Экономический журнал ВШЭ. 2016. Т. 20. № 4. С. 691–710.
HSE Economic Journal, 2016, vol. 20, no 4, pp. 691–710.

Макроэкономическое прогнозирование с помощью BVAR Литтермана[1]

Демешев Б.Б., Малаховская О.А.

В работе проводится сравнение прогнозных способностей моделей случайного блуждания, частотной (VAR) и байесовской векторных авторегрессий с априорным распределением Миннесоты (BVAR) по российским квартальным данным 1995–2014 гг. Максимальное количество переменных, включаемых в модель, равно 14, что требует эндогенного подбора оптимального гиперпараметра регуляризации. Для его определения используется механизм, описанный в работах [Bańbura et al., 2010; Bloor, Matheson, 2011]. В соответствии с этим механизмом гиперпараметр регуляризации подбирается так, чтобы качество прогнозов BVAR и частотной VAR моделей совпадало при минимальной рассматриваемой размерности модели (три переменных). Для любой размерности BVAR-модели оптимальная величина гиперпараметра регуляризации является робастной к рассматриваемым функциям относительной прогнозной точности.

В результате показано, что на исследуемой выборке BVAR позволяет получить более точный прогноз, чем частотная VAR. Для ключевых макроиндикаторов (индекса промышленного производства, индекса потребительских цен и процентной ставки) на всех рассматриваемых прогнозных горизонтах и независимо от числа переменных в модели среднеквадратичная ошибка прогноза модели BVAR оказывается ниже, чем для частотной VAR. Кроме того, BVAR позволяет получить прогноз с большей точностью, чем модель случайного блуждания для ИПЦ и белого шума для процентной ставки. Однако предсказать индекс промышленного производства с помощью BVAR более точно, чем с помощью модели случайного блуждания, не удается.

Ключевые слова: VAR; BVAR; априорное распределение Миннесоты; макроэкономическое прогнозирование.

---

[1] Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 г.

Демешев Борис Борисович – ст. преподаватель Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ). E-mail: boris.demeshev@gmail.com
Малаховская Оксана Анатольевна – научный сотрудник Научно-учебной лаборатории макроэкономического анализа Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ). E-mail: omalakhovskaya@hse.ru

Статья поступила: 03.07.2016/Статья принята: 15.11.2016.

1. Введение

Цель данной работы состоит в сравнении качества конкурирующих прогнозов ключевых макроиндикаторов российской экономики. Прогнозы строятся с помощью простейших одномерных моделей, частотных векторных авторегрессий (VAR, Vector AutoRegression) и байесовских VAR (BVAR, Bayesian VAR). Отличительной чертой работы является эндогенный выбор гиперпараметра BVAR, отвечающего за жесткость ограничения (степень регуляризации), накладываемого априорным распределением. Для оценивания моделей используются 14 российских макроэкономических временных рядов с сентября 1995 г. по май 2014 г. При сравнении прогнозной силы моделей ключевыми показателями являются индекс промышленного производства, индекс потребительских цен и процентная ставка. Качество точечных прогнозов оценивается с помощью среднеквадратичной ошибки.

В работе были получены следующие результаты. Для всех трех ключевых переменных BVAR обеспечивает устойчиво лучший прогноз, чем VAR. BVAR также обеспечивает более точный прогноз для индекса потребительских цен и процентной ставки, чем более простые одномерные модели. Однако для индекса промышленного производства BVAR, оцененная согласно используемому алгоритму, прогнозирует хуже, чем случайное блуждание.

Построение точных макроэкономических прогнозов является важным условием проведения центральными банками политики, направленной на достижение поставленных целей. В настоящее время одним из наиболее популярных методов для прогнозирования является использование VAR[2]. Получившая свое распространение после работы [Sims, 1980] модель VAR покорила исследователей своей относительной простотой, сочетающейся с неплохими прогнозными способностями[3].

Оценивание частотной VAR (методом максимального правдоподобия или методом наименьших квадратов) таит в себе опасность излишней параметризации. Проблема излишней параметризации состоит в том, что при большом количестве оцениваемых параметров модель может давать точные внутривыборочные прогнозы при плохих вневыборочных. В VAR-моделях проблема появляется из-за того, что количество оцениваемых параметров растет квадратично с увеличением размерности модели (числа эндогенных переменных) и линейно с увеличением числа включаемых лагов. Потребность в макромоделях большой размерности вызвана, в частности, тем, что центральные банки развитых государств опираются на большое число макроиндикаторов при проведении политики [Bernanke, Boivin, 2003].

Распространенные методы решения проблемы избыточной параметризации в частотных VAR состоят в использовании динамических факторов (DF, Dynamic Factors) и BVAR. В DF-моделях на базе большого количества макроэкономических переменных строится небольшой набор искусственных переменных, факторов, максимально сохраняющих в себе информацию об изменчивости исходных. В BVAR проблема избыточной параметри-

---

[2] Среди последних работ можно назвать [Aastveit et al., 2016; Garratt et al., 2016; Huber, 2016; Cheong, Lee, 2014].

[3] Описание других методов прогнозирования временных рядов, используемых в экономике и финансах, можно найти в обзорной работе [De Gooijer, Hyndman, 2006].

зации решается с помощью добавления ограничений на параметры модели в виде априорного закона их распределения. В данной работе использованы BVAR, в том числе из-за отсутствия большого количества длинных российских временных рядов, что затрудняет построение DF-модели.

Работа состоит из введения, четырех основных разделов и заключения. В следующем за введением разделе представлен обзор литературы. В разделе 3 кратко изложена суть байесовского подхода, сформулирована используемая BVAR-модель и метод ее оценивания. В разделе 4 подробно описаны все используемые макроэкономические ряды. В разделе 5 изложены результаты оценивания моделей и приведено сравнение качества прогнозов. В заключении представлены выводы и перспективы дальнейших исследований.

2. Обзор литературы

С практической точки зрения выбор модели BVAR для анализа обусловлен ее потенциально более высокой точностью прогноза в сравнении с частотной VAR. В частности, в работе [Doan et al., 1984] на исследуемой выборке было показано, что BVAR обеспечивают более точные прогнозы, чем частотные VAR и одномерные модели. Статья Литтермана [Litterman, 1986] продемонстрировала, что прогнозы BVAR успешно конкурируют с прогнозами систем уравнений большой размерности. В работе [Clark, McCracken, 2006] было построено 86 различных прогнозов для 18 моделей трехмерной регрессии (выпуск, инфляция и процентная ставка). Выбор часто делается именно в пользу байесовского оценивания.

Одним из наиболее сложных этапов оценки байесовской модели является выбор вида априорного распределения и его гиперпараметров. Распространенными альтернативами являются априорное распределение Миннесоты (Литтермана), предложенное в работах [Doan et al., 1984; Litterman, 1986][4], и сопряженное нормальное – обратное Уишарта распределение. Распределение Миннесоты задается меньшим количеством гиперпараметров.

