Экономический журнал ВШЭ. 2016. Т. 20. № 2. С. 268–284.
HSE Economic Journal, 2016, vol. 20, no 2, pp. 268–284.

Оценка показателей рынка недвижимости по статистическим данным на основе многомерного логарифмически нормального закона

Ласкин М.Б., Русаков О.В., Джаксумбаева О.И.

Статья посвящена исследованию рынка недвижимости на предмет наличия объективно обоснованных закономерностей ценообразования, формирования коэффициента капитализации и рентной ставки. Авторами статьи предлагается метод оценки показателей рынка недвижимости: коэффициента капитализации, рыночной стоимости недвижимости, рентной ставки на основе стохастической модели ценообразования. В применяемой модели главная стохастическая компонента представляет собой случайный вектор, составленный из совместно нормально распределенных логарифмов цен продаж и рентных ставок. Данный метод может быть использован для получения объективно обоснованных текущих рыночных показателей рынка недвижимости. Соответствие эмпирических распределений цен совместному логнормальному закону распределения вероятностей подтверждается статистическими данными по рынку недвижимости Санкт-Петербурга. Для проверки статистических гипотез используется критерий согласия Колмогорова – Смирнова. В соответствии со стандартами оценки Европейского союза, Великобритании, США, Российской Федерации, под рыночной стоимостью понимается «наиболее вероятная цена, по которой объект оценки может быть отчужден на дату оценки на открытом рынке в условиях конкуренции, когда стороны сделки действуют разумно, располагая всей необходимой информацией, а на величине цены сделки не отражаются какие-либо чрезвычайные обстоятельства». Рыночная стоимость рассматривается как числовая характеристика (мода) плотности распределения случайной величины (цен предложений или цен сделок). Коэффициент капитализации рассматривается как случайная величина, имеющая условное логарифмически нормальное распределение при условии, что стоимость недвижимости или значение

Ласкин Михаил Борисович – к.ф.-м.н., доцент, директор ООО «Инвест-Строй».
E-mail: laskinmb@yahoo.com
Русаков Олег Витальевич – к.ф.-м.н., доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Санкт-Петербургского государственного университета. E-mail: OViRusakov@yahoo.co.uk
Джаксумбаева Ольга Ильинична – к.э.н., ассистент кафедры информационных систем в экономике Санкт-Петербургский государственный университет. E-mail: olgadzh@rambler.ru

Статья поступила: 07.12.2015/Статья принята: 28.04.2016.

рентной ставки известны. В статье приводится пример распределений цен предложений, цен сделок на рынке стрит-ритейла (коммерческая торговая недвижимость) в г. Санкт-Петербурге в 2013 г. Произведен расчет коэффициентов капитализации для условных распределений. Показано, что коэффициент капитализации имеет сложную вероятностную природу и не является константой. Получено, что в рамках использования разработанной авторами стохастической модели ценообразования, при условии, что цены продажи и рентные ставки имеют совместное логарифмически нормальное распределение, оценки рыночной стоимости (рыночной ставки арендной платы), полученные сравнительным и доходным подходами, совпадают и не требуют обычной процедуры согласования.

Ключевые слова: рыночная стоимость недвижимости; стохастическая модель ценообразования; коэффициент капитализации; мода логарифмически нормального закона распределения; критерий согласия Колмогорова – Смирнова.

В теории и практике оценки при применении доходного подхода и метода прямой капитализации возникает вопрос о том, как определить коэффициент капитализации. Для этой цели используются разные подходы, например, такие как суммирование рисков, CAPM, модельные техники (модели Инвуда, Хоскольда, Ринга, Гордона). Обзор дан в книге Озерова Е.С. [Озеров, 2007]. Традиционные подходы предполагают возможность прогнозирования будущих доходов, учета таких величин, как требуемая норма доходности, безрисковая ставка, премии за различные виды рисков и т.д. Сконструированные таким образом коэффициенты (мультипликаторы) могут не соответствовать текущему состоянию рынка. Инвестору при планировании целесообразно проверить, имеет ли возможность текущее состояние рынка дать «требуемую» доходность. Для этого может быть использована обширная и доступная статистика по продаже и аренде объектов недвижимости в разных сегментах рынка, позволяющая делать обоснованные и весьма точные оценки как коэффициента капитализации, соответствующего текущему состоянию рынка, так и рыночной стоимости (рыночных ставок аренды). Как правило, в практике оценки выборки не являются представительными, содержат малое количество объектов сравнения. При этом, как справедливо отмечалось Грибовским С.В. [Грибовский, 2008], проверка статистических гипотез часто не производится. В настоящей статье предлагается метод, позволяющий на основе доступного статистического материала делать обоснованные оценки текущего значения коэффициента капитализации секторов рынка, рыночной стоимости, рыночной ставки аренды.

