateljam [Evolution of Distribution of Russian Banks on Key Aggregate Variables]. *Proceedings of MIPT*, 6, 4, 24, pp. 57–66.

Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A. (2015) Systemic Risk and Stability in Financial Networks. *American Economic Review*, 105, 2, pp. 564–608.

Atkinson A.B., Bourguignon F. (2000) *Handbook of Income Distribution*. Vol. 1. Elsevier.

Axtell R.L. (2001) Zipf Distribution of US Firm Sizes. *Science*, 293, 5536, pp. 1818–1820.

Asquith W.H. (2015) *lmomco: L-moments, Censored L-moments, Trimmed L-moments, L-comoments, and Many Distributions, Package for R*.

Beena V.T., Kumaran M. (2010) Measuring Inequality and Social Welfare from any Arbitrary Distribution. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 24, 1, pp. 78–90.

- Benito E. (2008) *Size, Growth and Bank Dynamics*. Working Paper. no 080.
- Bernanke B.S., Blinder A.S. (1988) *Credit, Money, and Aggregate Demand*. National Bureau of Economic Research. Working Paper no w2534.
- Bernanke B.S., Gertler M. (1995) *Inside the Black Box: The Credit Channel of Monetary Policy Transmission*. National Bureau of Economic Research. Working Paper no w5146.
- Billio M., Getmansky M., Lo A.W., Pelizzon L. (2012) Econometric Measures of Connectedness and Systemic Risk in the Finance and Insurance Sectors. *Journal of Financial Economics*, 104, 3, pp. 535–559.
- Borshchev A., Filippov A. (2004) From System Dynamics and Discrete Event to Practical Agent Based Modeling: Reasons, Techniques, Tools. *Proceedings of the 22nd International Conference of the System Dynamics Society*, vol. 22.
- Brazauskas V. (2003) Information Matrix for Pareto (IV), Burr, and Related Distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 32, 2, pp. 315–325.
- Buldyrev S.V., Growiec J., Pammolli F., Riccaboni M., Stanley H.E. (2007) The Growth of Business Firms: Facts and Theory. *Journal of the European Economic Association*, 5, 2–3, pp. 574–584.
- Cabral L.M.B., Mata J. (2003) On the Evolution of Size Distributions: Facts and Theory. *The American Economic Review*, 93, 4, pp. 1075–1090.
- Chang Y., Kim S.B., Schorfheide F. (2013) Labor-market Heterogeneity, Aggregation, and Police (in) Variance of DSGE Model Parameters. *Journal of the European Economic Association*, 11, s1, pp. 193–220.
- Crosato L., Ganugi P. (2007) Statistical Regularity of Firm Size Distribution: The Pareto IV and Truncated Yule for Italian SCI Manufacturing. *Statistical Method and Applications*, 16, 1, pp. 85–115.
- Dawid H., Gemkow S., Harting P., Van der Hoog S., Neugart M. (2012) *The Eurace@Unibi Model: An Agent-based Macroeconomic Model for Economic Policy Analysis*. Working Paper in Economics and Management no 05-2012.
- Eeckhout J. (2004) Gibrat's Law for (All) Cities. *American Economic Review*, 94, 5, pp. 1429–1451.
- Ericson R., Pakes A. (1995) Markov-perfect Industry Dynamics: A Framework for Empirical Work. *The Review of Economic Studies*, 62, 1, pp. 53–82.
- Evans D.S. (1987) The Relationship between Firm Growth, Size, and Age: Estimates for 100 Manufacturing Industries. *Journal of Industrial Economics*, 35, 4, pp. 567–581.
- Farmer J.D., Foley D. (2009) The Economy Needs Agent-based Modeling. *Nature*, 460, 7256, pp. 685–686.
- Fishlow A. (1972) Brazilian Size Distribution of Income. *The American Economic Review*, pp. 391–402.
- Galor O., Zeira J. (1987) Income Distribution and Macroeconomics. *The Review of Economic Studies*, 60, 1, pp. 35–52.
- Garcia N.E. (2011) DSGE Macroeconomic Models: A Critique. *Economie Appliquee*, 64, 1, p. 149.
- Gertler M., Karadi P. (2011) A Model of Unconventional Monetary Policy. *Journal of Monetary Economics*, 58, 1, pp. 17–34.
- Gertler M., Kiyotaki N. (2010) Financial Intermediation and Credit Policy in Business Cycle Analysis. *Handbook of Monetary Economics*, 3, 3, pp. 547–599.
- Gertler M., Kiyotaki N. (2013) *Banking, Liquidity and Bank Runs in an Infinite-horizon Economy*. National Bureau of Economic Research. Working Paper no w19129.
- Gibrat R. (1931) *Les Inégalités économiques*. Recueils irey.
- Gonzales-Val R., Lanaspá L., Sanz F. (2010) *Gibrat's Law for Cities Revisited*. MRPA Paper no 20169.
- Gordy M.B. (1998) *A Generalization of Generalized Beta Distributions*. Working Paper Federal Reserve System.
- Greenwood J., Jovanovic B. (1989) *Financial Development, Growth, and the Distribution of Income*. National Bureau of Economic Research no w3189.
- Hosking J.R.M. (2015) *L-moments, Package for R*.
- Hall B.N. (1986) *The Relationship between Firm Size and Firm Growth in the U.S. Manufacturing Center*. National Bureau of Economic Research. Working Paper no 1965.
- Iori G., De Masi G., Precup O.V., Gabbi G., Caldarelli G. (2008) A Network Analysis of the Italian Overnight Money Market. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32, 1, pp. 259–278.