Распределение Миннесоты, представленное в работе [Litterman, 1986] и модифицированное в статье [Doan et al., 1984], не было построено ни на какой теоретической экономической модели, но демонстрировало высокую прогнозную силу благодаря смягчению проблемы избыточной параметризации. Для BVAR небольшой размерности регуляризации, обеспечиваемой распределением Миннесоты, достаточно для улучшения прогнозной силы модели. Однако до последнего времени считалось, что для выборок с большим числом временных рядов наложения только лишь априорного распределения не достаточно и необходимо применять дополнительные ограничения. Ключевую роль в развитии байесовского подхода к анализу рядов высокой размерности сыграла статья [De Mol et al., 2008], в которой было показано, что при увеличении размерности достаточно наложения более узких априорных распределений.

Результат, полученный в работе [De Mol et al., 2008], был развит в статье [Bańbura et al., 2010], в которой авторы строят BVAR-модели для 3, 7, 20 и 131 переменной и показы-

[4] Так как распределение Миннесоты было предложено в работе Роберта Литтермана, то для экономии места в данной работе BVAR с априорным распределением Миннесоты мы называем BVAR Литтермана.

вают, что модели с большей размерностью демонстрируют лучшие прогнозные способности, чем модели малой размерности и даже FAVAR (Factor Augmented VAR).

Аналогичная модель для Новой Зеландии была предложена в работе [Bloor, Matheson, 2011], в которой было построено три BVAR-модели (с 9, 13 и 35 переменными) и сделан вывод, что BVAR обладает более высокой прогнозной способностью, чем несколько одномерных и частотных VAR-моделей.

Отталкиваясь от вывода, полученного в работе [Bańbura et al., 2010], о том, что модель BVAR на большой выборке продемонстрировала более точный прогноз, чем FAVAR, автор статьи [Koop, 2013] сравнил прогнозные способности BVAR на базе других априорных распределений с факторными моделями и также сделал вывод в пользу BVAR.

В этом же ключе была написана работа [Beauchemin, Zaman, 2011]. Авторы использовали такое же априорное распределение, как в статьях [Bańbura et al., 2010; Bloor, Matheson, 2011] для оценки BVAR на американских данных, однако с иным алгоритмом выбора гиперпараметров распределения. В работе было показано, что на рассматриваемой выборке для всех переменных, кроме ставки по федеральным фондам, BVAR обеспечивает значительно более точный прогноз, чем случайное блуждание со смещением.

Несмотря на широкое распространение байесовских методов в англоязычной научной литературе, на данный момент они крайне редко используются для анализа российской статистики. Обзор методов макроэкономического прогнозирования, включая краткое описание BVAR с априорным распределением Миннесоты, можно найти в статье [Пестова, Мамонов, 2016]. В работе [Дерюгина, Пономаренко, 2015] авторы использовали иерархическую версию BVAR с сопряженным нормальным – обратным Уишарта априорным распределением. Рассматриваемая иерархическая версия BVAR оказалась лучшей из сравниваемых моделей. В статье [Ломиворотов, 2015] прогнозы строились с помощью BVAR с сопряженным нормальным – обратным Уишарта распределением. Результаты прогнозирования на рассматриваемой выборке свидетельствуют в пользу BVAR. В работе [Ломиворотов, 2014] BVAR применялась для структурного анализа и определения основных каналов трансмиссии внешних шоков и кредитно-денежной политики. С целью структурного анализа российской экономики BVAR также оценивались в исследовании [Mumtaz et al., 2012].

В работе [Пестова, Мамонов, 2016] модели не оцениваются вообще, а работы [Ломиворотов, 2014; Mumtaz et al., 2012] посвящены структурному анализу и обходят стороной вопрос точности прогнозирования. Данная статья наиболее близка к работам [Дерюгина, Пономаренко, 2015; Ломиворотов, 2015]. Существенным отличием является использование иного априорного распределения и эндогенной процедуры подбора гиперпараметра регуляризации.

Читателю, желающему глубже ознакомиться с теорией оценки BVAR на английском языке, рекомендуется обратиться к таким обзорам, как [Karlsson, 2013; Kadyiala, Karlsson, 1997; Ciccarelli, Rebucci, 2003]. На русском языке общая теория байесовского оценивания представлена в статье [Айвазян, 2008], а применение байесовского подхода к VAR – в работе [Демешев, Малаховская, 2016].

3. Метод анализа

Концептуальное отличие байесовского подхода от частотного заключается в том, что сами параметры модели предполагаются случайными величинами. Помимо описания модели, исследователь формулирует свое изначальное мнение о ее параметрах в виде априорного распределения. Формула Байеса позволяет получить условное распределение параметров модели с учетом полученных наблюдений. Это условное распределение называется апостериорным. Из формулы Байеса следует, что апостериорная плотность распределения параметров пропорциональна произведению априорной плотности и функции правдоподобия:

$$p(\theta \mid x) \propto p(x \mid \theta)\, p(\theta), \tag{1}$$

где $p(\theta \mid x)$ – апостериорная плотность параметров модели, обозначаемых θ, при условии имеющихся данных x; $p(x \mid \theta)$ – функция правдоподобия; $p(\theta)$ – априорная плотность распределения параметров, знак $\propto$ означает пропорциональность левой и правой частей выражения с точностью до сомножителя, не зависящего от θ.

Пусть $Y_t = \left(y_{1,t}, y_{2,t}, \ldots, y_{n,t}\right)'$ – вектор случайных переменных. Векторная авторегрессия может быть представлена в виде

$$Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + \ldots + A_p Y_{t-p} + u_t, \tag{2}$$

где u_t – гауссовский белый шум размерности n с ковариационной матрицей $Eu_t u_t' = \Sigma$; c – вектор констант размерности n; $A_1, A_2, \ldots, A_p$ – матрицы параметров размерности $n \times n$, состоящие из элементов a_{ij}^k, где i – номер уравнения; j – номер переменной; k – номер лага; $i, j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, p$. Объединение матриц параметров в общую матрицу $\Phi = [A_1 \ldots A_p\ c]'$ и определение нового вектора $X_t = [Y'_{t-1} \ldots Y'_{t-p}\ 1]'$ позволяет получить более компактную запись VAR:

$$Y_t = \Phi' X_t + u_t.$$

Если же сгруппировать переменные и шоки следующим образом: $Y = [Y_1, Y_2, \ldots, Y_T]'$, $X = [X_1, X_2, \ldots, X_T]'$, $U = [u_1, u_2, \ldots, u_T]'$, то VAR можно представить в виде

$$Y = X\Phi + U.$$

Классическая (частотная) оценка VAR может быть проведена последовательным применением метода наименьших квадратов к каждому из уравнений системы.

В нашей работе мы строим не только частотные, но и байесовские векторные авторегрессии с априорным распределением Миннесоты. Незначительная модификация по отношению к [Litterman, 1986] выражается в том, что часть рядов предполагаются стационарными, что отражается в априорном распределении параметров матрицы A_1.