Как известно, коэффициент капитализации определяется соотношением

$$R = \frac{NOI}{V}, \tag{1}$$

где NOI – чистый операционный доход за период (как правило, за год); V – стоимость объекта; R – коэффициент капитализации (в процентах годовых). В настоящей статье мы рассматриваем приведенные величины (из расчета на 1 кв. м). При расчетах сравнительным подходом величины NOI и V определяются путем сравнения с некоторым множеством аналогичных характеристик объектов сравнения, следовательно, NOI и V являются случайными величинами. Случайная величина полностью описывается своей функцией распределения (функцией накопленных вероятностей) или плотностью распределения, если последняя существует. Как указано в Федеральном законе [ФЗ № 135 «Об оценочной деятельности в Российской Федерации», 1998], «…под рыночной стоимостью объекта оценки понимается наиболее вероятная цена, по которой объект оценки может быть отчужден на дату оценки на открытом рынке в условиях конкуренции, когда стороны сделки действуют разумно, располагая всей необходимой информацией, а на величине цены сделки не отражаются какие-либо чрезвычайные обстоятельства…». Аналогичные формулировки, в основе которых фигурирует «наиболее вероятная цена», содержат и зарубежные стандарты оценки (см., например: [IVS (p. 30 a), 2012; TEGOVA (EVS p. 5.3.1), 2013; USPAP (Standard rule 6-2, p.c.), 2014; RICS (p. 3.2.1), 2014]. Таким образом, рыночная стоимость (в одномерном случае) стандартами определена как мода закона распределения (наиболее вероятная цена – точка максимума плотности распределения цен). При определении коэффициента капитализации следует учитывать, что частное двух случайных величин само является случайной величиной, т.е. имеет свою функцию распределения и числовые характеристики, которые определяются законом распределения. Кроме того, следует учитывать, что величины NOI и V могут быть (и являются!) зависимыми случайными величинами (распределение каждой их них зависит от того, какое значение приняла вторая).

Одним из хорошо изученных и имеющих применение в экономических задачах является логарифмически нормальное распределение [Aitchinson, Brown,1963]. Существуют теоретические основания, подтвержденные практическими наблюдениями, считать, что распределения цен, образованные последовательными сравнениями большого количества объектов, имеют в качестве предела (по распределению) логарифмически нормальный закон. Например, в работе исследователей Центра японской экономики и бизнеса Колумбийского университета [Ohnishi, Mizuno, Shimizu, Watanabe, 2011] приводятся данные исследований по Большому Токио, в которых наблюдается (при отсутствии сильных внешних возмущений) логарифмически нормальный закон распределения цен. Работа исследователей Римского университета [Ciurlia, Gheno, 2009], посвященная исследованию динамики цен на недвижимость во времени, одним из следствий имеет следование цен закону логарифмически нормального распределения. Нами доказано [Русаков, Ласкин, Джаксумбаева, 2015], что при достаточно простых и естественных предположениях процесс последовательных сравнений цен сходится по распределению к логарифмически нормальному закону распределения. Этот результат очевидным образом распространяется и на арендные ставки, следовательно, и на случайную величину NOI, которую в рамках данной работы мы тоже полагаем распределенной логарифмически нормально.

Логарифмирование равенства (1) дает очевидное равенство

$$\ln(R) = \ln(NOI) - \ln(V), \tag{2}$$

что дает возможность переходить от рассмотрения логнормальных законов к нормальным законам (в том числе условным). Отметим также, что если $\ln(V)$, $\ln(NOI)$ распределены совместно нормально с параметрами μ_1, σ_1^2, μ_2, σ_2^2 соответственно, с коэффициентом корреляции ρ, то $\ln(R)$ распределен нормально с параметрами $\mu_2-\mu_1, \sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2$. Наиболее вероятными значениями (модами логнормальных законов) величин V, NOI, R являются

$$Mode(V)=\exp\left(\mu_1-\sigma_1^2\right),$$
$$Mode(NOI)=\exp\left(\mu_2-\sigma_2^2\right), \qquad (3)$$
$$Mode(R)=\exp\left(\mu_2-\mu_1-\sigma_1^2-\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2\right).$$

В практике оценки при определении коэффициента капитализации часто говорят о «наиболее типичном» коэффициенте капитализации (разумеется, для изучаемого сектора рынка). В рамках данной статьи и следуя логике определения рыночной стоимости, данной в ФЗ № 135, мы будем вместо «наиболее типичного» (этот термин нуждается в определении) говорить о наиболее вероятном значении коэффициента капитализации.

Замечание 1. Результат деления $\dfrac{Mode(NOI)}{Mode(V)}$ не является наиболее вероятным («наиболее типичным»). Как показано ниже, если удалось доказать закон двумерного (совместно логарифмически нормального) распределения величин NOI и V, то за коэффициентом капитализации остается лишь справочное значение – рыночная стоимость будет определена по условному закону распределения величины V, при условии $NOI=noi$.

Если случайные величины NOI и V зависимы, имеют совместное логарифмически нормальное распределение, то все условные (одномерные) распределения величины V, при условии $NOI=noi$ и величины NOI, при условии $V=v$, будут логарифмически нормальными. Обозначим рыночную стоимость (как наиболее вероятное значение) $Mode\left(V\mid NOI=noi\right)$, наивероятный коэффициент капитализации при условии, что арендная ставка известна $(NOI=noi)$, обозначим $Mode\left(R\mid NOI=noi\right)$.

Утверждение 1. Если случайные величины NOI и V имеют совместное логарифмически нормальное распределение, то при фиксированном $NOI=noi$ рыночная стоимость равна

$$Mode\left(V\mid NOI=noi\right)=\exp\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\ln(noi)-\mu_2\right)-\sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)\right), \qquad (4)$$

наивероятный коэффициент капитализации равен

$$Mode\left(R\mid NOI=noi\right)=\exp\left(\ln(noi)-\mu_1-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\ln(noi)-\mu_2\right)-\sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)\right). \qquad (5)$$

Доказательство сводится к записи известных формул для переменных NOI и V (см. в Приложении).

Замечание 2. Наиболее вероятное значение условного коэффициента капитализации (при условии $NOI = noi$) не соответствует результату деления $\frac{noi}{ModeV}$. Если удается статистически доказать совместное двумерное распределение, значение коэффициента капитализации как мультипликатора, переводящего ставку ренты в рыночную стоимость, утрачивается. Рыночная стоимость определяется по формуле (4). За коэффициентом капитализации остается только справочная функция, как характеристики состояния рынка.