- Javonovich B. (1982) Selection and the Evolution of Industry. *Econometrica*, 50, 3, pp. 649–670.
- Kechedzhi K.E., Usatenko O.V., Yampol'skii V.A. (2005) Rank Distributions of Words in Correlated Symbolic Systems and the Zipf Law. *Physical Review*, E 72, 046138.
- Kleiber C., Kotz S. (2003) *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*. Vol. 470. John Wiley&Sons.
- Lotti F., Santarelli E., Vivarelli M. (2003) Does Gibrat's Law Hold Among Young, Small Firms. *Journal of Evolutionary Economics*, 13, pp. 213–235.
- Lucas R.E. (1976) Econometric Policy Evaluation: A Critique. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, December, 1, pp. 19–46. North-Holland.
- Mansfield E. (1952) Entry, Gibrat's Law, Innovation, and the Growth of Firms. *American Economics Review*, 52, pp. 1023–1051.
- Miao J. (2005) Optimal Capital Structure and Industry Dynamics. *The Journal of Finance*, 60, 6, pp. 2621–2659.
- McDonald J.B. (1984) Some Generalized Functions for the Size Distribution of Income. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 647–663.
- McDonald J.B., Xu Y.J.A (1995) Generalization of the Beta Distribution with Applications. *Journal of Econometrics*, 66, 1–2, pp. 133–152.
- Negrea B. (2014) A Statistical Measure of Financial Crises Magnitude. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 397, pp. 54–75.
- Prescott E.S., Janicki H.P. (2006) Changes in the Size of U.S. Banks: 1960–2005. *Economic Quarterly*, Fall, pp. 291–316.
- Romer C.D., Romer D.H. (1989) Does Monetary Policy Matter? A New Test in the Spirit of Friedman and Schwartz. *NBER Macroeconomics Annual*, 4, pp. 121–184. MIT Press.
- Samanidou E., Zschischang E., Stauffer D., Lux T. (2007) Agent-based Models of Financial Markets. *Reports on Progress in Physics*, 70, 3, pp. 409.
- Sepanski J.H., Kong L. (2014) *A Family of Generalized Beta Distributions for Income*. arXiv Preprint arXiv: 07104614.
- Sotskov A.I. (2003) *Time-consistent Government Policies in the Sidrausky's Model*. New Economic School. Working Paper no 2003/034.
- Sutton J. (2003) *Sunk Costs and Market Structure: Price Competition, Advertising, and the Evolution of Concentration*. Cambridge, Mass, MIT Press.
- Wang Z. (2008) Income Distribution, Market Size and the Evolution of Industry. *Review of Economic Dynamics*, 11, 3, pp. 542–565.
- Yee T.W., Wild C.J. (1996) Vector Generalized Additive Models. *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, 58, 3, pp. 481–493.
- Zhu D., Zinde-Walsh V. (2009) Properties and Estimation of Asymmetric Exponential Power Distribution. *Journal of Econometrics*, 148, 1, pp. 86–99.