Несмотря на большое количество параметров модели, содержащихся в матрицах коэффициентов $A_1, \ldots, A_p$ и в ковариационной матрице Σ, априорное распределение Миннесоты задается сравнительно небольшим количеством гиперпараметров: $\lambda, \upsilon, \delta_1, \ldots, \delta_n, \sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$. Гиперпараметры $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ отвечают за дисперсии гауссовского белого шума u_t, гиперпараметры $\delta_1, \ldots, \delta_n$ отвечают за априорное математическое ожидание диагональных элементов матрицы A_1 первого лага. Гиперпараметр υ определяет соотношение априорных дисперсий для диагональных и недиагональных элементов матриц A_i при $i \geq 2$. Гиперпараметр λ определяет степень регуляризации априорного распределения. Априорное распределение элементов матриц $A_1, \ldots, A_p$ предполагается независимым нормальным.

Диагональные элементы матрицы A_1:

(3) $$a_{ii}^1 \sim N\left(\delta_i, \lambda^2\right).$$

Диагональные элементы матриц $A_2, \ldots, A_p$ (т. е. $k = 2, \ldots, p$):

(4) $$a_{ii}^k \sim N\left(0, \frac{\lambda^2}{k^2}\right).$$

Недиагональные элементы матриц $A_1, \ldots, A_p$ (т. е. $k = 1, \ldots, p$):

(5) $$a_{ij}^k \sim N\left(0, \frac{\upsilon\lambda^2\sigma_i^2}{k^2\sigma_j^2}\right).$$

Ковариационная матрица ошибок Σ предполагается диагональной и известной:

(6) $$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Априорное распределение параметра при единичном векторе (c) предполагается неинформативным.

Предпосылка о том, что ковариационная матрица Σ диагональна и известна, позволяет упростить расчеты; в то же время это означает, что байесовское оценивание на нее не распространяется.

Мы следуем [Bańbura et al., 2010] и устанавливаем $\delta_i = 1$ для всех нестационарных рядов и $\delta_i = 0$ для всех остальных. Ключевым параметром, отвечающим за «жесткость» априорного распределения (и, как следствие, за относительный вес априорного распределения при формировании апостериорного), является λ. Чем ближе λ к нулю, тем меньшее влияние на апостериорное распределение оказывают фактические данные и тем ближе оно к априорному. При стремлении λ к бесконечности апостериорное среднее параметров приближается к оценке простого метода наименьших квадратов. Ключевой результат работы [De Mol et al., 2008], подтвержденный [Bańbura et al.,2010], состоял в том, что λ должно зависеть от размерности выборки, т.е. от n. С увеличением n должно происходить сокращение λ, для того чтобы не происходило излишней параметризации модели.

Функция $\frac{1}{k^2}$ показывает, насколько быстро сокращается дисперсия параметров при увеличении номера лага. Это означает, что для лагов высоких порядков априорное распределение параметров становится более «сконцентрированным» вокруг нулевого значения и отражает предпосылку о том, что влияние более далеких лагов на сегодняшние значения менее вероятно, чем влияние более близких.

В качестве гиперпараметра σ_i^2 используют оценку дисперсии соответствующей компоненты вектора u. В данной работе оценка строится с помощью AR(p) для каждой переменной в отдельности. Соотношение дисперсий $\frac{\sigma_i^2}{\sigma_j^2}$ необходимо учесть при определении априорной дисперсии, так как разные ряды могут иметь разные единицы измерения и разную изменчивость.

Гиперпараметр υ показывает, насколько информация о лагах других переменных менее важна, чем информация о собственных лагах переменной.

Формулы (3)–(5) задают априорное распределение вектора $\phi = vec(\Phi)$, $\phi \sim \mathcal{N}(\underline{\phi}, \underline{\Xi})$, где vec обозначает операцию векторизации. Для априорного распределения Миннесоты оказывается, что апостериорное распределение параметров задается в следующем виде:

$$(7) \qquad \phi \mid Y \sim \mathcal{N}(\overline{\phi}, \overline{\Xi}),$$

где $\overline{\Xi} = \left[\underline{\Xi}^{-1} + \Sigma^{-1} \otimes (X'X)\right]^{-1}$, $\overline{\phi} = \overline{\Xi}\left[\underline{\Xi}^{-1}\underline{\phi} + \left(\Sigma^{-1} \otimes X'\right) y\right]$ и знак $\otimes$ обозначает кронекерово произведение.

В данной работе мы используем только априорное распределение Миннесоты и оставляем анализ BVAR с альтернативным априорным распределением для других исследований [Demeshev, Malakhovskaya, 2015].

Основная выборка состоит из 14 временных рядов с сентября 1995 г. по май 2014 г. (подробное описание рядов см. в следующем разделе), исходная выборка содержит 225 наблюдений.

В выборке можно выделить несколько составных частей. Первые 120 наблюдений (с сентября 1995 г. по август 2004 г.), обучающая часть выборки, используются для подбора априорного гиперпараметра λ. Последние 24 наблюдения (с июня 2012 г. по май 2014 г.), тестовая часть выборки, используются для сравнения прогнозной силы исследуемых моделей. При этом модели оцениваются на скользящей выборке длиной в 120 наблюдений. Например, при построении прогноза на три месяца вперед на июнь 2012 г., модели будут оцениваться по данным с апреля 2002 г. по март 2012 г.

После перехода к логарифмам для всех рядов, кроме процентной ставки и уровня безработицы, мы устраняем сезонность в рядах, демонстрирующих сезонные колебания. Далее на всей выборке кроме тестовой части происходит проверка на стационарность, для чего используются ADF (Augmented Dickey – Fuller) и KPSS (Kwiatkowski – Phillips – Schmidt – Shin) тесты. Такая проверка необходима для того, чтобы определить априорное математическое ожидание параметров, стоящих на главной диагонали A_1. Следуя методологии базовой работы, мы назначаем $\delta_i = 1$ для нестационарных рядов и $\delta_i = 0$ для стационарных. Для гиперпараметра отношения априорных дисперсий υ мы перебирали несколько значений: 0,25; 0,5; 0,75; 1.

На втором этапе мы оцениваем три обычных VAR-модели для разного набора переменных и строим по ним прогнозы. Базовый период оценивания составляет 201 месяц (с сентября 1995 г. по май 2012 г.), период прогноза составляет 24 месяца (с июня 2012 г. по май 2014 г.). Мы строим VAR для 5 и 6 переменных по аналогии со многими монетарными моделями, использовавшимися для структурного анализа различных экономик [Sims, 1992; Kim,Roubini, 2000; Bjørnland, 2008; Scholl, Uhlig, 2008]. В модель с пятью переменными мы включаем показатель деловой активности (индекс промышленного производства), индекс цен (подсчитанной с помощью ИПЦ), и инструмент монетарной политики (в качестве прокси для которого мы берем процентную ставку межбанковского рынка), валютный курс и денежный агрегат М2. В модель с шестью переменными мы включаем дополнительно цены на нефть. Количество лагов определяется путем минимизации информационных критериев. Прогноз строится на 1, 3, 6 и 12 месяцев.