Для недвижимости, способной приносить доход, важное значение имеет изучение двумерного совместного распределения величин V и NOI. Его построение приводит к необходимости вместо одномерных рыночных стоимости и рентной ставки рассматривать наиболее вероятную пару (V, NOI). Наиболее вероятной парой является точка максимума плотности совместного распределения.

Утверждение 2. Абсолютный максимум плотности совместного (двумерного) логарифмически нормального распределения величин V и NOI находится в точке с координатами:

$$V = \exp\left(\mu_1 - \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right), \quad NOI = \exp\left(\mu_2 - \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right). \tag{6}$$

Доказательство также не представляет большой сложности (см. в Приложении).

Замечание 3. Коэффициент капитализации в точке абсолютного максимума равен $R = \exp\left(\mu_2 - \mu_1 - \sigma_2^2 + \sigma_1^2\right)$. Значение R в данном случае совпадает с частным от деления наивероятных безусловных значений V, NOI, но не совпадает с безусловным наивероятным значением (см. формулы (3)).

Замечание 4. Построение двумерного совместного распределения величин (V, NOI) полностью описывает состояние сектора рынка, статистика по которому используется для расчетов. Может быть определена наиболее вероятная пара (V, NOI) и соответствующий ей коэффициент капитализации. По заданному значению $NOI = noi$ (или $V = v$) может быть определена рыночная стоимость (или рыночная ставка аренды). Геометрически плотности условных распределений являются сечениями двумерной плотности при $NOI = noi$ (или $V = v$). Коэффициент капитализации сохраняет справочное значение как одна из характеристик состояния рынка.

Замечание 5. Наиболее вероятная пара сразу дает как рыночную стоимость, определенную сравнительным подходом, так и рыночную стоимость, определенную доходным подходом методом прямой капитализации. Место обычного согласования результатов занимает расчет точки абсолютного максимума двумерной плотности.

Гипотеза о совместном логарифмически нормальном распределении величин V и NOI (совместном нормальном распределении их логарифмов) требует проверки каждой двумерной выборки на совместную нормальность. Для того чтобы вектор был распределен совместно нормально, необходимо и достаточно, чтобы любая линейная комбинация его компонент была распределена нормально (как одномерная случайная величина). Так как проверить на нормальность все линейные комбинации практически невозможно, мы предлагаем критерий, в котором используются повороты исходного вектора с последующей проверкой одномерных распределений компонент на нормальность.

Утверждение 3 (Критерий двумерной совместной нормальности). Рассмотрим матрицу поворота системы координат на положительный угол φ, где $\varphi \in [0, +\pi)$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Пусть $(X, Y)^T$ – случайный вектор со значениями в R^2 с нулевым математическим ожиданием компонент. Каждая компонента вектора $(X_\varphi, Y_\varphi)^T = A_\varphi (X, Y)^T$ имеет нормальное распределение для каждого $\varphi \in [0, +\pi)$ тогда и только тогда, когда вектор $(X, Y)^T$ имеет совокупно нормальное распределение. Доказательство дано в Приложении.

Отметим, что если вектор (X, Y) имеет совместное двумерное нормальное распределение, то и вектора вида $(aX + bY,\ cX + dY)$ имеют совместное нормальное распределение для любых вещественных (a, b, c, d). Кроме того, вектор

$$(aX + bY,\ cX + dY,\ pX + qY)$$

будет иметь совместное нормальное распределение в R^3. Из этого следует, что если статистически подтверждается совместная двумерная логнормальность пары (V, NOI), то пары (V, R) и (R, NOI), а также тройка (V, NOI, R) совместно логарифмически нормальны.

Рассмотрим следующий пример. Для построения примера были использованы данные ГУП ГУИОН г. Санкт-Петербурга, размещенные на официальном сайте НП СРОО «Сообщество профессионалов оценки» (www.cpa-russia.org). Рассматривались цены предложений и продаж, ставки аренды (предложения и совершенные сделки) для коммерческой торговой недвижимости в г. Санкт-Петербурге в 2013 г. Основной проблемой в данном случае и в практике оценки является отсутствие парных наблюдений (цифры по продаже и аренде по одному и тому же объекту). Данную проблему мы решаем путем группирования данных. Для группировки данных мы использовали следующий прием, основанный на информации, опубликованной в отчете об определении кадастровой стоимости [КУГИ Правительства Санкт-Петербурга, 2012].

А) В Отчете об определении кадастровой стоимости [КУГИ Правительства Санкт-Петербурга, 2012] весь город условно разбит на 285 экономических зон. Принцип разбиения – по социально-экономической однородности. Следуя логике отчета, мы предположили, что в пределах одной экономической зоны цены не слишком отличаются друг от друга и могут пониматься как цены на однородные объекты (т.е. следуют стохастической модели последовательных сравнений и асимптотически подчиняются логарифмически нормальному закону распределения с малой дисперсией).

Б) Цены продаж и цены аренды (как по предложениям, так и по сделкам) прологарифмированы и усреднены в каждой такой экономической зоне, в которой в 2013 г. были предложения или совершались сделки. Полученная соответствующая пара чисел $\ln(V)$ и $\ln(NOI)$ считается одним парным наблюдением. Оцененные параметры получившихся двумерных законов имеют следующие значения:

для пары цена предложения – цена предложения аренды

(7) $\mu_1 = 5{,}05754,\ \mu_2 = 2{,}91559,\ \sigma_1 = 0{,}37232,\ \sigma_2 = 0{,}34009,\ \rho = 0{,}53769;$

для пары цена сделки (продажа) – цена сделки (аренда)

(8) $\mu_1 = 4{,}62730,\ \mu_2 = 2{,}67422,\ \sigma_1 = 0{,}55005,\ \sigma_2 = 0{,}56403,\ \rho = 0{,}27897.$

В) Затем все наблюдения мы центрируем. На рис. 1 показаны диаграммы рассеивания наблюденных точек на плоскости $\ln(V)$ и $\ln(NOI)$ для пар цена предложения – цена предложения аренды (слева) и (справа) для пар цена сделки (продажа) – цена сделки (аренда). Центры координат помещены в точку $\mu_1 = 5{,}05754,\ \mu_2 = 2{,}91559$ на левой диаграмме, в точку $\mu_1 = 4{,}62730,\ \mu_2 = 2{,}67422$ на правой диаграмме.