Для определения λ и относительного качества прогноза мы используем обычную[5] для такого рода моделей схему [Bańbura et al., 2010], предполагающую, что референтной моделью является та, для которой $\lambda = 0$. Это означает, что дисперсии всех параметров a_{ij}^k, $k = 1,.., p$ равны нулю, т.е. те переменные, которые были признаны стационарными, описываются моделью белого шума (WN, White Noise) с константой ($y_{i,t} = c_i + u_{i,t}$), а те переменные, которые были признаны нестационарными, описываются моделью случайного блуждания (RW, Random Walk) со смещением ($y_{i,t} = c_i + y_{i,t-1} + u_{i,t}$). Мы будем называть эту модель $RWWN$ и обозначать индексом 0 (так как $\lambda = 0$).

Схема выбора λ и оценки качества прогноза состоит из следующих этапов.

1. На первом этапе строятся внутривыборочные однопериодные прогнозы на обучающей выборке и рассчитывается среднеквадратичная ошибка прогноза (MSFE, Mean Squared Forecast Error) для показателя деловой активности ($MSFE_{ip}^0$), индекса цен ($MSFE_p^0$) и процентной ставки ($MSFE_r^0$).

[5] Альтернатива состоит в выборе гиперпараметра λ, максимизирующего функцию маргинальной плотности (см., например: [Carriero et al., 2015]).

2. Затем на обучающей выборке оценивается частотная VAR-модель для трех переменных. Так как оценки байесовской VAR совпадают с оценками метода наименьших квадратов при $\lambda = \infty$, то среднеквадратичные ошибки прогноза по этой модели для показателя деловой активности, индекса цен и процентной ставки мы будем обозначать как $MSFE_{ip}^{\infty}$, $MSFE_{p}^{\infty}$ и $MSFE_{r}^{\infty}$ соответственно.

3. Далее рассчитываются показатели $FIT_{\infty}^{(2)}$ и $FIT_{\infty}^{(3)}$:

(8) $$FIT_{\infty}^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{MSFE_{ip}^{\infty}}{MSFE_{ip}^{0}} + \frac{1}{2}\frac{MSFE_{p}^{\infty}}{MSFE_{p}^{0}},$$

(9) $$FIT_{\infty}^{(3)} = \frac{1}{3}\frac{MSFE_{ip}^{\infty}}{MSFE_{ip}^{0}} + \frac{1}{3}\frac{MSFE_{p}^{\infty}}{MSFE_{p}^{0}} + \frac{1}{3}\frac{MSFE_{r}^{\infty}}{MSFE_{r}^{0}}.$$

Величина $FIT_{\infty}^{(f)}$, где $f = 2, 3$, показывает, насколько в среднем по f переменным частотная VAR прогнозирует хуже, чем модель RWWN.

В работах [Bańbura et al. 2010; Bloor, Matheson, 2011] используется показатель $FIT^{(3)}$, сравнивающий качество прогнозов для трех рядов: объема выпуска, уровня цен и процентной ставки. Помимо $FIT^{(3)}$ в данной работе также используется показатель $FIT^{(2)}$, сравнивающий качество прогнозов переменных, наиболее важных для макроэкономической политики: выпуска и индекса цен. Использование разных показателей FIT позволяет проверить робастность результатов.

На следующем этапе на обучающей выборке оцениваются BVAR-модели для 5, 6 и 14 переменных (обозначаем их индексом m) и для большого числа различных λ рассчитываются среднеквадратичные ошибки прогноза для индекса промышленного производства $MSFE_{ip}^{\lambda,m}$, индекса цен $MSFE_{p}^{\lambda,m}$ и процентной ставки $MSFE_{r}^{\lambda,m}$, а также показатели $FIT_{\lambda,m}^{(2)}$ и $FIT_{\lambda,m}^{(3)}$:

(10) $$FIT_{\lambda,m}^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{MSFE_{ip}^{\lambda,m}}{MSFE_{ip}^{0}} + \frac{1}{2}\frac{MSFE_{p}^{\lambda,m}}{MSFE_{p}^{0}},$$

(11) $$FIT_{\lambda,m}^{(3)} = \frac{1}{3}\frac{MSFE_{ip}^{\lambda,m}}{MSFE_{ip}^{0}} + \frac{1}{3}\frac{MSFE_{p}^{\lambda,m}}{MSFE_{p}^{0}} + \frac{1}{3}\frac{MSFE_{r}^{\lambda,m}}{MSFE_{r}^{0}}.$$

Величина $FIT_{\lambda,m}^{(f)}$, где $f = 2, 3$, показывает, насколько в среднем по f переменным BVAR, оцененная по m переменным с гиперпараметром λ, прогнозирует хуже, чем модель RWWN.

4. Оптимальное λ рассчитывается как значение, при котором минимизируется отклонение $FIT_{\lambda,m}^{(f)}$ от $FIT_{\infty}^{(f)}$:

(12) $$\lambda_m^{(2)} = argmin\left|FIT_\infty^{(2)} - FIT_{\lambda,m}^{(2)}\right|,$$

(13) $$\lambda_m^{(3)} = argmin\left|FIT_\infty^{(3)} - FIT_{\lambda,m}^{(3)}\right|.$$

После того как выбрано оптимальное значение λ для каждой модели, происходит построение вневыборочных прогнозов для тестовой части выборки.

5. Прогнозы строятся на 1, 3 и 6 месяцев $(h = 1,3,6)$. Тогда максимальная длина прогноза (H) равна 6. Обозначим начало тестовой части выборки (июнь 2012 г.) как T_0 и ее окончание (май 2014 г.) – T_1. Вневыборочные прогнозы строятся для каждого момента времени от T_0 до T_1. Оценка байесовских VAR с заданным λ происходит с помощью скользящего окна по 120 наблюдениям от момента $(T-119)$ до момента времени T.

6. Для каждой модели (m) и каждого прогнозного окна (h) рассчитываются вневыборочные среднеквадратичные ошибки прогноза (Out-of-sample MSFE) для каждой переменной: индикатора деловой активности, индекса потребительских цен и процентной ставки $\left(OMSFE_{var,h}^{\lambda,m}\right)$:

(14) $$OMSFE_{var,h}^{\lambda,m} = \frac{1}{T_1 - T_0 + 1}\sum_{T=T_0-h}^{T_1-h}\left(y_{var,T+h|T}^{\lambda,m} - y_{var,T+h}\right)^2,$$

где $y_{var,T+h}$ – реализованные значения в момент $T+h$ переменной var и $y_{var,T+h|T}^{\lambda,m}$ – прогноз переменной var на период $T+h$, построенный по наблюдениям с момента $(T-119)$ до момента T по модели m с использованием параметра λ, и $var = \{ip, p, r\}$, т.е. может выступать индексом промышленного производства, индексом потребительских цен и процентной ставкой соответственно.

7. По аналогии с предыдущим пунктом для трех переменных рассчитываются среднеквадратичные ошибки вневыборочного прогноза по модели RWWN ($OMSFE_{var,h}^{0}$) и по обычной VAR-модели ($OMSFE_{var,h}^{\infty}$), где $var = \{ip, p, r\}$.

8. Качество прогноза BVAR измеряется с помощью относительных показателей $RW-RMSFE_{var,h}^{\lambda,m}$ и $VAR-RMSFE_{var,h}^{\lambda,m}$, $var = \{ip, p, r\}$, где в первом случае среднеквадратичная ошибка прогноза по BVAR соотносится с ошибкой по RWWN, а во втором случае с ошибкой по VAR (Relative MSFE):

(15) $$RW-RMSFE_{var,h}^{\lambda,m} = \frac{OMSFE_{var,h}^{\lambda,m}}{OMSFE_{var,h}^{0}},$$

$$VAR - RMSFE_{var,h}^{\lambda,m} = \frac{OMSFE_{var,h}^{\lambda,m}}{OMSFE_{var,h}^{\infty}}, \quad (16)$$

где $var = \{ip, p, r\}$.

Изменение $RW - RMSFE_{var,h}^{\lambda,m}$ и $VAR - RMSFE_{var,h}^{\lambda,m}$ с изменением числа переменных в модели и прогнозного окна помогает сделать выводы о качестве прогноза BVAR по отношению к RWWN и обычной VAR.

4. Данные

Для оценки модели и построения прогнозов использовалось 14 российских макроэкономических временных рядов (см. табл. 1). Источником данных послужили базы Федеральной службы государственной статистики (ФСГС), Центрального банка РФ, IFS (International Financial Statistics) Международного валютного фонда и Центра анализа данных НИУ ВШЭ[6]. Все ряды изначально не содержали сезонной корректировки. Начало и конец выборки определялись доступностью данных.

Таблица 1.

Источники данных

Название макроиндикатора	Тип данных	База (если есть)	Источник
Индекс промышленного производства	базисный индекс	2010	IFS
Индекс потребительских цен	базисный индекс	2010	IFS
Индекс занятости в промышленности	базисный индекс	2010	IFS
Процентная ставка межбанковского рынка	в процентах годовых		IFS
Индекс реальных денежных доходов	базисный индекс	январь 1992 г.	ФСГС
Уровень безработицы	в процентах		IFS
Индекс цен на нефть марки Brent	базисный индекс	2010	IFS
Индекс цен производителей	цепной индекс		IFS
Ввод в действие новых жилых домов	в тыс. кв. м		ФСГС
Индекс реальных инвестиций в основной капитал	базисный индекс	январь 1994 г.	ЦАД
Индекс реальных зарплат	базисный индекс	январь 1993 г.	ФСГС
Денежный агрегат М2	в млрд руб.		ЦБ
Индекс РТС	в пунктах	сентябрь 1995 г.	ЦАД
Реальный эффективный валютный курс	базисный индекс	2010	IFS

[6] Скачивание происходило из IFS и ЦАД НИУ ВШЭ, однако, если данные были взяты из ЦАД, то в таблице указан первоначальный источник, т.е. либо Центральный банк, либо ФСГС. Индекс реальных инвестиций рассчитан ЦАД по данным ФСГС.

Цепной индекс цен производителей для дальнейших расчетов был превращен в базисный.

5. Результаты

Прежде всего, мы берем логарифмы всех рядов, кроме тех, что выражены в процентах, т.е. всех, кроме процентной ставки и уровня безработицы. Далее проводится сезонная корректировка всех рядов, которые потенциально могут испытывать сезонные колебания (индекс промышленного производства, индекс потребительских цен, индекс занятости в промышленности, индекс реальных денежных доходов, индекс цен производителей, ввод в действие новых жилых домов, индекс реальных инвестиций в основной капитал и индекс реальных заработных плат). Корректировка производится программой X13-ARIMA-SEATS, т.е. наиболее современным из всех существующих методов сезонной корректировки, разработанным в Банке Испании и поддерживаемым сейчас бюро Census [U.S. Census Bureau, 2006].

Далее на всей выборке кроме тестовой части все ряды проверяются на нестационарность, для чего используются KPSS и ADF-тесты. В обоих случаях уровень значимости фиксируется на пятипроцентном уровне. В случае несоответствия выводов указанных тестов мы ориентируемся на ADF-тест и получаем, что все ряды можно считать нестационарными, кроме межбанковской процентной ставки. Это означает, что при формировании вектора δ мы присваиваем значения $\delta_i = 1$ всем переменным, кроме процентной ставки, тогда как для процентной ставки $\delta_i = 0$.

На следующем этапе на обучающей выборке мы строим модель RWWN и считаем среднеквадратичную ошибку прогноза для индекса промышленного производства ($MSFE_{ip}^0$), индекса потребительских цен ($MSFE_p^0$) и процентной ставки ($MSFE_r^0$). Затем мы строим модели векторной авторегрессии на обучающей выборке и также считаем соответствующие ошибки прогноза ($MSFE_{ip}^{\infty}$, $MSFE_p^{\infty}$ и $MSFE_r^{\infty}$). В отличие от научных работ, на которые мы опираемся, мы считаем ($MSFE^{\infty}$) не только для различных моделей (содержащих 3, 5 и 6 переменных), но и для разного количества лагов (от 1 до 5). Максимальное количество лагов (5) было определено в соответствии с информационными критериями. Для моделей с тремя переменными в соответствии с критериями SC и HQ следовало выбрать 5 лагов, а в соответствии с AIC оптимальный выбор был равен 10 лагам. Мы ориентируемся на HQ и SQ критерии, так как известно, что при небольшой размерности VAR-модели AIC выбирает слишком большое число лагов с положительной вероятностью [Lütkepohl, 2005, p. 150]. Далее мы рассчитываем показатели $FIT_{\infty}^{(2)}$ и $FIT_{\infty}^{(3)}$ по формулам (8) и (9) для модели с тремя переменными и для каждого количества лагов.

Полученные величины показывают, во сколько раз прогноз, построенный по VAR, оказывается точнее (если мерой точности прогноза выступает $MSFE$). Мы получили не противоречащие логике результаты: с увеличением количества лагов в модели происходит увеличение количества оцениваемых параметров и точность прогноза возрастает. Для дальнейших расчетов мы используем количество лагов, равное пяти.

Таблица 2.

Переменная FIT_∞

	Лаги				
	1	2	3	4	5
$FIT_\infty^{(2)}$	0,928	0,857	0,808	0,676	0,524
$FIT_\infty^{(3)}$	0,736	0,683	0,629	0,521	0,419

Далее на обучающей выборке мы оцениваем BVAR-модели для 5, 6 и 14 переменных[7] для каждого возможного λ из промежутка от 0 до 2 с шагом 0,01 и для каждой модели рассчитываем $MSFE_{ip}^{\lambda,m}$, $MSFE_{p}^{\lambda,m}$, $MSFE_{r}^{\lambda,m}$, $FIT_{\lambda,m}^{(2)}$, $FIT_{\lambda,m}^{(3)}$. Таким образом мы получаем 603 значения $FIT_{\lambda,m}^{(2)}$ и столько же $FIT_{\lambda,m}^{(3)}$. Наконец, для каждой модели и каждого значения гиперпараметра отношения априорных дисперсий υ мы выбираем такие значения λ, которые минимизирует отклонение $FIT_{\lambda,m}^{(2)}$ от $FIT_\infty^{(2)}$ и $FIT_{\lambda,m}^{(3)}$ от $FIT_\infty^{(3)}$. Полученные результаты оказались не чувствительны к гиперпараметру отношения априорных дисперсий υ, и для υ, равного единице, оптимальные λ_m показаны в табл. 3.