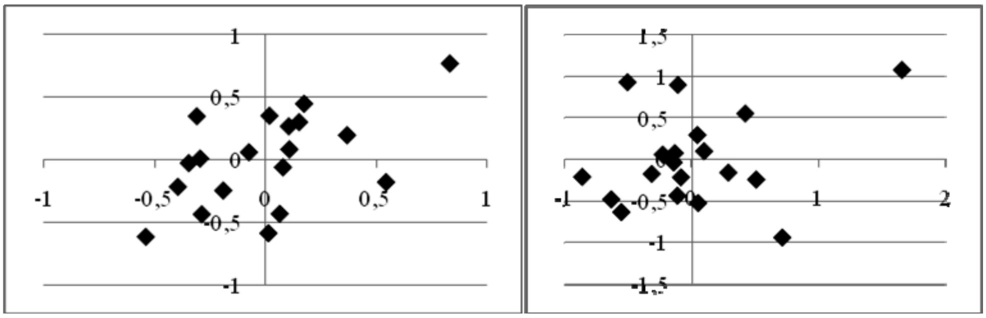

Рис. 1. Диаграммы рассеивания центрированных пар логарифмов цен продаж и логарифмов цен аренды (слева по предложениям, справа по сделкам)

Г) Проверяя гипотезу совместной нормальности распределения $\ln(V)$ и $\ln(NOI)$, мы применили критерий Утверждения 3. Для этого использовался тест Колмогорова – Смирнова (КС-тест) для исходных выборок $(\ln(V) - \mu_1)$, $(\ln(NOI) - \mu_2)$ и выборок, полученных из исходных путем поворота против часовой стрелки на угол φ от 0 до π с шагом в 1 градус. При заданном значении p-value (> 0,05) оснований отвергнуть гипотезу о совместном логарифмически нормальном распределении нет. Ниже показаны графики зависимости значения p-value от угла поворота для всего цикла испытаний для пар цена предложения – цена предложения аренды (рис. 2) и для пар цена сделки (продажа) – цена сделки (аренда) (рис. 3). Не наблюдалось ни одного значения ниже 0,05 (минимальные 0,39, 0,37). Принимается гипотеза о совместном логарифмически нормальном распределении величин V и NOI .

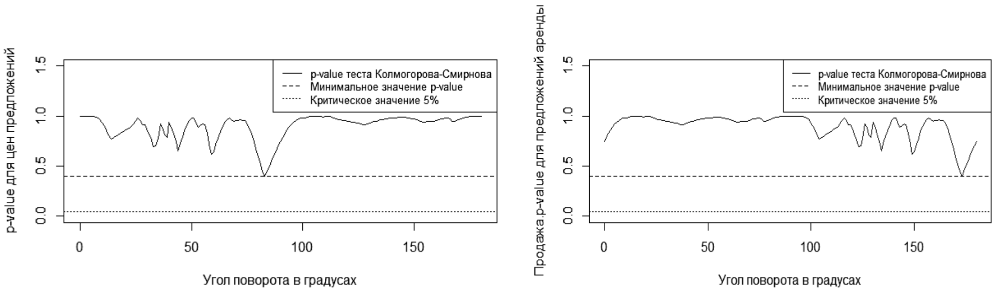

Рис. 2. Зависимость значения p-value: слева для переменной V от угла поворота φ, справа для переменной NOI (по ценам предложений)

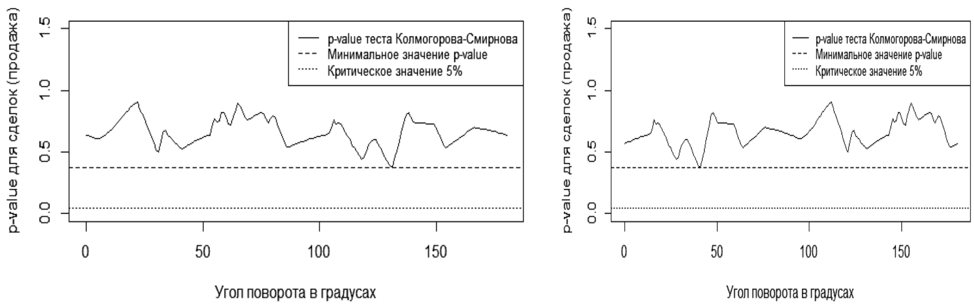

Рис. 3. Зависимость значения p-value: слева для переменной V от угла поворота φ, справа для NOI (по ценам сделок)

На рис. 4 представлены плотность теоретического двумерного логарифмически нормального распределения величин V и NOI (для цен предложений), построенного по оцененным параметрам (7). На левой диаграмме показана проекция поверхности на плоскость (V, NOI). Хорошо видны линии рассеяния, отвечающие фиксированному значению вероятности. На правой диаграмме – трехмерное изображение плотности. Хорошо видны линии одномерных условных логарифмически нормальных распределений V (при фиксированном NOI) и линии условных логарифмически нормальных распределений NOI (при фиксированном V).