Таблица 3.

Оптимальные значения λ_m

	$n=3$	$n=5$	$n=6$	$n=14$
$\lambda_m^{(2)}$	∞	0,62	0,34	0,14
$\lambda_m^{(3)}$	∞	0,58	0,34	0,14

Далее мы переходим к шагам 6–8 из описанной выше схемы и с помощью скользящей векторной авторегрессии по 120 наблюдениям строим прогнозы на тестовой части выборки. На последнем этапе мы строим среднеквадратичные ошибки прогноза для каждой из трех переменных для каждого прогнозного окна и каждой модели. Эта процедура для каждой модели повторяется для оптимального λ, для $\lambda = 0$ (RWWN) и для $\lambda = \infty$ (обычная VAR).

Наконец, для каждого прогнозного окна и каждой переменной мы находим соотношения среднеквадратичной ошибки прогноза для BVAR к среднеквадратичной ошибке

[7] Мы не проводим описанную далее процедуру поиска оптимального λ для модели по трем переменным, так как для нее по построению следует, что оптимальное λ равно бесконечности.

прогноза для RWWN и обычной VAR соответственно. Полученные значения показаны в табл. 4 и 5.

Таблица 4.

Отношение среднеквадратичных ошибок BVAR к RWWN

Переменная	h	$n = 3$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 14$
Индекс потребительских цен	1	0,73	0,56	0,63	0,80
Индекс потребительских цен	3	0,86	0,69	0,69	0,77
Индекс потребительских цен	6	0,76	0,60	0,56	0,64
Процентная ставка	1	0,15	0,27	0,22	0,16
Процентная ставка	3	0,20	0,40	0,47	0,36
Процентная ставка	6	0,26	0,37	0,47	0,42
Индекс промышленного производства	1	1,51	1,78	1,72	1,35
Индекс промышленного производства	3	1,33	1,85	1,89	2,41
Индекс промышленного производства	6	0,75	1,28	0,85	2,42

Таблица 5.

Отношение среднеквадратичных ошибок BVAR к VAR

Переменная	h	$n = 3$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 14$
Индекс потребительских цен	1	1	0,90	1,00	0,44
Индекс потребительских цен	3	1	0,96	0,93	0,47
Индекс потребительских цен	6	1	0,94	0,92	0,45
Процентная ставка	1	1	0,81	0,57	0,19
Процентная ставка	3	1	0,94	0,79	0,38
Процентная ставка	6	1	0,90	0,79	0,38
Индекс промышленного производства	1	1	0,80	0,79	0,26
Индекс промышленного производства	3	1	0,78	0,68	0,41
Индекс промышленного производства	6	1	0,77	0,40	0,29

Таблица 4 показывает отношение среднеквадратичных ошибок прогноза для BVAR к RWWN. Для процентной ставки и индекса потребительских цен отношение $OMSFE$ для всех моделей и всех горизонтов прогнозирования меньше единицы, что свидетельствует о том, что для указанных переменных BVAR обеспечивает более высокую точность прогноза. Следует при этом отметить, что ни для одной переменной не прослеживается монотонного снижения относительной ошибки с увеличением количества включенных в модель переменных. Аналогично не прослеживается никакого монотонного изменения относительной ошибки ни с увеличением, ни с сокращением прогнозного окна. Что касается индекса промышленного производства, то практически во всех ячейках таблицы стоят величины больше единицы, что говорит о том, что предложенная модель не может улучшить качество прогноза этого показателя по сравнению с моделью случайного блуждания со сдвигом.

В табл. 5 показано отношение среднеквадратичных ошибок прогноза для BVAR к VAR. Здесь результаты более обнадеживающие. Для всех моделей с количеством переменных выше трех и всех прогнозных окон (за единственным исключением прогноза индекса потребительских цен на один период по модели с 6 переменными) полученное соотношение меньше единицы, что говорит о лучшей предсказательной способности модели с байесовской регуляризацией, чем без нее. Что касается прогноза индекса потребительских цен на один период по модели с 6 переменными, то соотношение ошибок прогноза равно единице, что говорит о том, что BVAR не уступает в качестве прогноза VAR. Важным результатом работы является то, что соотношение ошибок монотонно снижается с ростом числа переменных модели, при этом имеет место резкое снижение относительных ошибок прогноза для модели с 14 переменными по отношению к моделям с 5 и 6 переменными, что подтверждает на российских данных идею о привлекательности для прогноза моделей с большим количеством переменных.

6. Заключение

Данное исследование посвящено прогнозированию индекса промышленного производства, индекса цен и процентной ставки для российской экономики в модели байесовской векторной авторегрессии. Мы отталкивались от утверждения, высказанного в работе [De Mol et al., 2008] и эмпирически проверенного в статье [Bańbura et al., 2010] о том, что точность прогнозов возрастает с увеличением числа входящих в модель переменных при условии сокращения параметра, отвечающего за байесовскую регуляризацию, т.е. при условии сужения априорного распределения параметров.

Эта работа была построена на ежемесячных данных 1995–2014 г. Для определения оптимального параметра регуляризации был использован механизм, описанный в работах [Bańbura et al., 2010; Bloor, Matheson, 2011]. Интересный результат расчетов заключаются в том, что в моделях с 6 и 14 переменными оптимальный параметр регуляризации не меняется (с точностью до одной сотой) в зависимости от того, ориентируемся ли мы на две (индекс промышленного производства и индекс потребительских цен) или три переменных (дополнительно добавляется процентная ставка межбанковского рынка). В модели с пятью переменными разница составляет всего 0,04.

Окончательные результаты нашей работы мы расцениваем как смешанные. По отношению к обыкновенной векторной авторегрессии модель BVAR дает устойчиво лучшие прогнозы при числе переменных в модели не менее пяти. Более того, отношение среднеквадратичных ошибок прогноза уменьшается с ростом числа переменных в модели и значительно меньше для модели с 14, чем для модели с 5 и 6 переменными для трех рассматриваемых переменных и всех анализируемых прогнозных окон. Этот результат свидетельствует о высоком потенциале использования моделей с большим числом переменных.

Кроме того, BVAR обеспечивает более точный прогноз по сравнению с моделью случайного блуждания (белого шума для межбанковской процентной ставки) для процентной ставки и индекса потребительских цен. Этот результат верен для всех рассмотренных в работе моделей (с 3, 5, 6 и 14 переменными) и для всех прогнозных окон. При этом уменьшение среднеквадратичной ошибки прогноза может быть весьма значительным. К примеру, соотношение $OMSFE$ для BVAR к RWWN для прогноза на один период составляет 0,15 для модели с тремя переменными, что свидетельствует о значительном повышении точности прогнозирования. Однако в данном случае не прослеживается монотонное снижение относительных ошибок прогноза с увеличением числа переменных в модели. Кроме того, для индекса промышленного производства модель BVAR дает устойчиво худший прогноз, чем модель случайного блуждания.

Продолжение данной работы может состоять в проверке робастности результатов по отношению к другим параметрам Миннесоты-распределения, другим априорным распределениям, числу включенных в модель лагов и т.д.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Айвазян С.А. Байесовский подход в эконометрическом анализе // Прикладная эконометрика. 2008. 9. 1. С. 93–130.

Демешев Б.Б., Малаховская О.А. Картографирование BVAR // Прикладная эконометрика. 2016. 43. 3. С. 118–141.

Дерюгина Е.Б., Пономаренко А.А. Большая байесовская векторная авторегрессионная модель для российской экономики. Серия докладов об экономических исследованиях ЦБ. № 1. Март 2015.

Ломиворотов Р.В. Использование байесовских методов для анализа денежно-кредитной политики в России // Прикладная эконометрика. 2015. 38. 2. С. 41–63.

Ломиворотов Р.В. Влияние внешних шоков и денежно-кредитной политики на экономику России // Вопросы экономики. 2014. 11. С. 122–139.

Пестова А.А., Мамонов М.Е. Обзор методов макроэкономического прогнозирования: в поисках перспективных направлений для России // Вопросы экономики. 2016. 6. С. 45–76.

Aastveit K.A., Jore A.S., Ravazzolo F. Identification and Real-time Forecasting of Norwegian Business Cycles // International Journal of Forecasting. 2016. 32. 2. P. 283–292.

Bańbura M., Giannone D., Reichlin L. Large Bayesian Vector Auto Regressions // Journal of Applied Econometrics. 2010. 25. 1. P. 71–92.

Beaucheman K., Zaman S. A Medium Scale Forecasting Model for Monetary Policy: Federal Reserve Bank of Cleveland Working Paper № 1128. 2011.

Bernanke B., Boivin J. Monetary Policy in a Data-rich Environment // Journal of Monetary Economics. 2003. 50. 3. P. 525–546.

Bjørnland H. Monetary Policy and Exchange Rate Interactions in Small Open Economy // Scandinavian Journal of Economics. 2008. 110. 1. P. 197–221.

Bloor C., Matheson T. Real-time Conditional Forecasts with Bayesian VARs: An Application to New Zealand // The North American Journal of Economics and Finance. 2011. 22. 1. P. 26–42.

Carriero A., Clark T., Marcellino M. Bayesian VARs: Specification Choices and Forecast Accuracy // Journal of Applied Econometrics. 2015. 30. 1. P. 46–73.

Cheong C., Lee H. Forecasting with a Parsimonious Subset VAR Model // Economics Letters. 2014. 125. 2. P. 167–170.

Ciccarelli M., Rebucci A. BVARs: A Survey of the Recent Literature with an Application to the European Monetary System // Rivista di Politica Economica. 2003. 93. 5. P. 47–112.

Clark T., McCracken M. Forecasting with Small Macroeconomic VARs in the Presence of Instabilities: Finance and Economic Discussion Series from Board of Governors of Federal Reserve System. 2006.

De Gooijer J.G., Hyndman R. 25 Years of Time Series Forecasting: A Selective Review // International Journal of Forecasting. 2006. 22. Iss. 3. P. 443–473.

De Mol C., Giannone D., Reichlin L. Forecasting Using a Large Number of Predictors: Is Bayesian Regression a Valid Alternative to Principal Components? // Journal of Econometrics. 2008. 146. 2. P. 318–328.

Demeshev B. Malakhovskaya O. Forecasting Russian Macroeconomic Indicators with BVAR: HSE Working Paper № WP BRP 105/EC/2015. 2015.

Doan T., Litterman R., Sims C. Forecasting and Conditional Projection Using Realistic Prior Distributions // Econometric Reviews. 1984. 3. 1. P. 1–100.

Garratt A., Lee K., Shields K. Forecasting Global Recessions in a GVAR Model of Actual and Expected Output // International Journal of Forecasting. 2016. 32. 2. P. 374–390.

Huber F. Density Forecasting Using Bayesian Global Vector Autoregression with Stochastic Volatility // International Journal of Forecasting. 2016. 32. 3. P. 818–837.

Kadiyala K.R., Karlsson S. Numerical Methods for Estimation and Inference in Bayesian VAR-Models // Journal of Applied Econometrics. 1997. 12. 2. P. 99–132.

Karlsson S. Forecasting with Bayesian Vector Autoregressions // Handbook of Economic Forecasting. 2(B). 2013. P. 791–897.

Kim S., Roubini N. Exchange Rate Anomalies in the Industrial Countries: A Solution with a Structural VAR Approach // Journal of Monetary Economics. 2000. 45. 3. P. 561–586.

Koop G. Forecasting with Medium and Large Bayesian VARS // Journal of Applied Econometrics. 2013. 28. 2. P. 177–203.

Litterman R. Forecasting with Bayesian Vector Autoregressions – Five Years of Experience // Journal of Business and Economic Statistics. 1986. 4. 1. P. 25–38.

Lütkepohl H. New Introduction to Multiple Time Series Analysis. Springer-Verlag, 2005.

Mumtaz H., Solovieva A., Vasilieva Ye. Asset Prices, Credit and the Russian Economy: Centre for Central Banking Studies Joint Research Paper. 2012.

Scholl A., Uhlig H. New Evidence on the Puzzles: Results from Agnostic Identification on Monetary Policy and Exchange Rates // Journal of International Economics. 2008. 76. 1. P. 1–13.

Sims C. Macroeconomics and Reality // Econometrica. 1980. 48. 1. P. 1–48.

Sims C. Interpreting the Macroeconomic Time Series Facts // European Economic Review. 1992. 36. P. 975–1000.

U.S. Census Bureau. X–13 A–S Reference Manual version 0.3. Statistical Research Division. Washington, 2006.

Macroeconomic Forecasting with a Litterman's BVAR Model

Boris Demeshev[1], **Oxana Malakhovskaya**[2]

[1] National Research University Higher School of Economics,
20, Myasnitskaya str., Moscow, 101000, Russian Federation.
E-mail: boris.demeshev@gmail.com

[2] National Research University Higher School of Economics,
20, Myasnitskaya str., Moscow, 101000, Russian Federation.
E-mail: omalakhovskaya@hse.ru

This paper compares the forecasting performance of random walk, frequentist vector autoregression (VAR), and Bayesian vector autoregression with Minnesota prior (BVAR) models on quarterly Russian data sample running from 1995 to 2014. Maximal number of variables included in the model is equal to 14 that requires an endogenous search of optimal shrinkage hyperparameter. The search procedure follows [Bańbura et al., 2010; Bloor, Matheson, 2011]. According to the selection method the shrinkage hyperparameter equates the forecasting quality of the frequentist VAR and BVAR for the minimal considered dimension of the model (three variables). For any dimension of the BVAR model the optimal shrinkage hyperparameter is robust to considered functions of relative forecasting accuracy.