Подставляя параметры закона распределения (7) в (6), получаем координаты точки абсолютного максимума: $V = 127{,}847$ (тыс. руб./1 кв. м), $NOI = 15{,}361$ (тыс. руб./1 кв. м в год), при которых коэффициент капитализации равен $R = \exp\left(\mu_2 - \mu_1 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2\right) = 12{,}02\%$ (это оценка капитализации на рынке стрит-ритейла в целом по рынку Санкт-Петербурга в 2013 г.). R при этом не является наиболее вероятным, но соответствует наивероятной паре и даже отношению одномерных наиболее вероятных значений V , NOI .

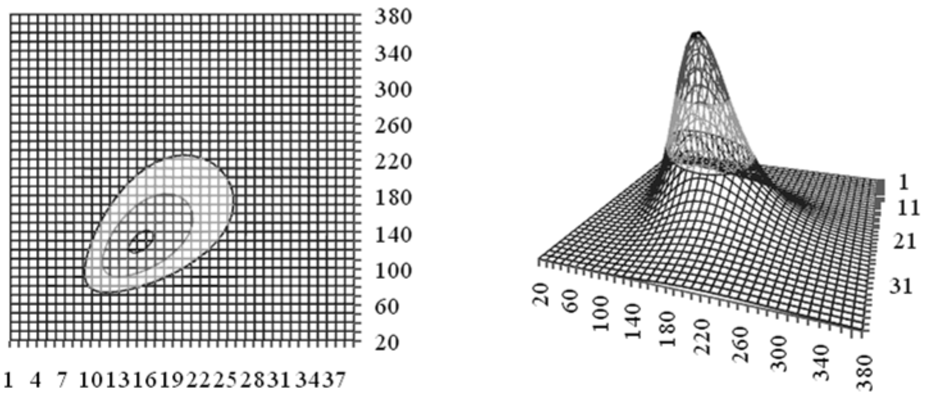

Рис. 4. Плотность двумерного логарифмически нормального распределения, построенного по оцененным параметрам цен предложений V и предложений арендной платы NOI для сектора стрит-ритейла г. Санкт-Петербурга в 2013 г.

На рис. 5 представлены плотность двумерного логарифмически нормального распределения величин (V, NOI) для цен сделок. Параметры закона распределения даны в формулах (8).

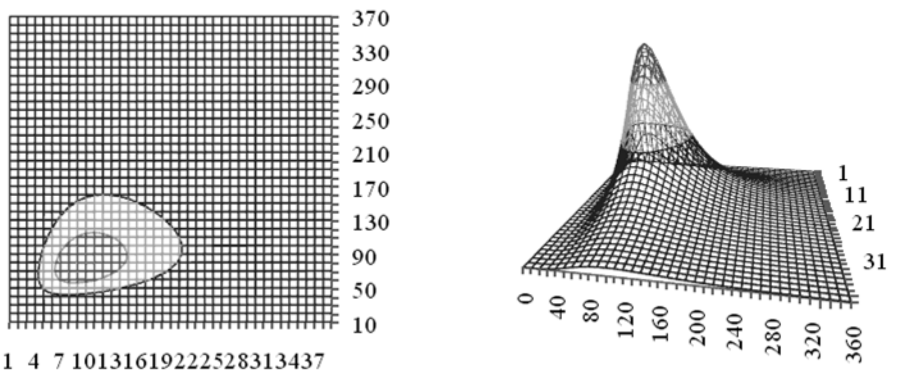

Рис. 5. Плотность двумерного логарифмически нормального распределения, построенного по оцененным параметрам цен сделок (продажа) V и цен сделок по аренде NOI для сектора стрит-ритейла г. Санкт-Петербурга в 2013 г.

Подставляя параметры закона распределения (8) в (6), получаем координаты точки абсолютного максимума: $V = 69,302$ (тыс. руб./1 кв. м), $NOI = 9,678$ (тыс. руб./1 кв. м в год), при которых коэффициент капитализации равен $R = \exp\left(\mu_2 - \mu_1 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2\right) = 13,96\%$.

Обсуждение полученных результатов. Оценка коэффициента капитализации для наиболее вероятной пары (V, NOI), полученная по ценам предложений $R = 12{,}02\%$, близка к оценке, полученной по ценам сделок $R = 13{,}96\%$, но является более консервативной. Обращает на себя внимание разница наиболее вероятных пар, указывающая на значительное расхождение между ценами предложений и ценами сделок по аренде и, особенно, по ценам сделок продаж. Это, по-видимому, индивидуальная особенность использованных данных. Данные по сделкам вполне достоверны, так как являются результатами торгов, проведенных Фондом имущества г. Санкт-Петербурга. Данные по предложениям, содержащиеся в использованной базе, отличаются высокими ценами, и сравнение с ценами сделок говорит о потенциально возможной очень высокой скидке на торг (около 50%).

В случае, если для объекта (оценки) известна ставка арендной платы $NOI = noi$ (например, использование объекта соответствует наилучшему экономическому использованию и ставка аренды известна), рыночная стоимость определяется по формуле (4). Наивероятный коэффициент капитализации в этом случае определяется по формуле (5). В таблицах 1, 2 (для случая условных распределений) представлены: при заданном значении $NOI = noi$ наиболее вероятная цена $ModeV$ (рыночная стоимость 1 кв. м) и коэффициент капитализации R. Величина R относится только к той паре значений, для которой рассчитана и имеет только справочное значение. Рыночная стоимость (ставка аренды) определяется по плотности условного распределения. Результаты для цен предложений приведены в табл. 1, а для цен сделок – в табл. 2.

Таблица 1.

Ставки арендной платы (тыс. руб. за 1 кв. м в год) и соответствующие им рыночная стоимость (тыс. руб. за 1 кв. м) и коэффициент капитализации для пары цена предложения – цена предложения аренды

$NOI = noi$	$ModeV$	R, %
12,000	110,551	10,85
12,500	113,239	11,04
13,000	115,884	11,22
13,500	118,488	11,39
14,000	121,051	11,57
14,500	123,578	11,73
15,000	126,069	11,90
15,361	**127,847**	**12,02**
15,500	128,526	12,06
16,000	130,950	12,22
16,500	133,344	12,37
17,000	135,708	12,53
17,500	138,044	12,68
18,000	140,352	12,82

Таблица 2.

Ставки арендной платы (тыс. руб. за 1 кв.м в год) и соответствующие им рыночная стоимость (тыс. руб. за 1 кв.м) и коэффициент капитализации для пар цена сделки (продажа) – цена сделки (аренда)

$NOI = noi$	$ModeV$	R, %
6,000	60,876	9,86
6,500	62,211	10,45
7,000	63,474	11,03
7,500	64,673	11,60
8,000	65,815	12,16
8,500	66,906	12,70
9,000	67,951	13,24
9,500	68,954	13,78
9,678	**69,302**	**13,96**
10,000	69,920	14,30
10,500	70,851	14,82
11,000	71,751	15,33
11,500	72,621	15,84
12,000	73,464	16,33

Если вернуться к рассмотрению совместного двумерного распределения случайных величин (V, NOI), то следует отметить, что приведенные в табл. 1 и 2 пары (V, NOI), как точки на плоскости (V, NOI), не равновероятны: по мере удаления от наиболее вероятных значений эти пары становятся более редкими (маловероятными). Кроме этого, табл. 1 и 2 иллюстрируют тот факт, что R не является константой.

Выводы.

1. Коэффициент капитализации является случайной величиной, определенной соотношением (1), где числитель и знаменатель – случайные величины.
2. Если рентные ставки и цены недвижимости имеют совместное логарифмически нормальное распределение, то и коэффициент капитализации, определяемый по условным законам распределения V или NOI, тоже распределен логарифмически нормально.
3. При построении двумерного закона совместного распределения величин (V, NOI) за коэффициентом капитализации остается лишь справочное значение, как одной из важных характеристик рынка.
4. При построении двумерного закона совместного распределения величин (V, NOI) могут быть получены оценки рыночной стоимости (рыночной ставки арендной платы), соответствующие оценкам, которые могли быть получены сравнительным и

доходным подходами. Согласование результатов не требуется, так как они получаются одинаковыми.

5. Двумерный закон распределения величин (V, NOI), поверхность плотности распределения, параметры закона μ_1, σ_1, μ_2, σ_2, ρ полностью описывают состояние изучаемого сектора рынка на дату публикации статистического материала.

Приложение.

Доказательство Утверждения 1. Рассмотрим двумерное логнормальное распределение величин V, NOI и двумерное нормальное распределение величин $\ln(V)$, $\ln(NOI)$. Известно, что плотность двумерного нормального распределения с нулевым вектором средних задается при $x, y \in R$ следующей формулой:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]\right),$$

где σ_x^2, σ_y^2 – дисперсии случайных величин X и Y, соответственно; ρ – коэффициент корреляции компонент вектора X и Y. Общая формула для условной плотности вектора, имеющего совместную плотность $p(x, y)$,

$$p_{X|Y=y}(x) = p(x \mid y) = \frac{p(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx} = \frac{p(x,y)}{p(y)}.$$

Тогда выражение для формулы условной плотности двумерного нормального вектора:

$$f(X \mid y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{x}{\sigma_x} - \rho\frac{y}{\sigma_y}\right)^2\right).$$

Таким образом, при каждом y случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $E(X \mid Y=y) = \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y$, $D(X \mid Y=y) = \sigma_x^2\left(1-\rho^2\right)$. Полагая $X = \ln(NOI) - \mu_2$, $Y = \ln(V) - \mu_1$, $\sigma_1^2 = \sigma_y^2$, $\sigma_2^2 = \sigma_x^2$, получаем формулу условной плотности величины $\ln(V)$ при условии $\ln(NOI) = \ln(noi)$:

$$f\left(\ln(V)\,|\,\ln(NOI)=\ln(noi)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{\ln(V)-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\frac{\ln(noi)-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}.$$

Таким образом, условное распределение $\ln(V)$ (при условии $\ln(NOI)=\ln(noi)$) нормально с параметрами

$$E(\ln(V)\,|\,\ln(NOI)=\ln(noi))=\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\ln(noi)-\mu_2\right),$$

$$D(\ln(V)\,|\,\ln(NOI)=\ln(noi))=\sigma_1^2\left(1-\rho^2\right),$$

следовательно, V распределено логарифмически нормально с теми же параметрами, и мода V (наиболее вероятное значение – рыночная стоимость при заданном значении чистого годового дохода) равна

$$Mode(V\,|\,NOI=noi)=\exp\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\ln(noi)-\mu_2\right)-\sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)\right).$$

Из соотношения (2) следует, что при фиксированном $NOI=noi$ условные распределения коэффициента капитализации R логарифмически нормальны и наиболее вероятное значение коэффициента капитализации равно

$$Mode(R\,|\,NOI=noi)=\exp\left(\ln(noi)-\mu_1-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\ln(noi)-\mu_2\right)-\sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)\right).$$

Утверждение 1 доказано.

Доказательство Утверждения 2.