We show that the BVAR provides a more accurate forecast than the frequentist VAR on the studied sample. For key macro indicators (the industrial production index, consumer price index and the interbank interest rate), forecasting horizons, and all model sizes, the mean squared error of the BVAR is lower than that of the frequentist VAR. Moreover, the results show that the forecast made using the BVAR is more precise than the forecast made using random walk model for the CPI and using white noise model for the interbank rate. However, the BVAR cannot beat the random walk while forecasting the industrial production index.

***Key words*:** VAR; BVAR; Minnesota prior; macroeconomic forecasting.

JEL Classification: C11, E27, E37, E47.

* *
*

References

Aivazian S.A. (2008) Bajesovskij podkhod v ekonometricheskom analize [Bayesian Methods in Econometrics]. *Applied Econometrics*, 1, 9, pp. 93–130.

Demeshev B.B., Malakhovskaya O.A. (2016) Kartographirovanie BVAR [BVAR Mapping]. *Applied Econometrics*, 43, 3, pp. 118–141.

Deryuguina E.B., Ponomarenko A.A. (2015) *Bol'shaya bajesovskaya vektornaya avtoregressionnaya model'dlya rossijskoj ekonomiki* [Large Bayesian Vector Autoregressive Model for the Russian Economy]. Seriya dokladov ob ekonomicheskikh issledovaniyakh, 1.

Lomivorotov R.V. (2015) Ispol'zovanie bajesovskikh metodov dlya analiza denezhno-kreditnoj politiki v Rossii [Bayesian Estimation of Monetary Policy in Russia]. *Applied Econometrics*, 38, 2, pp. 41–63.

Lomivorotov R.V. (2014) Vliyanie vneshnikh shokov I denezhno-kreditnoj politiki na ekonomiku Rossii [Impact of External Shocks and Monetary Policy on Russian Economy]. *Voprosy Economiki*, 11, pp. 122–139.

Pestova A.A., Mamonov M.Ye. (2016) Obzor metodov makroekonomicheskogo prognozirovaniya v poiskakh perspektivnykh napravleniy dlya Rossii [A Survey of Methods for Macroeconomic Forecasting: Looking for Perspective Directions in Russia]. *Voprosy Economiki*, 6, pp. 45–76.

Aastveit K.A., Jore A.S., Ravazzolo F. (2016) Identification and Real-time Forecasting of Norwegian Business Cycles. *International Journal of Forecasting*, 32, 2, pp. 283–292.

Bańbura M., Giannone D., Reichlin L. (2010) Large Bayesian Vector Auto Regressions. *Journal of Applied Econometrics*, 25, 1, pp. 71–92.

Beaucheman K., Zaman S. (2011) *A Medium Scale Forecasting Model for Monetary Policy*. Federal Reserve Bank of Cleveland Working Paper. No 1128.

Bernanke B., Boivin J. (2003) Monetary Policy in a Data-rich Environment. *Journal of Monetary Economics*, 50, 3, pp. 525–546.

Bjørnland H. (2008) Monetary Policy and Exchange Rate Interactions in Small Open Economy. *Scandinavian Journal of Economics*, 110, 1, pp. 197–221.

Bloor C., Matheson T. (2011) Real-time Conditional Forecasts with Bayesian VARs: An Application to New Zealand. *The North American Journal of Economics and Finance*, 22, 1, pp. 26–42.

Carriero A., Clark T., Marcellino M. (2015) Bayesian VARs: Specification Choices and Forecast Accuracy. *Journal of Applied Econometrics*, 30, 1, pp. 46–73.

Cheong C., Lee H. (2014) Forecasting with a Parsimonious Subset VAR Model. *Economics Letters*, 125, 2, pp. 167–170.

Ciccarelli M., Rebucci A. (2003) BVARs: A Survey of the Recent Literature with an Application to the European Monetary System. *Rivista di Politica Economica*, 93, 5, pp. 47–112.

Clark T., McCracken M. (2006) *Forecasting with Small Macroeconomic VARs in the Presence of Instabilities*. Finance and Economic Discussion Series from Board of Governors of Federal Reserve System.

De Gooijer J.G., Hyndman R. (2006) 25 Years of Time Series Forecasting: A Selective Review. *International Journal of Forecasting*, 22, iss. 3, pp. 443–473.

De Mol C., Giannone D., Reichlin L. (2008) Forecasting Using a Large Number of Predictors: Is Bayesian Regression a Valid Alternative to Principal Components? *Journal of Econometrics*. 146, 2, pp. 318–328.

Demeshev B. Malakhovskaya O. (2015) *Forecasting Russian Macroeconomic Indicators with BVAR*. HSE Working Paper no WP BRP 105/EC/2015.

Doan T., Litterman R., Sims C. (1984) Forecasting and Conditional Projection Using Realistic Prior Distributions. *Econometric Reviews*, 3, 1, pp. 1–100.

Garratt A., Lee K., Shields K. (2016) Forecasting Global Recessions in a GVAR Model of Actual and Expected Output. *International Journal of Forecasting*, 32, 2, pp. 374–390.

Huber F. (2016) Density Forecasting Using Bayesian Global Vector Autoregression with Stochastic Volatility. *International Journal of Forecasting*, 32, 3, pp. 818–837.

Kadiyala K.R., Karlsson S. (1997) Numerical Methods for Estimation and Inference in Bayesian VAR-Models. *Journal of Applied Econometrics*, 12, 2, pp. 99–132.

Karlsson S. (2013) Forecasting with Bayesian Vector Autoregressions. *Handbook of Economic Forecasting*, 2(B), pp. 791–897.

Kim S., Roubini N. (2000) Exchange Rate Anomalies in the Industrial Countries: A Solution with a Structural VAR Approach. *Journal of Monetary Economics*, 45, 3, pp. 561–586.

Koop G. (2013) Forecasting with Medium and Large Bayesian VARS. *Journal of Applied Econometrics*, 28, 2, pp. 177–203.

Litterman R. (1986) Forecasting with Bayesian Vector Autoregressions – Five Years of Experience. *Journal of Business and Economic Statistics*, 4, 1, pp. 25–38.

Lütkepohl H. (2005) *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer-Verlag.

Mumtaz H., Solovieva A., Vasilieva Ye. (2012) *Asset Prices, Credit and the Russian Economy*. Centre for Central Banking Studies Joint Research Paper.

Scholl A., Uhlig H. (2008) New Evidence on the Puzzles: Results from Agnostic Identification on Monetary Policy and Exchange Rates. *Journal of International Economics*, 76, 1, pp. 1–13.

Sims C. (1980) Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, 48, 1, pp. 1–48.

Sims C. (1992) Interpreting the Macroeconomic Time Series Facts. *European Economic Review*, 36, pp. 975–1000.

U.S. Census Bureau (2006) *X–13 A–S Reference Manual version 0.3. Statistical Research Division*. Washington.