Плотность двумерного логарифмически нормального распределения величин X и Y с нулевым вектором средних задается формулой

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\frac{1}{xy}\exp\left(-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(\ln(x))^2}{\sigma_x^2}-2\rho\frac{\ln(x)\ln(y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(\ln(y))^2}{\sigma_y^2}\right]\right),$$

где $\dfrac{1}{xy}$ – значение Якобиана преобразования системы координат при переходе к логарифмическим координатам. Максимум значения этой функции достигается в точке, в которой все производные по направлениям равны нулю. Вычисляя частные производные и приравнивая их к нулю, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$-\frac{x}{\sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)}+\frac{\rho y}{\sigma_1\sigma_2\left(1-\rho^2\right)}=1,$$

$$\frac{\rho x}{\sigma_1\sigma_2\left(1-\rho^2\right)}-\frac{y}{\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)}=1$$

и ее решение: $x=-\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2$, $y=-\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2$.

Вводим обозначение $x=\ln(V)-\mu_1$, $y=\ln(NOI)-\mu_2$ и получаем для переменных V и NOI координаты точки абсолютного максимума:

$$V=\exp\left(\mu_1-\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right),\ \ NOI=\exp\left(\mu_2-\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right).$$

Утверждение 2 доказано.

Доказательство Утверждения 3.

Для доказательства воспользуемся известным критерием совокупной нормальности: случайный вектор совокупно нормален тогда и только тогда, когда любая его линейная комбинация имеет одномерное нормальное распределение.

Необходимость. Так как поворот – линейное преобразование, а суперпозиция линейных преобразований – также линейное преобразование, то любая линейная комбинация компонент вектора $\left(X_\varphi,Y_\varphi\right)^T$ есть линейная комбинация вектора $(X,Y)^T$.

Достаточность. Теперь допустим, что для любого $\varphi\in\left[0,\pi\right)$ каждая из компонент вектора $\left(X_\varphi,Y_\varphi\right)^T$ имеет одномерное нормальное распределение (с нулевым средним). В частности, $Y_\varphi = X\sin\varphi+Y\cos\varphi$. Очевидно, вырожденные случаи $\sin\varphi=0$, $\cos\varphi=0$ дают одномерную нормальность каждой из компонент X и Y. Рассмотрим невырожденный случай $\sin\varphi\neq 0$, $\cos\varphi\neq 0$. Запишем $\frac{1}{\cos\varphi}Y_\varphi = X\,\mathrm{tg}\varphi+Y$, откуда следует, что любая линейная комбинация X и Y с невырожденными коэффициентами является нормально распределенной случайной величиной. Аналогично для X_φ.

Утверждение 3 доказано.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Грибовский С.В. Математические методы оценки стоимости недвижимого имущества. Учебное пособие / С.В. Грибовский, С.А. Сивец. М.: Финансы и статистика, 2008.

Ласкин М.Б., Русаков О.В., Джаксумбаева О.И., Ивакина А.А. Особенности рыночной стоимости на рынке недвижимости при логарифмически нормальном распределении // Имущественные отношения в Российской Федерации. 2016. № 2(173). С. 40–50.

Озеров Е.С. Экономический анализ и оценка недвижимости. Санкт-Петербург: Изд-во «МКС», 2007.

Отчет об определении кадастровой стоимости объектов недвижимости (за исключением земельных участков), расположенных на территории Санкт-Петербурга. КУГИ Правительства Санкт-Петербурга. Том 2, раздел 2.3. СПб., 2012. (http://rosreestr.ru/wps/portal/p/cc_ib_portal_services/cc_ib_ais_fdg/co/) Субъект РФ: С-Петербург. Виды объектов: Недвижимость, помещения. Отчет № 32-1-0733/2012(2), Санкт-Петербург, 30.11.2012.

Русаков О.В. Стохастическая модель ценообразования на рынке недвижимости: формирование логнормальной генеральной совокупности / О.В. Русаков, М.Б. Ласкин, О.И. Джаксумбаева // Вестник УМО. 2015. № 5. С. 116–127.

Федеральный стандарт оценки № 2 «Цель оценки и виды стоимости (ФСО № 2)» (утвержден Приказом Минэкономразвития России № 255 от 20.07.2007. Зарегистрирован в Минюсте России 23.08.2007).

Aitchinson J., Brown J.A.C. The Lognormal Distribution with Special References to its Uses in Economics. Cambridge University Press, 1963.

Ciurlia P., Gheno A. A Model for Pricing Real Estate Derivatives with Stochastic Interest Rates // Mathematical and Computer Modelling. 2009. 50. P. 233–247.

European Valuation Standards 2012 / The European Group of Valuers' Associations. Brussels, 2012. (http://www.tegova.org/en/p4fe1fcee0b1db)

International Valuation Standards 2013. Framework and Requirements / International Valuation Standard Council. London, 2013. (http://www.ivsc.org/sites/default/files/IVS%202013%20without%20guidance.pdf)

Ohnishi T., Mizuno T., Shimizu C., Watanabe T. On the Evolution of the House Price Distribution. Columbia Business School. Center of Japanese Economy and Business, Working Paper Series, № 296. May 2011.

Royal Institution of Chartered Surveyors Valuation Professional Standard 2014 / RICS. 2014.

Uniform Standards of Professional Appraisal Practice, 2014–2015 edition. Appraisal Institute, 2014. (http://www.uspap.org/)

Estimation of the Real Estate Market Indexes According to Statistical Data and Based on Multidimensional Log-normal Distribution

Laskin Michael[1], Rusakov Oleg[2], Jaksumbaeva Olga[3]

[1] OOO «Invest-Stroy»,
28–30, Sadovaya str., St. Petersburg, 191023, Russian Federation.
E-mail: laskinmb@yahoo.com

[2] Saint-Peterburg State University,
7–9, Universitetskaya emb., St.Petersburg, 199034, Russian Federation.
E-mail: OViRusakov@yahoo.co.uk

[3] Saint-Peterburg State University,
7–9, Universitetskaya emb., St.Petersburg, 199034, Russian Federation.
E-mail: olgadzh@rambler.ru

The article researches a real estate markets with the aim to find objectively justified patterns for the following real estate market indexes: pricing, rate of rent, and capitalization ratio appraisals. Authors of the article introduce a new method of estimation of these indexes. This method is based on a stochastic model in which the main stochastic component is a random vector with jointly normal distributed terms: logarithm of prices of sales and logarithm of rates of rent. The introduced method is applied for monitoring of objectively justified indexes for real estate markets. Statistical processing of Saint-Petersburg real estate market data results that the empirical distributions of the prices significantly fit to the two dimensional lognormal law of distribution. For establishing statistical hypotheses accordance the authors use Kolmogorov – Smirnov test of fit. The modern standards of appraisal in EU, UK, USA, Russian Federation uniquely treat real estate market value as follows: "For the aim of establishing of the market value one determines the most probable price with the following necessary conditions. At this price the real estate object could be sold on the date of estimation in the open competitive market, when the parties to the deal behave reasonably, having full access to all necessary information, and the price of the deal is not affected by any force majeure circumstances". The market value is defined as a numerical characteristic (mode) of density of distribution of a random value: price of supply or price of bargain. In the article the capitalization ratio appraisals is a random value with conditionally lognormal distribution under condition that the price or the rate of rent is known. The paper gives examples of empirical distributions of prices of supplies, prices of bargains on the street retail markets for Saint-Petersburg in 2013. The examples of calculation of the capitalization ratio appraisals are also given. The article proves that the capitalization ratio appraisals has a non-trivial probabilistic nature and it is not a constant. The article also proves that in the frame of the introduced stochastic model of pricing under assumption of the joint lognormality of the price of sale and the rate of rent two most used estimations of the market value equal, where the first one is based on the gain approach and the second one is base on the comparative approach. Consequently, a corresponding procedure of concordance this two approaches is not needed.

Key words: real estate market value; stochastic model of pricing; capitalization ratio; mode of the logarithmically normal law of distribution; Kolmogorov – Smirnov test of fit.

JEL Classification: C46, R30.

* *
*

References

Gribovskij S.V. (2008) *Matematicheskie metody ocenki stoimosti nedvizhimogo imushestva* [Mathematical Methods of Real Estate Cost Estimation (eds. S.V. Gribovsky, S.A. Sivets)]. Educational grant. Moscow: Finance and Statistics.

Laskin M.B., Rusakov O.V., Dzhaksumbaeva O.I., Ivakina A.A. (2016) Osobennosti rynochnoj stoimosti na rynke nedvizhimosti pri logarifmicheski normal'nom raspredelenii [Features of Market Value in the Real Estate at Logarithmic Normal Distribution Model]. *The Property Relations in the Russian Federation*, 2, 173, pp. 40–50.

Ozerov E.S. (2007) *Ekonomicheskij analiz i ocenka nedvizhimosti* [Economical Analysis and Real Estate Cost Estimation]. St. Petersburg, MKS Publishing House.

KUGI, St. Petersburg Government (2012) *Otchet ob opredelenii kadastrovoj stoimosti obektov nedvizhimosti (za iskljucheniem zemel'nyh uchastkov), raspolozhennyh na territorii Sankt-Peterburga* [Cadastre Cost Determination Report of the Real Estate Objects (except for the land plots) located in St. Petersburg] Vol. 2, section 2.3. SPb. Available at: http://rosreestr.ru/wps/portal/p/cc_ib_portal_services/cc_ib_ais_fdg/co/) Territorial subject of the Russian Federation: St.-Petersburg. Types of objects: Real estate, rooms. Report no 32-1-0733/2012(2), Sankt-Peterburg, 30.11.2012.

Rusakov O.V. (2015) Stohasticheskaja model' cenoobrazovanija na rynke nedvizhimosti: formirovanie lognormal'noj general'noj sovokupnosti [Stochastically Pricing Model in the Real Estate Market: Formation of Lognormal Population (eds. O.V. Rusakov, M.B. Laskin, O.I. Dzhaksumbaeva)]. *UMO Bulletin*, 5, pp. 116–127.

The Ministry of Economic Development of the Russian Federation (2007) *Federal'nyj standart ocenki no 2 «Cel' ocenki i vidy stoimosti (FSO no 2)»* [The Federal appraisal standard no 2 "Appraisal Purpose and Types of Cost"] (approved by the Order of the Ministry of Economic Development of the Russian Federation no 255 from 7/20/2007. It is registered in the Ministry of Justice of the Russian Federation 8/23/2007).

Aitchinson J., Brown J.A.C. (1963) *The Lognormal Distribution with Special References to its Uses in Economics*. Cambridge University Press.

Appraisal Institute (2014) *Uniform Standards of Professional Appraisal Practice, 2014–2015 edition*. Available at: http://www.uspap.org/

Ciurlia P., Gheno A. (2009) A Model for Pricing Real Estate Derivatives with Stochastic Interest Rates. *Mathematical and Computer Modelling*, 50, pp. 233–247.

International Valuation Standard Council (2013) *International Valuation Standards 2013*. Framework and Requirements. London. Available at: http://www.ivsc.org/sites/default/files/IVS%202013%20without% 20guidance.pdf

Ohnishi T., Mizuno T., Shimizu C., Watanabe T. (2011) *On the Evolution of the House Price Distribution*. Columbia Business School. Center of Japanese Economy and Business, Working Paper Series, no 296, May.

RICS (2014) *Royal Institution of Chartered Surveyors Valuation Professional Standard 2014*.

The European Group of Valuers' Associations (2012). *European Valuation Standards 2012*. Brussels. Available at: http://www.tegova.org/en/p4fe1fcee0b1db